A. Pawlewicz, M. Wojciechowski, *Marcinkiewicz sampling theorem for Orlicz spaces*, Positivity, volume 26, 2022.

Czytelnika zainteresowanego wyczerpującą odpowiedzią zachęcam do przeczytania naszej wspólnej pracy (szczegóły na marginesie), a tutaj przytoczę dwa – być może zaskakujące – wyniki na ten temat. W analogii do przypadku L^p, wprowadźmy normę Orlicza opartą na próbce $2n+1$ punktów:

$$\|f\|_{\ell_n^\varphi} \leqslant 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} \varphi(|f(x_{n,k})|) \leqslant 1.$$

Prawdziwe są wówczas następujące twierdzenia:

Twierdzenie 1 (pierwsza nierówność). *Dla dowolnej N–funkcji φ spełniającej warunek Δ_2 oraz dowolnego wielomianu trygonometrycznego f stopnia n zachodzi nierówność $\frac{1}{3}\|f\|_{\ell_n^\varphi} \leqslant \|f\|_{L^\varphi}$.*

Twierdzenie 2 (druga nierówność). *Dla dowolnej N–funkcji φ spełniającej warunek Δ_2 następujące warunki są równoważne:*

1. *Istnieje stała $C_\varphi > 0$ taka, że dla dowolnego n oraz dowolnego wielomianu trygonometrycznego f stopnia n zachodzi nierówność $\|f\|_{L^\varphi} \leqslant C_\varphi \|f\|_{\ell_n^\varphi}$.*
2. *Istnieje $p > 1$ takie, że każdy operator liniowy T (którego argumentami i wartościami są funkcje na $\mathbb{T}$), który jest słabego typu $(1,1)$ i (p,p), jest również ciągły jako operator $T\colon L^\varphi(\mathbb{T}) \to L^\varphi(\mathbb{T})$.*

Z konieczności, jako objaśnienie założenia „słabego typu" niech wystarczy nam, że T zachowuje się „przyzwoicie" na przestrzeniach L^1 i L^p. Istotne jest jednak to, że warunek 2 to dokładnie sformułowanie twierdzenia Marcinkiewicza o interpolacji, w którym przestrzeń L^φ zajmuje miejsce „pośredniej" przestrzeni L^r $(1 < r < p)$. Okazuje się więc, że w świecie przestrzeni Orlicza twierdzenie o próbkowaniu jest niejako *równoważne* twierdzeniu o interpolacji!

Modele Wszechświata dla początkujących
Część 2: Upraszczamy, ile się da

*Szymon CHARZYŃSKI**

* Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

W Internecie krąży wiele sentencji, których autorstwo (nie zawsze słusznie) przypisuje się Albertowi Einsteinowi. Jedną z nich jest: "Make everything as simple as possible, but not simpler". (Wszystko należy upraszczać, jak tylko się da, ale nie bardziej). Jest to prawdopodobnie *uproszczona* wersja zdania z wykładu Einsteina z 1933 roku, które brzmi: "It can scarcely be denied that the supreme goal of all theory is to make the irreducible basic elements as simple and as few as possible without having to surrender the adequate representation of a single datum of experience".

W poprzednim numerze *Delty* analizowaliśmy ruch mrówek po rozciągającej się nici. Taka jednorodnie rozciągająca się na całej długości nić jest pomocna jako analogia naszego rozszerzającego się Wszechświata. Z obserwacji wiemy, że galaktyki oddalają się od nas, przy czym prędkość oddalania jest proporcjonalna do odległości danej galaktyki. Tę proporcjonalność nazywamy *prawem Hubble'a–Lemaître'a*. Jeżeli na nici postawimy kropki, to z punktu widzenia jednej wybranej kropki wszystkie inne będą się od niej oddalały zgodnie z prawem Hubble'a–Lemaître'a. Tę analogię można uogólniać na wyższe wymiary: możemy wyobrażać sobie kropki na powierzchni nadmuchiwanego balonu albo rodzynki w rosnącym cieście.

Analogie są pouczające, ale trzeba z nimi uważać. Jeżeli chcemy utrzymać stały współczynnik proporcjonalności między prędkością a odległością, to jeśli nić będzie wystarczająco długa, dojdziemy nieuchronnie do punktu na nici, który będzie się oddalał z prędkością większą od prędkości światła (prędkość tę zwyczajowo oznaczamy przez c). Jest oczywiste, że doświadczenia z nicią, która w przestrzeni rozciąga się w ten sposób, nie da się wykonać. Jest to sprzeczne z naszą wiedzą skodyfikowaną w formie szczególnej teorii względności. Jednak astronomowie twierdzą, że obserwują obiekty oddalające się od nas z prędkością większą od c. Takiego zjawiska nie da się opisać jako ruchu galaktyk w przestrzeni z taką prędkością. Rozszerzającego się Wszechświata nie da się opisać w ramach szczególnej teorii względności. To z przestrzenią pomiędzy nami a tą galaktyką dzieje się coś, co powoduje, że odległość do galaktyki rośnie tak szybko. Czasoprzestrzeń nie jest statyczną sceną, na której rozgrywa się historia Wszechświata, ale sama jest dynamicznym obiektem, który podlega ewolucji, tak jak opisuje to ogólna teoria względności Einsteina (OTW). Jak się wkrótce przekonamy, aby uratować naszą analogię, musimy nić utożsamić z przestrzenią, która sama się rozciąga, a nie z czymś, co w przestrzeni się porusza. To rozróżnienie jest kluczowe.

Mówimy w liczbie mnogiej o równaniach Einsteina, ponieważ w istocie jest to układ równań numerowanych dwoma indeksami μ oraz ν, z których każdy przebiega zbiór czteroelementowy – tak jak czasoprzestrzeń jest czterowymiarowa. Oznacza to, że występujące w równaniach obiekty $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ oraz $T_{\mu\nu}$ to macierze 4 na 4. Dodatkowo macierze te są symetryczne, czyli np. $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, to znaczy, że liczba niezależnych składowych wynosi 10.

Równania Einsteina. Nie będziemy wchodzić w szczegóły, co znaczą poszczególne symbole w tych równaniach. To, co będzie nas interesować, to że występuje w nich matematyczny opis trzech różnych fizycznych obiektów:

$$\underbrace{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R}_{\text{geometria}} + \Lambda g_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}}_{\text{materia}}. \tag{4}$$

Mamy część podpisaną: *geometria,* czyli matematyczny opis mierzenia odległości, upływu czasu i zakrzywienia czasoprzestrzeni. Po prawej stronie mamy część podpisaną: *materia,* czyli matematyczny opis rozkładu materii i energii w czasoprzestrzeni razem z oddziaływaniami innymi niż grawitacyjne (ciśnienie, pole elektromagnetyczne itp.). Mamy wreszcie w środku niepodpisany niepozorny człon, w którym występuje stała Λ zwana *stałą kosmologiczną* – nim zajmiemy się później.

Jeśli na razie zapomnimy o Λ (albo przyjmiemy $\Lambda = 0$), to dostaniemy następujący obrazek: zadany rozkład materii i energii opisany po prawej stronie równań zmusza czasoprzestrzeń do zakrzywiania się, tak aby jej krzywizna spełniała równania Einsteina. Gdy już mamy rozwiązanie, czyli jakąś daną czasoprzestrzeń, to możemy do niej „wpuścić” masę próbną (czyli obiekt o masie zaniedbywalnej w porównaniu z tym, co stoi po prawej stronie równań). Wtedy równania ruchu powiedzą nam, jak taka masa próbna porusza się w tej konkretnej zakrzywionej czasoprzestrzeni. Do opisu zjawisk takich, jak ruch planet wokół Słońca, układy podwójne (gwiazd, gwiazd neutronowych, czarnych dziur), a nawet zlewanie się czarnych dziur i dynamika gwiazd w galaktykach wstawia się do równań Einsteina $\Lambda = 0$, i wszystko się zgadza. Co więcej, do większości zastosowań wystarczy nierelatywistyczne przybliżenie równań Einsteina, jakim jest prawo powszechnego ciążenia Newtona. Nawet jeżeli stała Λ jest różna od zera, to jej wartość jest na tyle mała, że we wszystkich zjawiskach tego typu nie jesteśmy w stanie zaobserwować odstępstwa jej wartości od zera.

O symulowaniu zlewania się czarnych dziur w OTW i pewnych aspektach dynamiki czasoprzestrzeni pisałem w Δ^{12}_{15}. Warto zwrócić uwagę na pewną koincydencję związaną z publikacją tego tekstu. Kończy się on stwierdzeniem: *LIGO przez 8 lat nasłuchiwania (2002–2010) nie zarejestrował promieniowania grawitacyjnego. Być może teraz Advanced LIGO dostarczy tych przełomowych obserwacji, które byłyby kolejnym wielkim sukcesem przewidywań OTW sto lat po jej opublikowaniu.* Tak się składa, że publikacja tekstu (grudzień 2015) miała miejsce już po pierwszej detekcji fal grawitacyjnych (14 września 2015), ale przed oficjalnym ogłoszeniem tego odkrycia (11 lutego 2016). Nasz redakcyjny kolega Michał Bejger (członek konsorcjum LIGO-Virgo) wiedział o wszystkim, ale nie puścił pary z ust.

Po co więc wprowadzać Λ do równań grawitacji, jeżeli doskonale możemy się bez niej obejść? Okazuje się, że jej wartość (choć bardzo mała) staje się istotna, kiedy równań Einsteina używamy do opisu całego Wszechświata. Warto podkreślić, że w równaniach Einsteina występują dwie stałe: stosunek G/c^4 (c to prędkość światła, a G to stała grawitacji) i stała kosmologiczna Λ. Pierwsza z nich, czyli stosunek G/c^4, jest wyznaczana w eksperymentach w skali laboratoryjnej i kosmicznej na wiele różnych sposobów i jej wartość jest znana dosyć dokładnie. Natomiast Λ wyznacza się tak, aby dopasować model całego Wszechświata do obserwacji – nie potrafimy jej zmierzyć w laboratorium czy w skali układu słonecznego. Znaczenie Λ przeanalizujemy dokładniej za miesiąc.

Założenia w modelach kosmologicznych. Równania Einsteina (4) są skomplikowane i trudne do rozwiązywania. Jednak aby stworzyć modele opisujące cały Wszechświat, standardowo przyjmuje się szereg upraszczających założeń dotyczących poszukiwanego rozwiązania. Przede wszystkim zakłada się, że można wprowadzić uniwersalny wspólny dla całego Wszechświata wyróżniony czas. Następnie zakłada się, że czasoprzestrzeń można rozwarstwić na powierzchnie równoczesności względem tego wyróżnionego czasu. Inaczej mówiąc, każdej ustalonej wartości tego czasu odpowiada pewna trójwymiarowa przestrzeń, którą nazywamy właśnie *przestrzenią równoczesności.* Kolejne założenia dotyczą tych przestrzeni. Zakłada się, że te przestrzenie są jednorodne i izotropowe. Inaczej mówiąc, zakłada się, że w danej chwili przestrzeń wygląda w każdym punkcie tak samo: żaden punkt ani żaden kierunek nie jest wyróżniony. Jeżeli przestrzeń ma jakąś niezerową krzywiznę, to ta krzywizna jest taka sama wszędzie. Aby takie założenie miało sens, trzeba również o materii we Wszechświecie założyć, że jest idealnie równomiernie rozłożona, czyli jej gęstość jest stała.

Zasadność wymienionych założeń bywa oczywiście kwestionowana i jest przedmiotem naukowych dyskusji, którymi nie będziemy zajmować się w tym artykule. Zainteresowanych zapraszamy do zajrzenia chociażby do tekstów Andrzeja Krasińskiego w Δ^1_{16} oraz Krzysztofa Turzyńskiego, także w Δ^1_{16}.

Wszystkie te założenia wymagają oczywiście uzasadnienia. Wiemy, że materia nie jest rozłożona we Wszechświecie równomiernie. Istnieją skomplikowane struktury: gwiazdy, galaktyki, gromady galaktyk itp. Jednak z obserwacji astronomicznych nie wynika, aby jakiś kierunek w przestrzeni był wyróżniony

Rozwiązanie zadania M 1736.
Ponumerujmy wiersze i kolumny liczbami od 1 do 15. Jeśli wieże nie atakują się nawzajem, to w każdym wierszu i w każdej kolumnie jest dokładnie jedna wieża, a więc suma współrzędnych wszystkich wież to $2(1 + 2 + \ldots + 15) = 240$.

Gdy wieża zostanie przesunięta ruchem skoczka, suma jej współrzędnych zmienia się o 1 lub 3, czyli zmienia się parzystość tej sumy. Ponieważ liczba wież jest nieparzysta, po ich przesunięciu suma współrzędnych wszystkich wież będzie nieparzysta. Zgodnie z poprzednią obserwacją oznacza to, że pewne dwie wieże muszą się atakować.

albo aby jakiś duży obszar był istotnie gęstszy lub rzadszy niż inne obszary, dlatego przyjmuje się, że w wystarczająco dużej skali uśredniona po dużych obszarach gęstość Wszechświata jest w przybliżeniu stała. Kiedy opisujemy gaz lub ciecz w naczyniu, o których wiemy, że nie są jednorodne, a składają się z cząsteczek, to nie śledzimy ruchów każdej pojedynczej cząsteczki, ale operujemy pojęciami makroskopowymi, takimi jak gęstość, ciśnienie i temperatura. Podobnie postępujemy, gdy opisujemy Wszechświat, traktując galaktyki (lub ich gromady) jako drobiny pyłu rozrzuconego mniej więcej równomiernie.

Założenia te tłumaczymy na język matematyki i wykonujemy odpowiednie podstawienia w równaniach (4). Mamy wyróżniony czas t oraz tzw. *funkcję skali* oznaczaną $a(t)$, która determinuje, w jaki sposób zmieniają się odległości w czasie pomiędzy nieruchomymi punktami w przestrzeni. To, co w równaniu (4) zostało określone mianem „geometria", w konsekwencji przyjętych założeń, zależy tylko od jednej funkcji $a(t)$ i jej pochodnych oraz pewnej stałej, której znaczenie wyjaśnimy za chwilę. Z kolei to, co zostało określone mianem „materia", zależy jedynie od gęstości $\rho(t)$ i ciśnienia $p(t)$, które zależą tylko od czasu t (a nie od współrzędnych przestrzennych, co jest konsekwencją założenia o jednorodności i izotropowości).

Fizycy mają w zwyczaju przestrzeń euklidesową nazywać „płaską", co prowadzi czasem do nieporozumień. W języku fizyków „płaska przestrzeń" to nie płaszczyzna, ale po prostu przestrzeń trójwymiarowa o stałej zerowej krzywiźnie, czyli euklidesowa. „Płaskość" odróżnia ją od przestrzeni o niezerowej krzywiźnie, czyli zakrzywionych.

Jak już wcześniej zostało wspomniane, w każdej chwili przestrzeń ma stałą krzywiznę. Ta krzywizna może być dodatnia – odpowiada to geometrii sfery (w tym wypadku trójwymiarowej, czyli brzegu czterowymiarowej kuli), w której suma kątów w trójkącie jest większa niż 180°. Krzywizna może być ujemna, czyli przestrzeń może być hyperboliczna (żeby lepiej zrozumieć, co to znaczy, warto zajrzeć do dwóch artykułów: Doroty Celińskiej–Kopczyńskiej w Δ^5_{20} oraz Eryka Kopczyńskiego, też w Δ^5_{20}). W takiej przestrzeni suma kątów w trójkącie jest mniejsza niż 180°. Krzywizna może być równa zero, co odpowiada znanej nam ze szkoły geometrii euklidesowej. O tym, z którym przypadkiem mamy do czynienia, decyduje wspomniana wcześniej stała, która razem z funkcją skali $a(t)$ opisuje geometrię. Obserwacje astronomiczne wskazują, że nasza przestrzeń jest w dobrym przybliżeniu euklidesowa, czyli ma krzywiznę zero (lub bardzo bliską zeru). Tak się właśnie przyjmuje w standardowym, używanym obecnie modelu kosmologicznym. Przyjmiemy więc, że stała ta jest równa zero.

Ostatnie uproszczenie, z którego się wytłumaczymy, jest takie: przyjmiemy, że materia wypełniająca Wszechświat zachowuje się jak pył, czyli ciśnienie jest równe zero. Oznacza to, że materia wypełniająca Wszechświat oddziałuje tylko grawitacyjnie. To założenie nie było spełnione we wczesnych etapach ewolucji Wszechświata, kiedy był on gorący i gęsty. Ten etap jest oczywiście trudniejszy do opisania i musimy pamiętać, że równania, które tu się pojawią, nie stosują się do tego początkowego etapu ewolucji Wszechświata.

Bardzo przystępne wyprowadzenie równania Friedmana można znaleźć w klasycznym podręczniku *Wstęp do ogólnej teorii względności* Bernarda F. Schutza.

Równanie Friedmana. Kiedy zrobimy aż tak wiele upraszczających założeń, to nie powinno nikogo dziwić, że opis, który dostajemy, jest bardzo prosty. Równania Einsteina (4) sprowadzają się do jednego zaledwie równania (zwanego równaniem Friedmana):

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(t) + \frac{c^2}{3}\Lambda. \tag{5}$$

Kropka oznacza pochodną po czasie. Iloraz $\dot{a}/a$ tradycyjnie nazywa się parametrem Hubble'a, oznaczanym $H(t)$, a jego interpretację analizowaliśmy miesiąc temu. Jak się za chwilę przekonamy, to, co otrzymujemy, jest łudząco podobne do rozważanych wtedy modelików Wszechświatów mrówek. Tylko poprzednio funkcje $a(t)$ we Wszechświatach Karoliny i Ksymeny były z góry arbitralnie zadane. Tutaj natomiast widzimy, że funkcja skali $a(t)$ jest rozwiązaniem pewnego równania określającego jej dynamikę.

Rozwiązywaniem równania (5) i własnościami pewnych jego rozwiązań (czyli konkretnych funkcji $a(t)$) zajmiemy się za miesiąc. Teraz omówimy ogólne własności, które nie zależą od tego, jaka jest postać czynnika skali $a(t)$. Jak powiązać własności takiego modelu czasoprzestrzeni z naszymi obserwacjami Kosmosu i naszą analizą sprzed miesiąca?

Wyróżniony układ odniesienia. Opisana wcześniej struktura czasoprzestrzeni, rozwarstwionej na euklidesowe przestrzenie numerowane kosmologicznym czasem t, wyróżnia w każdym punkcie pewien układ odniesienia, w którym upływ czasu pokrywa się z tym kosmologicznym. Z lekcji fizyki wiemy, że żaden układ inercjalny nie powinien być wyróżniony, skąd więc mamy wiedzieć, czy np. nasza Galaktyka porusza się, czy spoczywa względem tego wyróżnionego układu odniesienia? Odpowiedzią jest obserwacja kosmicznego promieniowania tła. Jest to promieniowanie dochodzące do nas ze wszystkich stron, wyemitowane niedługo (około 380 000 lat) po Wielkim Wybuchu, a zerejestrowane po raz pierwszy w 1964 roku. Jest to jeden z najważniejszych dowodów eksperymentalnych potwierdzających teorię Wielkiego Wybuchu, jak również źródło informacji o wczesnych etapach ewolucji Wszechświata. Dosyć szybko odkryto, że promieniowanie to nie jest izotropowe, ale jeżeli założy się, że Ziemia (a raczej nasza Galaktyka wraz z całą Grupą Lokalną Galaktyk) porusza się, to można tak dobrać prędkość tego ruchu, aby promieniowanie było izotropowe w układzie, względem którego lecimy z prędkością szacowaną obecnie na około 600 km/s. Jeżeli więc Wszechświat jest jednorodny i izotropowy, to w każdym jego punkcie mamy metodę wyróżnienia układu odniesienia, który spoczywa względem promieniowania tła. Czas, który będziemy mierzyć w tym układzie, będzie właśnie tym kosmologicznym czasem z naszego modelu.

O badaniach kosmicznego promieniowania tła pisaliśmy już w *Delcie* wielokrotnie. Polecamy np. teksty: Pawła Bielewicza, Δ^{10}_{17}, Piotra Zalewskiego, Δ^{9}_{11} i Michała Bejgera, Δ^{3}_{14} i Δ^{7}_{13}.

Prędkość ucieczki. Wyobraźmy sobie, że wyróżniamy dwie odległe od siebie galaktyki. Wiemy już, co to znaczy, że te galaktyki spoczywają – to znaczy, że żadna z nich nie porusza się względem układu odniesienia, w którym promieniowanie tła jest izotropowe. Funkcja skali $a(t)$ mówi nam wtedy, jak zmienia się odległość pomiędzy tymi spoczywającymi galaktykami. Tempo zmiany tej odległości możemy nazwać prędkością, ale musimy podchodzić z pewną ostrożnością do takiego określenia. Czym innym jest prędkość np. jednej galaktyki względem drugiej, wtedy kiedy mijają się w niewielkiej odległości – ta nigdy nie może przekroczyć prędkości światła. Jest to prędkość zdefiniowana lokalnie, do której stosuje się zasady szczególnej teorii względności. Natomiast kiedy mówimy o przyroście odległości pomiędzy obiektami, które dzielą kosmologiczne odległości, to jest to zupełnie inny rodzaj prędkości. Jest to pomiar pewnej *nielokalnej* wielkości, na którą nie ma żadnego fizycznego ograniczenia. Każda z galaktyk spoczywa w pewnym lokalnie określonym układzie odniesienia, a odległość między nimi rośnie na skutek tego, że dzieląca je przestrzeń puchnie. Tempo wzrostu tej odległości może być dowolnie duże, w szczególności większe niż prędkość światła. Nie ma tu jednak żadnej sprzeczności z teorią względności. Obie wyróżnione przez nas galaktyki mają jakieś swoje lokalne otoczenia. Obiekty znajdujące się w każdym z tych małych obszarów mogą poruszać się względem siebie z prędkościami nie większymi niż c, ale odległość między tymi obszarami może zmieniać się dowolnie szybko, pod warunkiem, że obszary te znajdują się wystarczająco daleko od siebie. Prawa szczególnej teorii względności możemy stosować tylko lokalnie. Kiedy rozważamy zdarzenia, które dzieli duża (kosmologiczna) odległość, to musimy stosować opis ogólnej teorii względności, uwzględniający dynamikę samej czasoprzestrzeni.

Galaktyki, które obserwował Edwin Hubble i których prędkość wyznaczył, znajdują się stosunkowo blisko Drogi Mlecznej. Prędkości ucieczki wyznaczone przez Hubble'a są bardzo małe w porównaniu z prędkością światła. Do tej pory astronomowie używają pojęcia *prędkości ucieczki* zazwyczaj w odniesieniu do galaktyk niezbyt odległych od nas. Do charakteryzowania własności obiektów znajdujących się w odległościach kosmologicznych raczej nie używa się prędkości ucieczki, tylko parametru oznaczanego literą z, zwanego *redshiftem*, który ma dużo lepszą interpretację fizyczną i jest bliższy temu, co tak naprawdę się mierzy. O *redshifcie* można przeczytać między innymi w Δ^{4}_{19}. Wrócimy też do tego pojęcia w czwartej części tego cyklu, za dwa miesiące.

Jak to wszystko ma się do mrówek? Szczęśliwie okazuje się, że czasoprzestrzeń rozważana w tych modelach (zwanych modelami FLRW, od nazwisk Friedman–Lemaître–Robertson–Walker) ma stosunkowo prostą strukturę i naiwnie stosowany przez nas opis Wszechświata mrówek z poprzedniej części artykułu działa tutaj bardzo dobrze. W szczególności równania opisujące rozchodzenie się sygnałów świetlnych w czasoprzestrzeni FLRW, wynikające z ogólnej teorii względności, są dokładnie takie same jak te, które „na palcach” wyprowadziliśmy miesiąc temu dla opisu mrówek chodzących po rozciągającej się nici. Opisywane wtedy kwestie, takie jak utrata możliwości komunikowania się pomiędzy oddalającymi się galaktykami, rejestrowanie sygnałów od źródeł oddalających się w tempie szybszym niż prędkość światła czy definicja parametru Hubble'a – cała ta analiza przenosi się bez zmian na modele FLRW.

Za miesiąc omówimy własności pewnych konkretnych rozwiązań równania (5), których używa się do modelowania naszego Wszechświata.

Rozwiązanie zadania M 1737.
Ze zbioru $\mathcal{C}$ wybierzmy dowolny okrąg Ω i przez jego środek O poprowadźmy prostą ℓ, prostopadłą do prostych równoległych z treści zadania. Wiemy, że ℓ przecina jeszcze drugi okrąg z $\mathcal{C}$, który nazwiemy Ω'. Niech P będzie rzutem prostokątnym środka O' okręgu Ω' na prostą ℓ. Ponieważ ℓ i Ω' mają punkt wspólny, to $PO' \leqslant 1$. Z faktu, że Ω i Ω' są rozłączne, wnioskujemy, że $OO' \geqslant 2$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa dostajemy więc

$$PO = \sqrt{OO'^2 - PO'^2} \geqslant \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}.$$

Wobec tego

$$h \geqslant 1 + 1 + PO \geqslant 2 + \sqrt{3}.$$