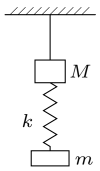
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2023

Zadania z fizyki nr 752, 753

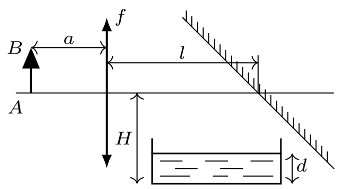
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

752. Na nieważkiej nici wiszą w jednorodnym polu ciężkości dwa ciężarki o masach M i m, połączone sprężyną o współczynniku sprężystości k i zaniedbywalnej masie (rys. 1). Nić przepalono. Po jakim czasie siła naciągu sprężyny po raz pierwszy osiągnie wartość zero? Zakładamy, że do tego momentu dolny ciężarek nie uderzy jeszcze w podłoże.



Rys. 1

753. Przedmiot AB znajduje się w odległości $a = 36\,\mathrm{cm}$ od cienkiej soczewki o ogniskowej $f = 30\,\mathrm{cm}$. W odległości $l = 1\,\mathrm{m}$ za soczewką umieszczono zwierciadło płaskie nachylone do osi optycznej soczewki pod kątem $\pi/4$ (rys. 2). W jakiej odległości H od osi optycznej soczewki należy umieścić dno naczynia z wodą, aby otrzymać na nim ostry obraz przedmiotu? Wysokość warstwy wody w naczyniu wynosi $d = 20\,\mathrm{cm}$, współczynnik załamania wody $n = 4/3$.



Rys. 2

Rozwiązania zadań z numeru 10/2022

Przypominamy treść zadań:

744. Z północnego bieguna Ziemi chcemy wystrzelić pocisk balistyczny (poruszający się pod wpływem siły ciężkości), który trafi w punkt na równiku, nadając mu najmniejszą możliwą prędkość początkową. Znaleźć wartość tej prędkości oraz kąt, pod którym należy oddać wystrzał. Opory ruchu zaniedbujemy, przyjmujemy, że Ziemia jest jednorodną kulą o promieniu R.

745. Długi cienki pręt porusza się ze stałą prędkością wzdłuż swojej osi. Obserwator znajduje się w dużej odległości od osi. W chwili, gdy promień skierowany na środek pręta utworzył kąt α z kierunkiem jego ruchu, widziana długość pręta okazała się równa jego długości spoczynkowej. Znaleźć prędkość pręta.

744. Pocisk porusza się po fragmencie AB elipsy (rys. 3), której jedno z ognisk F_1 znajduje się w środku Ziemi, a oś wielka leży na symetralnej odcinka AB łączącego punkty startu i lądowania. Z zasady zachowania energii mamy związek:

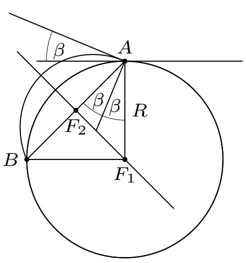
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{2a}, \tag{1}$$

gdzie a jest półosią wielką elipsy, M masą Ziemi, a v prędkością początkową pocisku o masie m. Prędkość ta jest najmniejsza, gdy minimalna jest energia całkowita, a tym samym minimalna jest oś wielka elipsy. Zatem drugie ognisko elipsy F_2 leży na odcinku AB, a oś wielka elipsy wynosi:

$$2a = |AF_1| + |AF_2| = R + \frac{R}{\sqrt{2}}. \tag{2}$$

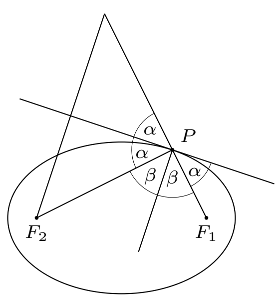
Podstawiając (2) do (1), otrzymujemy minimalną wartość prędkości początkowej pocisku:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R\left(\sqrt{2}+1\right)}} = \sqrt{2gR\left(\sqrt{2}-1\right)} = 7{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}.$$



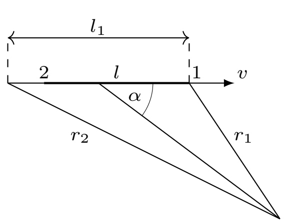
Rys. 3

Styczna do elipsy w dowolnym punkcie P (rys. 4) jest prostopadła do dwusiecznej kąta utworzonego przez odcinki łączące ogniska elipsy z punktem P. Kąt $F_1AF_2 = 45°$, dwusieczna tego kąta tworzy z odcinkiem F_1A kąt $\beta = 22{,}5°$, z rysunku 3 widać, że kąt, jaki tworzy wektor prędkości początkowej pocisku z powierzchnią Ziemi, wynosi również $22{,}5°$.



Rys. 4

745. Niech długość spoczywającego pręta wynosi l_0. Jego długość w układzie, w którym pręt porusza się z prędkością v równolegle do swojej osi, jest równa $l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$, gdzie c jest prędkością światła. Załóżmy, że w pewnej chwili do obserwatora dociera światło wysłane przez przedni koniec pręta w chwili t_1, a przez tylny koniec w chwili t_2 (rys. 5). Zachodzi związek $t_1 + \frac{r_1}{c} = t_2 + \frac{r_2}{c}$.



Rys. 5

Widziana długość pręta wynosi

$$l_1 = l + v(t_1 - t_2) = l + v\frac{r_2 - r_1}{c}.$$

$r_1, r_2 \gg l_1$, bo obserwator znajduje się daleko, zatem

$$r_2 - r_1 = l_1 \cos\alpha.$$

Obserwowana długość pręta

$$l_1 = \frac{l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{1-\frac{v\cos\alpha}{c}}.$$

Podstawiając $l_1 = l_0$, otrzymujemy szukaną prędkość pręta

$$v = \frac{2c\cos\alpha}{1+\cos^2\alpha}.$$

Czołówka ligi zadaniowej
Klubu 44 F
po zakończeniu
roku szkolnego 2021/22

Sławomir Buć (Mystków)	43,90
Jacek Konieczny (Poznań)	33,42
Jan Zambrzycki (Białystok)	3 – 32,98
Ryszard Woźniak (Kraków)	32,96
Marian Łupieżowiec (Gliwice)	2 – 32,56
Paweł Perkowski (Ożarów Maz.)	4 – 32,13
Andrzej Nowogrodzki (Chocianów)	3 – 18,61
Paweł Kubit (Kraków)	15,73
Tomasz Wietecha (Tarnów)	16 – 12,94

Lista obejmuje uczestników ligi, których stan konta wynosi co najmniej 12 punktów i którzy przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2020, 2021 lub 2022.

Podsumowanie ligi zadaniowej Klubu 44 F w roku szkolnym 2021/2022

Współczynniki trudności tegorocznych zadań rozłożyły się dosyć symetrycznie – średnia wyniosła 2,22, pięć przekroczyło trójkę, cztery były mniejsze od dwóch.

Najwięcej problemów sprawiło zadanie **723** (WT = 3,77), gdzie relatywistyczna cząstka o znanej masie i energii kinetycznej zderza się niesprężyście z taką samą cząstką spoczywającą. Należało znaleźć maksymalną energię, jaka mogła być wykorzystana do wytworzenia nowych cząstek. Energia ta jest różnicą między energiami spoczynkowymi produktów i substratów reakcji, tymczasem większość uczestników przyjęła założenie, że całkowita masa układu nie zmienia się.

Trudności sprawiły też zadania z elektromagnetyzmu. Zadanie **727** (WT = 3,27), gdzie również nikt nie zdobył maksymalnej oceny, polegało na znalezieniu wytrzymałości drutu, z którego wykonano zwojnicę, aby nie uległ on rozerwaniu podczas przepływu prądu. Nadesłane rozwiązania zawierały założenie, że indukcja pola magnetycznego, w którym znajduje się pojedynczy zwój, jest w przybliżeniu taka sama, jak od całej zwojnicy. W rzeczywistości stanowi ona połowę tej wielkości.

Zadanie **728** (WT = 3,23) dotyczyło ruchu cząstki naładowanej w skrzyżowanych polach elektrycznym i magnetycznym z zadaną prędkością początkową. Maksymalne oceny uzyskali za nie **Piotr Adamczyk**, **Konrad Kapcia** i **Tomasz Wietecha**. Pozostałe rozwiązania zawierały błędy, a niektórzy uczestnicy nadesłali tylko drugie zadanie z tej serii, stąd stosunkowo wysoki współczynnik trudności.

W zadaniu **733** (WT = 3,06) zmienne pole magnetyczne w obszarze wewnątrz przewodzącego pierścienia w kształcie okręgu wytwarzało w nim stałą siłę elektromotoryczną. Należało znaleźć napięcie między dwoma punktami tego okręgu, do których na zewnątrz drutami oporowymi dołączony był amperomierz. Bezbłędnie rozwiązał to zadanie **Piotr Adamczyk**. Pozostali uczestnicy często nie brali pod uwagę, że siła elektromotoryczna indukcji powstawała w każdym elemencie okręgu.

Zadanie **738** (WT = 2,71) było zadaniem z kinematyki. Stożek toczył się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej, a jego oś obracała się z zadaną prędkością kątową wokół osi pionowej przechodzącej przez wierzchołek stożka. Polecenie brzmiało: „Wyznaczyć prędkość liniową dowolnego punktu średnicy podstawy stożka leżącej w płaszczyźnie pionowej". Miałam na myśli płaszczyznę pionową zawierającą oś stożka oraz jego tworzącą styczną do podłoża – i tak zrozumiała to większość uczestników, ale nie zostało to doprecyzowane w treści zadania. Dlatego nie obniżałam punktów za przyjęcie innej interpretacji. Kluczowe w tym zadaniu było znalezienie związku między prędkościami kątowymi obrotu stożka wokół własnej osi i obrotu tej osi wokół osi pionowej. Poprawnie zrobili to **Piotr Adamczyk** i **Piotr Łaba**, którzy uzyskali oceny maksymalne.

Nie było oceny maksymalnej w zadaniu **734** (WT = 2,63), gdzie nitka odwijana ze szpulki toczącej się po stole wyciągana była stałą siłą przez otworek powyżej szpulki. Prawie wszyscy poradzili sobie z dynamiką zadania, gorzej było z kinematyką, czyli z odpowiedzią na pytanie, jaka długość nici została wyciągnięta przez otwór. Najbliższy prawidłowej odpowiedzi był **Paweł Perkowski**.

Czterech uczestników przekroczyło w tym roku granicę 44 punktów – **Tomasz Wietecha** po raz szesnasty (!), **Piotr Adamczyk** i **Konrad Kapcia** po raz drugi, **Ryszard Baniewicz** po raz pierwszy. Podobnie jak w roku ubiegłym, najbardziej skuteczny okazał się **Piotr Adamczyk**, który przysłał rozwiązania wszystkich zadań, a za 15 z nich otrzymał oceny maksymalne.

Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2023

Zadania z matematyki nr 855, 856

Redaguje Marcin E. KUCZMA

855. Rozważamy funkcje $f\colon\ [0,1]\to[0,\infty)$ spełniające warunki: $f(1)=1$ oraz

$$f(x+y)\geqslant f(x)+f(y),\qquad \text{gdy}\quad x,y,x{+}y\in[0,1].$$

Wyznaczyć najmniejszą liczbę $C>0$ o tej własności, że dla każdej rozważanej funkcji f ma miejsce oszacowanie: $f(x)\leqslant Cx$ (dla $x\in[0,1]$).

856. Rozstrzygnąć, czy istnieje ciąg nieskończony $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ o wyrazach całkowitych dodatnich taki, że każda dodatnia liczba całkowita występuje dokładnie raz w każdym z ciągów $(a_1,a_2,a_3,\ldots)$ oraz $(d_1,d_2,d_3,\ldots)$, gdzie $d_i=|a_i-a_{i+1}|$.

Zadanie 856 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.