Wielomiany, logika i geometria

*Lorenzo CLEMENTE**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wszyscy kochamy wielomiany. Celem tego artykułu jest wyjaśnienie, dlaczego. Jako przykład rozważmy rozwiązywalność ogólnego równania wielomianowego drugiego stopnia. W języku logiki zapisujemy to następującą formułą:

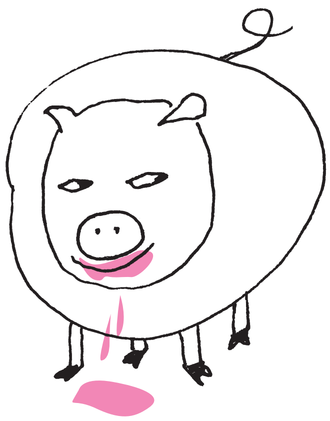
$$\varphi(a,b,c) \;\equiv\; \exists x \in \mathbb{R} : a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0, \tag{1}$$

gdzie „$\exists x \in \mathbb{R}$” nazywamy *kwantyfikatorem egzystencjalnym* i czytamy: „istnieje liczba rzeczywista x taka, że …”. Jak dobrze wiadomo – to, czy formuła (1) jest spełniona, zależy od tego, jakie dokładnie są wartości liczb rzeczywistych a, b, c. Dla niektórych wyborów a, b, c powyższe równanie ma rozwiązanie w $\mathbb{R}$, a dla innych takiego rozwiązania nie ma.

Czy możemy dokładnie scharakteryzować *wszystkie* wartości a, b, c, dla których istnieje $x \in \mathbb{R}$ będący rozwiązaniem? Rzeczywiście możemy, a co więcej – nasz cel można osiągnąć, pozostając w języku wielomianów:

$$\psi(a,b,c) \;\equiv\; (a = 0 \wedge (b \neq 0 \vee c = 0)) \vee (a \neq 0 \wedge 0 \leqslant \underbrace{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}_{\Delta}). \tag{2}$$

Symbol „$\vee$” czytamy jako „lub”, zaś „$\wedge$” czytamy jako „i”. Tak więc (2) mówi, że albo $a = 0$ i gdy $b = 0$, to również $c = 0$ (nieciekawy przypadek brzegowy), albo $a \neq 0$ i w tym przypadku musi być spełniony dobrze znany warunek nieujemności wyróżnika: $\Delta \geqslant 0$. Zauważamy, że nie znajdujemy w ten sposób wartości rozwiązania x jako funkcji zmiennych a, b, c, a tylko warunek istnienia takiego rozwiązania.



Należy poczynić dwie uwagi. Po pierwsze, formuły $\varphi(a,b,c)$ i $\psi(a,b,c)$ są *logicznie równoważne*. To znaczy, że formuła $\forall a,b,c : \varphi(a,b,c) \leftrightarrow \psi(a,b,c)$ jest spełniona w $\mathbb{R}$. Symbol „$\forall$” nazywamy *kwantyfikatorem uniwersalnym* i czytamy: „dla wszystkich”, natomiast „$\leftrightarrow$” czytamy „wtedy i tylko wtedy, gdy”. Innymi słowy, dla każdego wyboru $a, b, c \in \mathbb{R}$ albo $\varphi(a,b,c)$ i $\psi(a,b,c)$ są obie spełnione, albo obie nie są spełnione. Po drugie, $\psi(a,b,c)$ nie mówi już o x, w przeciwieństwie do $\varphi(a,b,c)$. W gruncie rzeczy w $\psi(a,b,c)$ nie ma w ogóle kwantyfikatorów „$\exists$” ani „$\forall$”. Mówimy, że $\psi(a,b,c)$ *nie zawiera kwantyfikatorów* oraz że ψ jest uzyskiwane z φ w procesie *eliminacji kwantyfikatorów.* Musieliśmy jednak zapłacić pewną cenę za usunięcie kwantyfikatora, a mianowicie wprowadziliśmy relację porządku „$\leqslant$” (wcześniej $\varphi(a,b,c)$ używała tylko równości „$=$”).

Możemy teraz się zastanawiać, czy to tylko przypadek. Okazuje się, że nie. Powyższy przykład jest w pewnym sensie szczególnym przypadkiem następującego twierdzenia.

Twierdzenie (Tarski–Seidenberg). *Teoria liczb rzeczywistych pierwszego rzędu* $(\mathbb{R}, +, 0, 1, \cdot, \leqslant)$ *posiada efektywną eliminację kwantyfikatorów.*

Brzmi to dość skomplikowanie! Wyjaśnijmy bardziej szczegółowo. Twierdzenie mówi, że każdą formułę zbudowaną przy użyciu kwantyfikatorów, spójników logicznych „i”, „lub” itp. oraz nierówności postaci $p(x_1, \ldots, x_n) \leqslant q(x_1, \ldots, x_n)$, gdzie p, q są wielomianami zmiennych $x_1, \ldots, x_n$, można efektywnie przekształcić (tzn. istnieje pewien algorytm, który to robi) do równoważnej formuły *bez kwantyfikatorów.*

Piękno i moc tego twierdzenia możemy docenić, stosując je do ogólnego równania stopnia 6:

$$\exists x \in \mathbb{R} : a_6 \cdot x^6 + a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0 = 0.$$

Również w tym przypadku twierdzenie gwarantuje, że istnieje formuła bez kwantyfikatorów ξ zawierająca $a_0, \ldots, a_6$, która dokładnie charakteryzuje, czy istnieje rzeczywiste rozwiązanie. Warto zauważyć, że nie ma sensownego sposobu wyrażenia pierwiastków wielomianów stopnia 6 (a nawet 5) jako funkcji ich współczynników $a_0, \ldots, a_6$ (w przeciwieństwie do wielomianów stopni 1, 2, 3 i 4). Formuła ξ jest dość skomplikowana i zbyt obszerna, aby ją tu zamieścić. Ale istnieje. W rzeczy samej, dla wielomianów dowolnego stopnia n istnieje formuła bez kwantyfikatorów, wyrażająca istnienie $x \in \mathbb{R}$ będącego rozwiązaniem. Powyższe rozważania możemy zakończyć następującym wnioskiem: rozwiązywalność wielomianowych (nie)równości ze współczynnikami

Rozwiązanie zadania F 1066.
Różnica energii kropli wody o promieniu R i takiej samej masy pary wodnej wynosi:

$$\Delta E(R) = 4\pi R^2 \sigma - \frac{4\pi R^3 L\rho}{3\mu}.$$

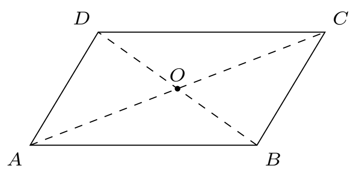
$\Delta E = 0$ dla $R_1 = 0$ i $R_2 = 3\sigma\mu/(L\rho)$. Utworzeniu kropli o promieniu R_2 nie towarzyszy zmiana energii. Zauważmy jednak, że odparowanie kropli oznacza zmniejszanie jej promienia, a pochodna $\Delta E(R)$ względem R jest w R_2 mniejsza od zera, czyli zmniejszanie promienia wymaga dostarczenia energii z otoczenia. Zmniejszaniu promienia kropli towarzyszy oddawanie energii otoczeniu dopiero dla R mniejszego od R_{cr} odpowiadającego maksimum $\Delta E(R)$. Krople o $R < R_{cr}$ odparowują, a te o $R > R_{cr}$ rosną – R_{cr} nazywane jest promieniem krytycznym. Łatwo sprawdzić, że

$$R_{cr} = \frac{2\sigma\mu}{L\rho}.$$

Dla podanych wartości liczbowych (w temperaturze 25°C) $R_{cr} \approx 5{,}9 \cdot 10^{-11}$ m – mniej niż wynoszą rozmiary cząsteczki wody (około $1{,}5 \cdot 10^{-10}$ m). Powstanie takiej kropli nie jest więc możliwe. W tym miejscu Czytelnik Dociekliwy słusznie zauważy, że używaliśmy modelu „makroskopowego”, który nie opisuje tak małych kropli (sytuacji mikroskopowej). Poprawny opis tworzenia i rozpadu najmniejszych kropli polega na analizie zderzeń molekuł gazu (wody i powietrza). W wielu przypadkach opisany tu „klasyczny model nukleacji” nieźle opisuje procesy kondensacji i krystalizacji (tworzenie i wzrost kryształów z fazy ciekłej lub gazowej).

rzeczywistymi może być wyrażona wielomianami zawierającymi tylko te współczynniki. Jest to własność o fundamentalnym znaczeniu, ukazująca samoreferencyjny charakter liczb rzeczywistych.

Możemy zrobić jeszcze więcej. Twierdzenie Tarskiego–Seidenberga otwiera drzwi do *automatycznego dowodzenia twierdzeń geometrycznych*. Pokażemy to na przykładzie. Rozważmy czworokąt $ABCD$.



Jednym z twierdzeń elementarnej geometrii jest to, że

(†) „jeśli AC i BD (linie przerywane) przecinają się w połowie, to $ABCD$ jest równoległobokiem".

Udowodnimy to teraz za pomocą twierdzenia Tarskiego–Seidenberga. Naprawdę! Pomysł polega na przekształceniu powyższego stwierdzenia w formułę logiczną mówiącą o liczbach rzeczywistych. Idąc za przykładem Kartezjusza, reprezentujemy punkt $P \in \{A, B, C, D, O\}$ przez jego współrzędne na płaszczyźnie $(x_P, y_P) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Zacznijmy od prostych obserwacji.

1. Korzystając z twierdzenia Pitagorasa, kwadrat odległości między dwoma punktami P, Q możemy wyrazić jako wielomian:
$$|PQ|^2 \ :\equiv\ (x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2.$$
2. Możemy także wyrazić, że dwa odcinki PQ, RS są równoległe, przyrównując ich nachylenia:
$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{y_S - y_R}{x_S - x_R}.$$
Mnożąc obustronnie przez mianowniki, otrzymujemy równanie wielomianowe:
$$PQ \parallel RS \ :\equiv\ (y_Q - y_P)(x_S - x_R) = (y_S - y_R)(x_Q - x_P).$$
Przy założeniu, że te dwa odcinki są niezdegenerowane, tj. $|PQ| > 0$ i $|RS| > 0$, powyższe równanie jest poprawne również w przypadkach brzegowych:
1) gdy PQ jest pionowe ($x_P = x_Q$), to także RS musi być pionowe ($x_R = x_S$);
2) gdy PQ jest poziome ($y_P = y_Q$), to także RS musi być poziome ($y_R = y_S$).
3. Dla uproszczenia oznaczeń będziemy mówić, że dwa odcinki PQ, RS są *kongruentne*, kiedy mają taką samą długość i są równoległe:
$$PQ \sim RS \ :\equiv\ |PQ| = |RS| \wedge PQ \parallel RS.$$

Łącząc razem kawałki, możemy wyrazić (†) jako następującą formułę logiki nad liczbami rzeczywistymi:

$$\begin{array}{ll} & \forall x_A, y_A, x_B, y_B, x_C, y_C, x_D, y_D, x_O, y_O \in \mathbb{R}: \\ (3) & \underbrace{\varphi_{\text{nietrywialne}} \wedge AO \sim OC \wedge BO \sim OD}_{\text{przesłanka}} \ \rightarrow\ \underbrace{BC \sim AD \wedge AB \sim CD}_{\text{wniosek}}, \end{array}$$

gdzie warunek $\varphi_{\text{nietrywialne}}$ to $|AO|, |BO|, |AB|, |CD|, |AD|, |BC| > 0$. Strzałka „$\rightarrow$" jest czytana „implikuje" i oznacza, że jeśli przesłanka jest prawdziwa, to również wniosek jest prawdziwy. Stało się coś zaskakującego. Stwierdzenie geometrii zostało przekształcone w formułę logiki.

A teraz dzieje się magia. Formuła (3) nie ma parametrów (w przeciwieństwie do (1)), więc korzystając z twierdzenia Tarskiego–Seidenberga, możemy znaleźć równoważną jej formułę φ *bez żadnej zmiennej*. Innymi słowy, φ może składać się tylko z boolowskich kombinacji logicznych formuł atomowych postaci $m \leqslant n$, gdzie m, n są konkretnymi liczbami naturalnymi, np. $5 \leqslant 3$ i $7 \leqslant 23$. To, czy φ jest prawdziwe, można teraz ustalić, po prostu sprawdzając ją bezpośrednio. W omawianym przypadku okazuje się, że φ jest trywialnie prawdziwe, co jest dowodem, że (3) jest prawdziwym twierdzeniem liczb rzeczywistych. Z kolei to pokazuje, że (†) jest prawdziwym twierdzeniem geometrii, co było naszym początkowym celem.

Ten przykład ilustruje, że każde stwierdzenie geometrii, które można wyrazić jako kombinację (nie)równości wielomianowych, można na mocy twierdzenia Tarskiego–Seidenberga sprowadzić do układu nierówności między konkretnymi liczbami naturalnymi. To urzeczywistnienie starego marzenia o zredukowaniu geometrii do kwestii czysto rachunkowej, gdzie intuicja geometryczna nie jest w ogóle potrzebna. A podstawą tego osiągnięcia są wielomiany. Więc kto teraz nie kocha wielomianów?

Rozwiązanie zadania F 1065.
Pęd p_f fotonu o energii E wynosi $p_f = E/c$ (c oznacza prędkość światła). Stosunek podanej w treści zadania energii kinetycznej elektronu do jego energii spoczynkowej ($m_e c^2$) wynosi około $2 \cdot 10^{-9}$. Ze znakomitym przybliżeniem możemy więc opisywać energię kinetyczną elektronu w ramach mechaniki klasycznej:
$$E = \frac{p_e^2}{2m_e} \longrightarrow p_e = \sqrt{2m_e E}.$$
Stosunek pędów wynosi więc:
$$\frac{p_f}{p_e} = \frac{E}{c\sqrt{2m_e E}} = \sqrt{\frac{E}{2m_e c^2}}.$$
Liczbowo: $p_f/p_e \approx 1{,}07 \cdot 10^{-3}$. Podana wartość energii E odpowiada przerwie energetycznej między pasmem walencyjnym i pasmem przewodnictwa w krzemie, a otrzymana wartość stosunku pędów wyjaśnia, dlaczego w półprzewodnikach optyczne wzbudzenie elektronu do pasma przewodnictwa odbywa się praktycznie bez zmiany jego pędu.