



ISSN 663-10-34 p. s. 77-3,141592

NR 1 (584) 2023
CENA 6 ZŁ VAT 8%
PL ISSN 0137-3005 | NR IND 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.deltami.edu.pl

**Modele
Wszechświata
dla początkujących**
str. 1

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

UNIWERSYTET
WARSZAWSKI

ISSN 0137-3005
9 770137 300502 0 1 >

Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 1 (584)

Modele Wszechświata dla
początkujących Część 1: Wędrowki
po rozciągającej się nici
Szymon Charzyński

Matematyka i literatura: J.M. Coetzee
Mirosław Lachowicz

 Zadania

Gwiazdy zombie
Miguel Figueira

O pewnym modelu zawijania białek
*Marcin Wierziński, Karolina L.
Tkaczuk, Alessandro Crimi*

„Wymowne” ciągi
Karol Gryszka

Komentarz do rozwiązania
zadania 1064 z fizyki
Andrzej Majhofer

Nierówność izoperymetryczna
Bartłomiej Bzdęga


O pewnych hipotezach teorii liczb
Witold Bednarek


James Clerk Maxwell i pierścienie
Saturna
Mateusz Dembny

Klub 44

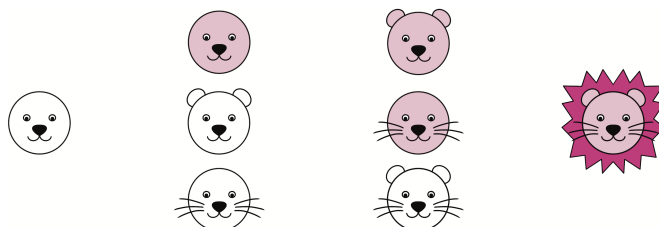
Prosto z nieba:
Czerwone galaktyki spiralne

Niebo w styczniu

 Starość roślin cd.
Magdalena Fikus

 Na biegunach
Bartłomiej Bzdęga

W następnym numerze dowiemy się,
dlaczego lew jest groźny.



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

- str. 1 **Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej,
doc. dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel,
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący,
str. 4 prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski,
dr Tomasz Greczyło, prof. UW, dr Adam Gregosiewicz,
str. 5 dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk,
dr hab. Artur Jeż, prof. UW, dr hab. Bartosz Klin,
str. 6 prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący,
dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński,
prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz,
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak,
str. 8 dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN,
prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

- Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol,
Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac.,
Agnieszka Chudek, Anna Durkalec, Marta Gródek,
str. 10 Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Wojciech Przybyszewski,
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,
Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

- Adres do korespondencji:**
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

- Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

- Prenumerata:**
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

- str. 16 **Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji
osobiście lub zamówić przez e-mail.

- str. 20 Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze
str. 22 egzemplarze 3 zł

- str. 22  Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

- str. 24 Można nas też znaleźć na
facebook.com/Delta.czasopismo

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

str. 25

Modele Wszechświata dla początkujących

Część 1: Wędrowki po rozciągającej się nici

Szymon
CHARZYŃSKI

Katedra Metod Matematycznych Fizyki,
Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Karol Gryszka w artykule „Nieoczekiwane zastosowania szeregu harmonicznego”, opublikowanym w Δ_{19}^7 przedstawił dwa problemy. Jeden z nich dotyczył mrówki idącej po rozciągającej się nici. Okoliczności, w których znalazła się mrówka – dla ustalenia uwagi damy jej na imię Karolina – były następujące. Jeden koniec nici, z którego startowała mrówka, był zamontowany na sztywno (spoczywał), a drugi koniec uciekał ze stałą prędkością, przy czym nić rozciągała się równomiernie na całej długości. Eleganckie, przedstawione dwiema metodami rozwiązanie (przypadek dyskretny i ciągły) nie pozostawia żadnych niedomówień: niezależnie od tego, z jaką prędkością idzie mrówka i jak szybko ucieka koniec nici, Karolinie **zawsze** uda się dojść na drugi koniec nici, jeśli tylko damy jej wystarczająco dużo czasu. Artykuł zakończył się optymistycznym przesłaniem, że w rozszerzającym się zgodnie z prawem Hubble’a–Lemaître’a Wszechświecie możemy dotrzeć do dowolnego punktu, o ile będziemy mieli wystarczająco dużo czasu.

Czy na pewno jest aż tak różowo? Aby się o tym przekonać, zbadamy prosty model innego Wszechświata niż ten modelowany przez nić mrówki Karoliny.

Rozważmy podobny, ale nieco odmienny problem. Druga mrówka, o imieniu Ksymena, również będzie szła po rozciągającej się nici. Jednak tym razem reguły zabawy będą trochę inne. Znowu rozwiążemy zadanie na dwa sposoby. Zaczniemy od dyskretnej wersji, której sformułowanie jest następujące.

Zadanie 1. Mrówka Ksymena porusza się ze stałą prędkością $1 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. W chwili początkowej mrówka znajduje się na zamocowanym na sztywno początku nici o długości 1 m, a jej celem jest drugi uciekający koniec. Co sekundę cała nić rozciąga się równomiernie na całej długości o czynnik $\frac{11}{10}$, czyli w kolejnych chwilach długość nici jest równa 100 cm, 110 cm, 121 cm, 133,1 cm... Czy Ksymenie uda się dojść na drugi koniec nici?

Przypomnijmy, że Karolina szła z tą samą prędkością, ale jej nić na początku miała 1 km długości i co sekundę wydłużała się o 1 km. Mimo wszystko Karolinie się udało, a czy tak samo poradzi sobie Ksymena?

Rozwiązanie zadania 1. Rozważmy od razu przypadek ogólny. Oznaczmy przez s początkową długość nici, a przez v prędkość Ksymeny. Nić będzie się wydłużać w równych odstępach czasu Δt o czynnik $q > 1$. Ponieważ prędkość mrówki jest stała, to pomiędzy rozszerzeniami nici mrówka pokona zawsze odcinek tej samej długości, równej $v \cdot \Delta t$. Jeżeli chcemy wiedzieć, jaką część nici przejdzie mrówka po czasie $k \cdot \Delta t$, to musimy obliczyć następującą sumę:

$$f(k) = \frac{v\Delta t}{s} + \frac{v\Delta t}{qs} + \frac{v\Delta t}{q^2s} + \dots + \frac{v\Delta t}{q^{k-1}s}.$$

W mianownikach składników powyższej sumy mamy za każdym razem aktualną długość nici, a licznik jest stały. Nietrudno zauważyć, że jest to suma szeregu geometrycznego, na którą znamy ogólny wzór:

$$f(k) = \frac{v\Delta t}{s} \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \dots + \frac{1}{q^{k-1}} \right) = \frac{v\Delta t}{s} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^k}{1 - \frac{1}{q}}.$$

Pytanie o to, czy Ksymena dojdzie do końca nici, jest równoważne pytaniu, czy istnieje k , dla którego $f(k) \geq 1$. Ponieważ $q > 1$, to $\frac{1}{q} < 1$, i możemy przejść z k do nieskończoności, otrzymując skończoną sumę, którą oznaczmy $f(\infty) = \frac{v\Delta t}{s} \cdot \frac{q}{q-1}$, przy czym jest oczywiste, że $f(k) < f(\infty)$ dla dowolnego k . Dla danych z zadania 1 dostajemy wynik $f(\infty) = 11/100$, czyli mrówka nie ma szans dotrzeć na drugi koniec nici. Co więcej, obliczyliśmy, że nie ma szans pokonać więcej niż 11% nici.

Rozwiążemy teraz wersję problemu z ciągłym czasem. Nadal chcemy, żeby po upływie czasu Δt nić wydłużała się o czynnik q , ale żeby rozciąganie było rozłożone w czasie, a nie skokowe. Naturalnym rozwiązaniem jest przyjęcie, że zależność długości nici od czasu jest dana wzorem $sq^{t/\Delta t}$. Możemy tę samą zależność zapisać również w postaci se^{Ht} , która jest wygodniejsza, bo występuje w niej tylko jedna stała $H = \frac{\ln q}{\Delta t}$ (zamiast dwóch q i Δt), i łatwiej się tę postać różniczkuje (a bez różniczkowania w przypadku ciągłym się nie obejdzie). Wiemy już, że mrówka może nie dotrzeć na drugi koniec, sformułujemy więc problem bardziej ogólnie.

Zadanie 2. Mrówka Ksymena wyrusza ze stałą prędkością v z jednego końca nici, która rozciąga się równomiernie na całej długości, przy czym zależność długości nici od czasu jest dana wzorem se^{Ht} , gdzie s to początkowa długość nici. Jaka może być maksymalna długość nici, aby mrówka dotarła na jej drugi koniec?

Rozwiązanie zadania 2. Wprowadźmy oznaczenie $a(t) = e^{Ht}$. Jeżeli odległość jakiegoś punktu na nici do końca, z którego startuje mrówka, wynosi w chwili początkowej $x(0)$, to jego odległość w chwili t wynosi $x(t) = x(0)a(t)$. Taki punkt oddala się od nieruchomego końca nici z prędkością $x(0)\dot{a}(t)$, gdzie „kropka” oznacza pochodną po czasie. Z jaką prędkością Ksymena oddala się od nieruchomego końca nici, kiedy znajduje się w punkcie $x(t)$? Do prędkości, z jaką ten punkt jest „unoszony” przez rozciąganie nici, czyli $x(0)\dot{a}(t)$, należy dodać własną prędkość mrówki względem nici, czyli v . W ten sposób otrzymujemy zależność:

$$\dot{x}(t) = x(0)\dot{a}(t) + v,$$

gdzie $\dot{x}(t)$ oznacza właśnie prędkość, z jaką Ksymena się porusza, kiedy znajduje się w punkcie $x(t)$. Dokonując podstawienia $x(0) = x(t)/a(t)$, otrzymujemy:

$$(1) \quad \dot{x}(t) = x(t) \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + v.$$

Ponieważ $a(t) = e^{Ht}$, to $\dot{a}(t)/a(t) = H$, i ostatecznie dostajemy równanie ruchu mrówki w postaci:

$$\dot{x}(t) = Hx(t) + v.$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach, co dla Czytelników Zaznajomionych z równaniami różniczkowymi oznacza „równanie bardzo łatwe do rozwiązania”. Jego rozwiązaniem (co Czytelnik Dociekliwy może łatwo sprawdzić) jest funkcja:

$$(2) \quad x(t) = Ce^{Ht} - \frac{v}{H},$$

gdzie C jest dowolną stałą, którą wyznaczamy, żądając, aby spełniony był warunek początkowy $x(0) = 0$.

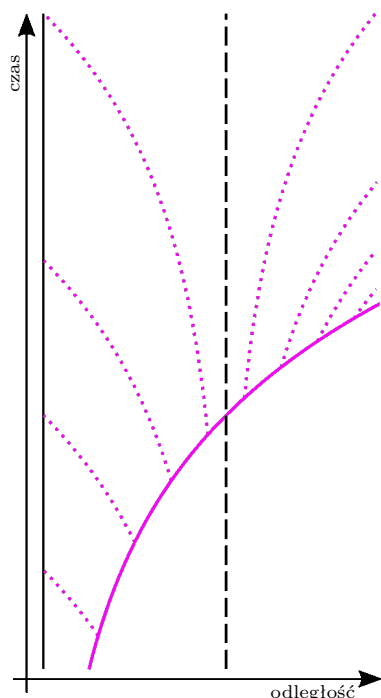
Dzięki temu zabiegowi otrzymujemy ostateczny wynik:

$$x(t) = \frac{v}{H} (e^{Ht} - 1).$$

Znaleziona funkcja $x(t)$ mówi nam, jak daleko od początku nici jest Ksymena w chwili t . Żeby wiedzieć, czy doszła do końca nici, musimy tę odległość porównać z długością nici w chwili t , która wynosi $sa(t)$. Jeżeli istnieje t , dla którego stosunek tych dwóch odległości jest większy od 1, to mrówka dojdzie do końca nici. Czyli sprawdzamy, czy spełniony jest warunek:

$$1 \leq \frac{x(t)}{sa(t)} = \frac{v}{sH} (1 - e^{-Ht}).$$

Wyrażenie w nawiasie jest zawsze mniejsze od 1, a dobierając odpowiednio t , możemy uczynić je dowolnie bliskim 1. Aby więc istniało t , dla którego nierówność jest spełniona, musi zachodzić warunek: $s < v/H$. Czyli w przypadku ciągłym mrówka również ma „skończony zasięg”.



Rys. 1. Ciągła czarna linia po lewej stronie wykresu przedstawia położenie mrówki Ksymeny w zależności od czasu – mrówka spoczywa, więc linia jest równoległa do osi czasu. Czarną linią przerywaną oznaczono sferę Hubble’a – galaktyki na lewo od tej linii oddalają się od Ksymeny wolniej niż c , a na prawo szybciej. Ciągła kolorowa linia przedstawia trajektorię pewnej galaktyki, która początkowo znajduje się wewnątrz sfery Hubble’a, a w pewnym momencie ją opuszcza. Liniami kropkowanymi narysowane są przykładowe trajektorie fotonów wysłanych z tej galaktyki w różnych chwilach czasu. Widać, że fotony wysłane z wnętrza sfery Hubble’a docierają do Ksymeny, a te wysłane z zewnątrz oddalają się coraz szybciej, pomimo że zostały wysłane w lewo, czyli w stronę Ksymeny. Wszystkie krzywe przedstawione na rysunku są wykresami funkcji (2) z odpowiednio dobranymi parametrami C i v .

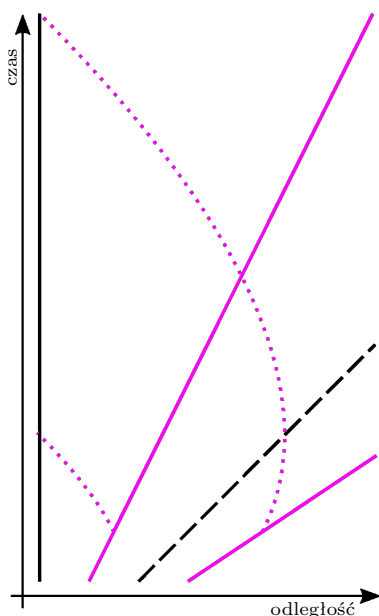
Czym się różnią Wszechświaty Karoliny i Ksymeny? Wyobraźmy sobie, że te rozciągające się nici to modele pewnego jednowymiarowego Wszechświata, w którym żyją nasze mrówki. Wszechświaty te mogą być nieskończone, a parametr s występujący w zadaniach może oznaczać odległość pomiędzy jakimiś obiektami (np. galaktykami) w pewnej ustalonej chwili czasu. Oba Wszechświaty się rozszerzają. Jednak Karolina może dojść do dowolnego punktu w swoim Wszechświecie (do dowolnie dalekiej galaktyki), a Ksymena może odwiedzić tylko pewną jego część – reszta jest dla niej niedostępna. We Wszechświecie Ksymeny galaktyka, która w jakiejś chwili znajduje się dalej niż v/H , jest poza jej zasięgiem. Jeżeli za v podstawimy prędkość światła c , to sygnał, jaki Ksymena wyśle z prędkością c w chwili, w której jest ona dalej niż c/H , nigdy do tej galaktyki nie dotrze i odwrotnie: sygnał wysłany w tej chwili z tamtej odległej galaktyki nigdy nie dotrze do Ksymeny.

We Wszechświecie Ksymeny obowiązuje więc ciekawe prawo: w chwili gdy obiekt znajdzie się dalej niż c/H , tracimy z nim kontakt na zawsze. W tym momencie prędkość, z jaką jest on unoszony przez rozszerzający się Wszechświat, wynosi c . Czyli we Wszechświecie Ksymeny utrata szansy na kontakt zachodzi w chwili, w której prędkość ucieczki związana z rozszerzaniem się Wszechświata przekracza c . Zauważmy też, że funkcja $a(t) = e^{Ht}$ ma tę własność, że jeżeli będziemy się cofać w czasie, to nawet jeżeli aktualnie jakiś obiekt jest od nas bardzo daleko (dużo dalej niż c/H), to istnieje taka chwila w przeszłości, w której był bliżej. Sygnał wtedy wysłany mógł do nas dotrzeć. Widzimy więc ciekawą własność tego Wszechświata: galaktyki, które kiedyś Ksymena mogła obserwować, po pewnym czasie przestają być dla niej widoczne. Im dłużej Ksymena obserwuje swój Wszechświat, tym mniejszą część galaktyk widzi – kolejne galaktyki opuszczają obserwowalną dla niej część Wszechświata (rys. 1).

We Wszechświecie Karoliny jest zupełnie inaczej. Wiemy już, że poruszając się z dowolnie małą prędkością, może zejść dowolnie daleko. Oznacza to również, że sygnał wysłany z galaktyki znajdującej się dowolnie daleko dotrze do Karoliny, jeżeli tylko poczeka ona dostatecznie długo. Czyli jeżeli jest jakaś odległa galaktyka, której Karolina nie widzi, to prędzej czy później ją zobaczy. Część Wszechświata dostępna jej obserwacjom z czasem staje się coraz większa. Co więcej, to, czy Karolina zobaczy daną galaktykę, nie zależy od relacji prędkości, z jaką ucieka dana galaktyka, do prędkości światła. Sygnał wysłany z galaktyki oddalającej się z prędkością większą od c dotrze do Karoliny!

Jak to jest możliwe? Jakim sposobem Karolina może zobaczyć galaktykę uciekającą szybciej od światła? Moglibyśmy poprzestać na odpowiedzi, że wynika to wprost z równań wyprowadzonych przez Karola Gryszkę w Δ_{19}^7 , ale spróbujemy przyjrzeć się bliżej rozwiązaniu tego pozornego paradoksu.

We Wszechświecie Karoliny, podobnie jak we Wszechświecie Ksymeny, możemy wprowadzić funkcję $a(t)$, która mówi nam, jak skalują się odległości w miarę



Rys. 2. Ciągła czarna linia po lewej stronie wykresu przedstawia położenie mrówki Karoliny. Czarną linią przerywaną oznaczono sferę Hubble'a – galaktyki na lewo od tej linii oddalają się wolniej niż c , a na prawo szybciej. Promień tej sfery rośnie z prędkością światła. Ciągłe kolorowe linie przedstawiają przykładowe trajektorie dwóch galaktyk: jedna (po lewej) znajduje się wewnątrz sfery Hubble'a, a druga (po prawej) na zewnątrz. Linie kropkowane przedstawiają trajektorie fotonów wysłanych w lewo (do Karoliny) w tej samej chwili czasu przez obie galaktyki. Widać, że foton wysłany przez galaktykę spoza sfery Hubble'a (oddalającą się od Karoliny z prędkością $3/2c$) początkowo oddala się od Karoliny, ale w pewnym momencie sfera Hubble'a go „dogania” i od tej chwili zaczyna się zbliżać do Karoliny. Wszystkie krzywe na rysunku są wykresami rozwiązania ogólnego przedstawionego przez Karola Gryszkę w Δ_{19}^7 z odpowiednio dobranymi stałymi.

rozciągania się Wszechświata. Tutaj będzie to $a(t) = 1 + ut$. Jeżeli odległa galaktyka (ta na końcu nici) w chwili $t = 0$ znajduje się w odległości s od Karoliny, to zależność odległości od czasu ma postać $s \cdot a(t) = s + sut$, czyli galaktyka oddala się ze stałą prędkością su , tak jak było w treści zadania. Zastanówmy się teraz, jaka jest odległość $r(t)$ do punktu na nici (galaktyki we Wszechświecie), który oddala się od Karoliny z prędkością c . Żeby na nie odpowiedzieć, wystarczy do równania (1) podstawić $\dot{x}(t) = c$, $x(t) = r(t)$, $v = 0$ oraz $a(t) = 1 + ut$. Rozwiązaniem jest $r(t) = c \frac{a(t)}{\dot{a}(t)} = c \left(\frac{1}{u} + t \right)$, czyli brzeg obszaru, wewnątrz którego galaktyki uciekają wolniej niż c , oddala się od Karoliny z prędkością c (dla porównania, we Wszechświecie Ksymeny odległość ta była stała i wynosiła c/H). Obszar ten w kosmologii nazywany jest *objętością Hubble'a*, a jego brzeg to *sfera Hubble'a*. Rozwiązanie naszego paradoksu przedstawia rysunek 2. Foton wysłany przez galaktykę poza sferą Hubble'a początkowo oddala się od Karoliny, ale w pewnym momencie rozszerzająca się sfera Hubble'a go dogania i do tej chwili foton zbliża się już do Karoliny i w skończonym czasie do niej dotrze.

Widzimy więc, że we Wszechświecie Ksymeny objętość Hubble'a pokrywa się z tym, co nazywa ona obserwowalną częścią Wszechświata, natomiast we Wszechświecie Karoliny ta obserwowalna część jest większa od objętości Hubble'a. Nie należy więc mylić tych dwóch pojęć (co niestety często ma miejsce w tekstach popularnonaukowych). Odległość, w jakiej znajdują się galaktyki uciekające z prędkością światła, nie wyznacza krańca obserwowalnego Wszechświata. Na przykładzie Wszechświata Karoliny widzimy, że (w pewnych sytuacjach) możliwe jest obserwowanie w teleskopach galaktyk, które oddalają się od nas szybciej niż światło (nawet takich, które zawsze oddalały się od nas szybciej niż światło).

Parametr Hubble'a. W naszych rozważaniach wygodne okazało się wprowadzenie czynnika $a(t)$, który ma różną formę w obu Wszechświatach, ale pełni tę samą funkcję – mówi, jak skalują się odległości w miarę upływu czasu. Zauważmy, że kilka razy pojawił się nam również stosunek $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, który we Wszechświecie Ksymeny jest stały i wynosi H , a we Wszechświecie Karoliny zależy od czasu. Ten współczynnik pozwalał nam obliczyć, jaka jest prędkość galaktyki (punktu na nici) oddalonej w danej chwili o x . Ta prędkość wynosi po prostu $x \cdot \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. Wprowadzamy więc parametr $H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, nazwiemy go *parametrem Hubble'a*. W obu Wszechświatach obowiązuje tzw. *prawo Hubble'a-Lemaître'a*, które mówi, że prędkość ucieczki galaktyk jest proporcjonalna do odległości. Jednak tylko we Wszechświecie Ksymeny współczynnik tej proporcjonalności $H(t)$ jest stały w czasie, natomiast we Wszechświecie Karoliny maleje z czasem, dążąc do zera w granicy przy $t \rightarrow \infty$.

A co z teorią względności? Ktoś może się czuć zaniepokojony beztróską, z jaką opisujemy galaktyki uciekające szybciej niż światło, i powziąć podejrzenie, że ta cała paplanina ma się nijak do prawdziwego Wszechświata, w którym żyjemy. Słusznie może podnieść zarzut, że szczególnie teoria względności zabrania przekraczania prędkości światła. Okazuje się jednak, że jeżeli do modelowania Wszechświata używamy pojęcia (takie jak „prędkość ucieczki”), to żadnej sprzeczności nie ma. Będzie to temat kolejnego artykułu, który ukaże się za miesiąc. Przekonamy się, że modele opisujące nasz Wszechświat mają pewne cechy wspólne z obydwojema przedstawionymi tutaj prostymi modelikami. Z jednej strony, rzeczywiście jest tak, że w naszych teleskopach obserwujemy galaktyki, które oddalają się od nas z prędkością większą od prędkości światła (tak jak we Wszechświecie Karoliny). To między innymi dzięki temu możemy zobaczyć zdarzenie odległe od nas o 17 miliardów lat świetlnych, o którym pisał Michał Bejger w Δ_{20}^{10} , mimo że nasz Wszechświat istnieje dopiero 13,8 miliarda lat. Z drugiej strony, powszechnie akceptowany obecnie model naszego Wszechświata przewiduje, że podobnie jak to ma miejsce we Wszechświecie Ksymeny, nigdy nie będziemy mogli zobaczyć całego Wszechświata, a co więcej, ta jego część dostępna naszym obserwacjom ciągle się kurczy. Co chwilę jakaś odległa galaktyka bezpowrotnie opuszcza obszar dostępny naszym obserwacjom.

GDZIE
TEN
KONIEC ?

Matematyka i literatura: J.M. Coetzee

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Miroslaw LACHOWICZ*

John Maxwell Coetzee (wymowa w języku polskim, zbliżona do afrikaans: [kats-ia]) urodził się w 1940 roku w Kapsztadzie (RPA). Jego matka była nauczycielką, a ojciec prawnikiem i hodowcą owiec na Karru. W domu Coetzee mówił po angielsku, ale z dalszą rodziną rozmawiał w afrikaans – jest to mieszanka holenderskiego, malajskiego, portugalskiego, angielskiego, francuskiego oraz języków bantu; język ten ma swój pomnik w Paarl. Rodzina wywodzi się z osadników holenderskich, którzy przybyli do Afryki Południowej w XVII wieku. Coetzee ma też polskie korzenie (od strony matki) – jego pradziadek Baltazar (lub Balcer) Dubiel był polskim imigrantem, pochodził ze wsi Czarnylas w powiecie ostrowskim, w województwie wielkopolskim.

J.M. Coetzee został laureatem Literackiej Nagrody Nobla w 2003 roku za prozę cechującą się analityczną błyskotliwością i wymownymi dialogami. Według Wikipedii: „Autor prozy psychologicznej, silnie inspirowanej egzystencjalizmem, nieraz bywa porównywany z Gabrielem Garcíą Márquezem

i Josephem Conradem. W twórczości skupia się na portretach samotników oraz ludzi uwikłanych w przemiany społeczno-gospodarcze i polityczne”. Coetzee jest uważany za jednego z najważniejszych żyjących pisarzy piszących w języku angielskim.

Opuścił Kapsztad w roku 1962, planując *być matematykiem w dzień i poetą w nocy*. W Kapsztadzie kończył bowiem studia z literatury angielskiej (1960) i matematyki (1961). W matematyce najbardziej lubił teorię liczb i teorię prawdopodobieństwa, jak stwierdził w wywiadzie przeprowadzonym przez P.G. Odifreddiego w 2004 roku (w serwisie Polymath). W Londynie, do którego się przeniósł, działalność dzienna bardziej go pochłaniała niż działalność nocna (o której, zresztą, nie mamy informacji). Pracował jako programista przez 3 lata, w tym przez rok w IBM. Eksperymentował wtedy z poezją komputerową. We wspomnianym wywiadzie stwierdził, że były to lata stracone, ale nauczyły go umiejętności koncentracji. Na swoim biurku w IBM, podobnie jak inni pracownicy, miał napis: „THINK!” (w sensie „myśl! myśl!...”).

Swoje wspomnienia z tamtych czasów umieścił w drugim tomie książki autobiograficznej [1]. To opowieść o młodym człowieku (jest nim sam Coetzee), który podejmuje decyzję o swojej dalszej drodze życia.

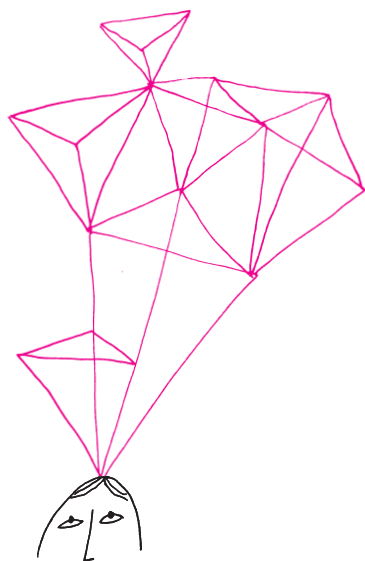
Niejednoznaczna powieść J.M. Coetzeego *Schooldays of Jesus* (2016) można odnieść do pytania o znalezienie właściwej drogi edukacji. W powieści można odkryć dwa modele nauczania (por. [3]). Pierwszy to standardowa intelektualna forma – poprzez abstrakcję. Drugi jest dość dziwną i intuicyjną formą poznania w ramach Akademii Tańca, w której *liczby wywołuje się z gwiazd* za pomocą tańca. Ta druga droga jest mniej określona i nie wiadomo, czy po prostu nie jest mistyfikacją. W każdym razie ociera się o tajemnicę. Sześciolatek bohater książki David stwierdza: *Tańczenie jest tym samym, co liczenie* [2, s. 76].

Warto zwrócić uwagę na fragment [2, s. 35–41]. Mamy tu opis lekcji liczb, poprzez podejście abstrakcyjne, jakiej udziela señor Robles małemu Davidowi: *[...] każda liczba jest nazwą własności wspólnej dla pewnych zbiorów i przedmiotów na świecie* [2, s. 36]. David całkowicie odrzuca podejście señora Roblesa: *Bo stosując jego sposób, trzeba najpierw zrobić się bardzo małym. Małym jak ziarno grochu, a potem jak ziarno wewnątrz ziarnka, a jeszcze potem jak ziarno wewnątrz ziarnka wewnątrz ziarnka* [2, s. 42].

Davidem opiekują się Inés i Simón, którzy są uchodźcami w nowym, niezidentyfikowanym, hiszpańskojęzycznym kraju. Tak jak w przypadku Jezusa, wydaje się, że przed czymś się ukrywają i unikają kontaktu z władzami (por. [3]).

Jeśli są ścigani przez prawo, to powinni postępować roztropnie. Ale czy rzeczywiście są ścigani? Czy mają powód, aby obawiać się pościgu? Czy prawo dysponuje aż tyloma środkami, żeby w pogoni za sześciolatnim wagarowiczem rozsyłać funkcjonariuszy do najdalszych zakątków kraju? [...] Co jednak, jeśli celem pogoni nie jest wagarujące dziecko, lecz dwoje ludzi, którzy – fałszywie utrzymując, że są jego rodzicami – nie puszczają go do szkoły? [2, s. 11–12].

Ewentualne odniesienia do Biblii, sugerowane przez tytuł, są jednak raczej niebezpośrednie. Wzruszającą postacią jest Simón (Józef?) opiekujący się małym Davidem, choć nie jest jego ojcem, co mały mu często wypomina. Simón mówi o Davidzie: *Jest pewny siebie, ale ta pewność nie zawsze ma uzasadnienie [...]. Wydaje mu się, że posiada moce, których tak naprawdę nie ma. Jest jeszcze*



- [1] J.M. Coetzee, *Youth: Scenes from Provincial Life II*, 2002; polskie wydanie: *Młodość*, tłum. Michał Kłobukowski, Znak, 2007.
- [2] J.M. Coetzee, *Schooldays of Jesus*, Harvill Secker 2016; polskie tłumaczenie: *Lata szkolne Jezusa*, tłum. M. Godyń, Znak, 2018.
- [3] Emma Williams *Morals to Maths: Coetzee, Plato and the Fiction of Education*, British Journal of Educational Studies, 67:3, 371–387.
- [4] Peter Johnston, *Presences of the Infinite: J.M. Coetzee and Mathematics*, PhD Thesis, Royal Holloway, University of London, 2013.
- [5] Baylee Brits, *Mathematics and Modernism: Jorge Luis Borges, Samuel Beckett and J.M. Coetzee*, PhD, Faculty of Arts, University of New South Wales, 2015.
- [6] J.M. Coetzee, *Doubling the Point: Essays and Interviews*, D. Attwell (edytor), Harward Univ. Press, 1992.

bardzo młody [2, s. 88]. Simón wyraźnie patrzy na przywoływanie liczb z gwiazd za pomocą tańca jako dziwne i nawet niebezpieczne. *Inés, czy jesteś pewna, że dobrze robimy? – pyta. – Czy nie powinniśmy raczej rozejrzeć się za szkołą, która byłaby mniej eksperymentalna?* [2, s. 90].

We wspomnianym wywiadzie Coetzee stwierdził, że matematyka jest tworzona przez umysł ludzki, ale historia matematyki pokazuje, że to, co może wydać się aktem swobodnego tworzenia, następnie znajduje zastosowanie do opisu rzeczywistości, czyli innymi słowy, wydaje się, że istnieje głęboka zgodność wyborów rozumu i struktury świata.

Związkom pisarstwa Coetzeego z matematyką poświęcone są doktoraty P. Johnstona [4] i B. Brits [5] (rozdział IV), oba dostępne w Internecie.

W [6] Coetzee zadaje pytanie, dlaczego istnieje związek (używa słowa *homology*) pomiędzy operacjami matematyką na kartce papieru a operacjami w niebiosach (chodzi o teorię grawitacji Newtona). Dlaczego Wszechświat zachowuje się tak, jak matematyka przewiduje, że powinien się zachowywać? Zadaje pytanie, czy my wiemy naprawdę, jak zachowuje się Wszechświat. Być może to zachowanie jest bardziej odległe naszym umysłem niż nasza matematyka. *Matematyka [...] równie dobrze może być prywatnym językiem, zastrzeżonym dla ludzkich istot o ludzkich mózgach, w którym coś bazgrzemy po ścianach swojej jaskini.*

Należy pamiętać, że jest to pytanie człowieka, który odszedł od matematyki, a swoje doświadczenia miał zapewne wyłącznie z matematyką teoretyczną. Nie wydaje się, by Coetzee (poza pracą jako programista w IBM) miał kontakt z matematyką stosowaną!

Przygotował Dominik BUREK



Zadania

M 1732. Liczby rzeczywiste $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$ są takie, że liczby $\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_2+x_3}{2}, \dots, \frac{x_{2022}+x_1}{2}$ tworzą permutację liczb $x_1, x_2, \dots, x_{2022}$. Udowodnić, że $x_1 = x_2 = \dots = x_{2022}$.

Rozwiązanie na str. 7

M 1733. Niech p_n oznacza n -tą liczbę pierwszą. Liczby pierwsze $2, 3, 5, \dots, p_n$ podzielono na dwa zbiory i obliczono iloczyn liczb w każdym zbiorze, otrzymując liczby a oraz b (gdy jeden ze zbiorów jest pusty, iloczyn jest równy 1). Udowodnić, że jeśli $a + b < p_{n+1}^2$, to $a + b$ jest liczbą pierwszą.

Rozwiązanie na str. 8

M 1734. Rozważmy ciągi długości $2n + 1$ (gdzie n jest liczbą całkowitą dodatnią) składające się z samych zer i jedynek. Jaką część wszystkich tych ciągów stanowią ciągi, w których jedynka ma więcej wystąpień wśród ostatnich $n + 1$ wyrazów niż wśród pierwszych n ?

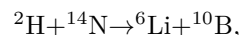
Rozwiązanie na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1063. Spoczywający mezon K^+ o masie spoczynkowej $m = 494 \text{ MeV}/c^2$ rozpada się na parę mezonów: π^+ o masie spoczynkowej $m_1 = 140 \text{ MeV}/c^2$ i π^0 o masie spoczynkowej $m_2 = 135 \text{ MeV}/c^2$. Znajdź wartości energii całkowitych E_1 i E_2 mezonów π^+ i π^0 utworzonych w takim rozpadzie.

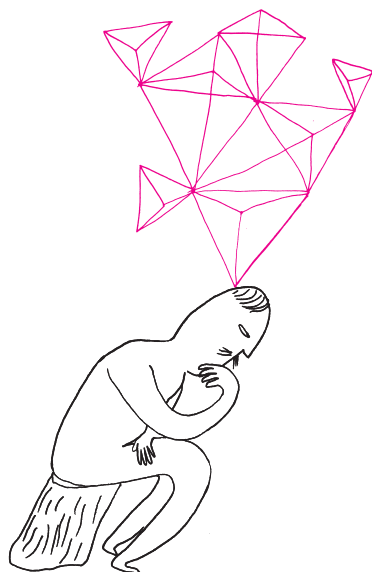
Rozwiązanie na str. 19

F 1064. Rozpatrzmy endotermiczną reakcję jądrową:



której ciepło wynosi $Q = -10,1 \text{ MeV}$. Jeśli w laboratorium deuteron ${}^2\text{H}$ zderza się ze spoczywającym jądrem ${}^{14}\text{N}$, to jaką minimalną energię kinetyczną, E_k , musi mieć deuteron ${}^2\text{H}$, by ta reakcja mogła zachodzić? W obliczeniach należy przyjąć, że masa jądra o liczbie masowej A jest równa $A \cdot u$, przy czym jednostka masy atomowej $u \approx 931 \text{ MeV}/c^2$.

Rozwiązanie na str. 9



* Narodowe Centrum Badań Jądrowych

M_{\odot} to masa Słońca wynosząca $1,998 \times 10^{30}$ kg.

Mgławica planetarna nie ma nic wspólnego z planetami. To chmura pyłu i gazu powstała po odrzuceniu przez będącą u schyłku życia gwiazdę zewnętrznych warstw wodoru. W jej centrum zazwyczaj znajduje się biały karzeł. Skąd więc ta myląca nazwa? Określenie mgławica planetarna to pozostałość historyczna. Dawniej astronomowie obserwując okrągły kształt takich mgławic, porównywali je do planet.

Granica Chandrasekhara $M_{Ch} = 1,44M_{\odot}$ to maksymalna masa białego karła. Po przekroczeniu tej masy biały karzeł zapada się pod własnym ciężarem i wybucha jako supernowa typu Ia.

O supernowych wielokrotnie pisaliśmy na łamach *Delty*. Na przykład w artykułach *Podglądanie supernowej Δ_{19}^4* i *Supernowe typu Ia Δ_{12}^1* .

Krzywa zmian blasku opisuje obserwowane zmiany jasności obiektu, np. gwiazdy, wraz z upływającym czasem.

Supernowa typu II to etap ewolucji gwiazd o masie większej niż $9M_{\odot}$.

Rozwiązanie zagadki ze strony 10: Trzy kolejne wyrazy podanego ciągu to: 16, 22, 30. Każdy wyraz tego ciągu to kolejna liczba naturalna zapisana w cyklicznie zmieniającym się systemie pozycyjnym od dziesiątego przez dziewiątkowy i tak dalej aż do dwójkowego.

Mimo że gwiazdy wydają się wieczne, to jednak ich życie kończy się wraz z ustaniem reakcji termojądrowych. Przyczyna śmierci jest zwykle taka sama, ale to, w jaki sposób gwiazda umiera, zależy od jej masy. W przypadku mało masywnych gwiazd ($M \leq 8M_{\odot}$) reakcje termojądrowe zanikają, gdy węgiel i tlen zaczynają dominować w jądrze gwiazdy. Wówczas taka gwiazda odrzuca wodorową otoczkę, tworząc mgławicę planetarną. Wewnątrz pozostaje martwe jądro gwiazdy nazywane „białym karłem”. W przypadku masywnych obiektów ($M \geq 8M_{\odot}$) reakcje termojądrowe zachodzą aż do momentu powstania jądra zbudowanego z żelaza. Następnie gwiazda zapada się pod własnym ciężarem i wybucha jako supernowa, pozostawiając po sobie gwiazdę neutronową albo czarną dziurę.

Nierzadko gwiazdy rodzą się w parach i żyją razem aż do śmierci. Takie układy nazywamy układami podwójnymi gwiazd. Mogą je tworzyć różne typy gwiazd. Jednym z przykładów jest układ podwójny tworzony przez białego karła znajdującego się blisko dużej, masywnej gwiazdy. W takich układach dość często zdarza się, że materia masywnej gwiazdy spływa na białego karła w wyniku oddziaływania grawitacyjnego. Masa białego karła w rezultacie zwiększa się – aż do momentu, gdy przekroczy pewną masę krytyczną, zwaną granicą Chandrasekhara. Wówczas następuje wybuch supernowej typu Ia. Eksplozja jest tak silna, że całkowicie niszczy białego karła.

Mogłoby się wydawać, że dysponujemy dużą wiedzą na temat supernowych. Zaobserwowaliśmy jednak dziwne zjawiska, które stanowią wyzwanie dla istniejących teorii i modeli. Są to gwiazdy, które, jak się zdaje, przetrwały swoją śmierć. W literaturze popularnonaukowej znane są jako „gwiazdy zombie”.

Supernowa o kilku maksimach jasności

Pierwszą kandydatką do otrzymania tytułu gwiazdy zombie jest supernowa o bardzo dziwnej krzywej zmian blasku. Jasność typowych supernowych w trakcie wybuchu na początku zwykle szybko wzrasta, osiąga maksimum, a następnie już znacznie spokojniej maleje. Wszystko trwa zazwyczaj około 100 dni. Odkryta we wrześniu 2014 roku przez zespół amerykańskich naukowców niedaleka, bo oddalona jedynie o 509 500 000 lat świetlnych od Ziemi ($z = 0,034$), supernowa iPTF14hls jest pod tym względem bardzo nietypowa. Została sklasyfikowana jako supernowa typu IIP, a jej jasność zmieniała się przez ~ 1000 dni obserwacji (prowadzonych do 2018 r.), prezentując aż pięć maksimów, co sugerowałoby wystąpienie kilku następujących po sobie wybuchów supernowych. Po tym czasie jasność gwiazdy gwałtownie spadła. Co ciekawe, po przeszukaniu archiwów astronomicznych okazało się, że w tej samej lokalizacji zaobserwowano wybuch supernowej w 1954 roku. Według badaczy dane dotyczą tej samej gwiazdy. Żadna z istniejących teorii nie wyjaśnia, jak to możliwe. Naukowcy przypuszczają, że tak naprawdę obserwowane maksima jasności nie oznaczały wybuchów supernowej, ale pomniejsze erupcje, w czasie których gwiazda odrzucała tylko wierzchnie warstwy wodoru. Problem polega na tym, że energia tych mniejszych erupcji nie powinna być równa energii towarzyszącej wybuchowi przeciętnej supernowej. A na to wskazywałyby dane obserwacyjne – zarówno te z 1954 roku, jak i współczesne. Oczywiście naukowcy zasugerowali kilka możliwych rozwiązań mogących tłumaczyć te obserwacje: odrzucone podczas mniejszych wybuchów warstwy wodoru oddziaływały ze środowiskiem międzygwiazdowym, powodując jego świecenie, co z kolei powodowało zmiany jasności w krzywych blasku; mogła to być niezwykle silna gwiazda pulsująca, która w końcowych etapach życia odrzucała zewnętrzne warstwy przed ostatecznym wybuchem supernowej; mógł to być magnetar. Nie mamy jednak definitywnej odpowiedzi. Jedną z najbardziej egzotycznych teorii sugeruje, że w jądrze gwiazdy iPTF14hls spalana była antymateria. Zgodnie z tą hipotezą jądra masywnych gwiazd stają się tak gorące, że energia jest przekształcana w materię i antymaterię, powodując niestabilność gwiazdy i wielokrotne silne erupcje. Antymateria w kontakcie z materią powodowałaby eksplozje, które



Autorka rysunku: Manuela Figueira

„zdmuchują” zewnętrzne warstwy gwiazdy, pozostawiając nienaruszony rdzeń; proces ten mógłby powtarzać się przez dziesięciolecia przed ostatecznym wybuchem supernowej i przekształceniem gwiazdy w czarną dziurę.

Zlewanie się białych karłów

Kolejną kandydatką do tytułu zombie jest gwiazda, która umarła, pozostawiając po sobie białego karła, a następnie w wyniku zupełnie nieoczekiwanego zjawiska „odżyła”. Mowa tutaj o obiekcie J005311 odkrytym dzięki obserwacjom satelity WISE. Jest to jasna gwiazda umieszczona wewnątrz mgławicy gazowej.

Co ciekawe, sama gwiazda emituje światło w paśmie widzialnym, ale otaczająca ją mgławica widoczna jest tylko w paśmie podczerwonym. Początkowo na podstawie linii emisyjnych obiekt ten zaklasyfikowano jako gwiazdę typu Wolfa-Rayeta (która już sama w sobie jest dziwna).

Gwiazdy Wolfa-Rayeta są bardzo duże i bardzo gorące. Mają rozległą i rozrzedzoną powłokę gazową, która jednocześnie rozszerza się z dużą prędkością.

Niektóre cechy obserwowanej gwiazdy zdecydowanie odbiegały od normy. W szczególności nie zaobserwowano w jej składzie ani wodoru, ani helu. Według modeli zbudowana jest w 80% z tlenu i 20% z węgla. Na podstawie kompozycji gwiazdy naukowcy doszli do wniosku, że powstała ona z połączenia dwóch białych karłów. Jedynie w taki sposób można wytłumaczyć obecność tej gwiazdy w mgławicy gazu oraz zupełny brak linii emisyjnych w długościach fal optycznych.

Masa gwiazdy J005311 zdecydowanie przekracza granicę Chandrasekhara. Biały karzeł przekraczając tę granicę, powinien stać się supernową. W tym wypadku dwa białe karły odżyły, łącząc się i tworząc nową gwiazdę. Po ich zderzeniu reakcje termojądrowe rozpoczęły się od nowa, zapobiegając zapadaniu się grawitacyjnemu, które doprowadziłoby do wybuchu. Jak się okazuje, zjawisko to nie jest aż tak bardzo wyjątkowe, jak sądziliśmy wcześniej. Szacuje się, że aż do 10% białych karłów łączy się w pary, aby przeżyć. W dodatku modele opisujące procesy łączenia się białych karłów naturalnie tłumaczą powstawanie magnetycznych białych karłów (czyli białych karłów posiadających bardzo silne pola magnetyczne).

Supernowe typu Iax

I w ten sposób przechodzimy do ostatniej grupy kandydatów, supernowych typu Iax. Supernowe Iax to podklasa supernowych typu Ia, o których mowa była wcześniej. Warto zaznaczyć, że te konkretne supernowe nie są tak do końca wyjątkowe, gdyż stanowią aż 30% supernowych typu Ia. Jednak w przeciwieństwie do pozostałych gwiazd typu Ia – supernowe Iax nie są wystarczająco silne, żeby całkowicie zniszczyć białego karła. Po wybuchu pozostaje jego część: gwiazda-zombie. Przykładami takich obiektów są gwiazdy SN2005hk, SN2008A czy SN2014dt. Natomiast niecodziennym przypadkiem jest SN2012Z, którą obserwowano zarówno przed, jak i po eksplozji. Dzięki zdjęciom pochodzącym z teleskopu Hubble’a naukowcy mogli precyzyjnie przestudiować zmiany jej jasności w ciągu ~1425 dni od eksplozji. Okazało się, że po prawie czterech latach po eksplozji SN2012Z nie tylko nie zniknęła (tak jak typowa supernowa), ale stała się jaśniejsza niż przed eksplozją! Czyżby więc gwiazda odżyła po eksplozji? Do dzisiaj nie mamy dokładnej odpowiedzi. Co ciekawe, z obliczeń astronomów wynika, że masa SN2012Z, niezwykle gwiazdy-zombie, to około $0,5 M_{\odot}$. Oznacza to, że obserwowana ilość światła nie może pochodzić tylko od pozostałości po białym karle. Prawdopodobne wytłumaczenie jest takie, że światło, które obserwujemy, pochodzi z oddziaływania fali uderzeniowej z materią międzygwiazdową lub wzrostu jasności pobliskiej gwiazdy związanego z jej ogrzaniem po wybuchu towarzysza.

Zwrot „gwiazda zombie” bardzo często pojawia się w doniesieniach popularyzujących astronomię. Określenie to przeniknęło nawet do literatury specjalistycznej (choć opornie) i można je znaleźć w kilku artykułach naukowych.



Rozwiązanie zadania M 1732.
Z warunków zadania dostajemy równanie:

$$\sum_{i=1}^{2022} \left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)^2 = \sum_{i=1}^{2022} x_i^2,$$

gdzie $x_{2023} := x_1$. Przekształcając, łatwo dostajemy:

$$\sum_{i=1}^{2022} \left(\frac{x_i - x_{i+1}}{2} \right)^2 = 0,$$

skąd wnioskujemy, że $x_i = x_{i+1}$ dla $i = 1, \dots, 2022$.

O pewnym modelu zawijania białek

Marcin WIERZBIŃSKI^{*,†}, Karolina L. TKACZUK[†],
Alessandro CRIMI[†]

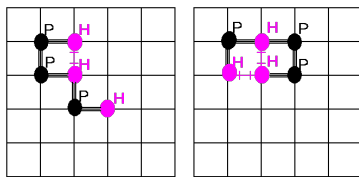
*Doktorant, Wydział Matematyki,
Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet
Warszawski

† Sano Centrum Medycyny Obliczeniowej
w Krakowie



Rozwiązanie zadania M 1733.

Każda z liczb $2, 3, \dots, p_n$ dzieli albo a , albo b , stąd nie dzieli $a + b$. Wobec tego każdy dzielnik pierwszy $a + b$ musi być równy co najmniej p_{n+1} . Stąd też, o ile liczba $a + b$ sama nie jest pierwsza, to jest iloczynem co najmniej dwóch liczb pierwszych nie mniejszych od p_{n+1} (niekoniecznie różnych), a w konsekwencji $a + b \geq p_{n+1}^2$ – co przeczy warunkom zadania.



Przykłady zagięcia sekwencji $s = HPPHPH$ w kracie \mathbb{Z}^2 . Po lewej stronie energia całkowita jest równa -1 , a po prawej stronie -2 . Co więcej, zagięcie przedstawione po prawej stronie realizuje globalne minimum energii całkowitej

| k | liczba zagięć w \mathbb{Z}^3 |
|-----|--------------------------------|
| 1 | 6 |
| 2 | 30 |
| 3 | 150 |
| 4 | 726 |
| 5 | 3534 |
| 10 | $\sim 8,8 \cdot 10^6$ |
| 15 | $\sim 21,2 \cdot 10^9$ |
| 20 | $\sim 49,9 \cdot 10^{12}$ |

O przybliżaniu liczby możliwych zagięć metodami Monte Carlo można przeczytać w artykule Wojciecha Niemiro *Monte Carlo, spacer i polimery* w Δ_{15}^5 .

Aminokwasy to małe cząsteczki stanowiące główny budulec białka. Można o nich myśleć jak o koralikach nawleczonych na sznurek. Sposób ich ułożenia w przestrzeni decyduje o funkcji białka w komórce oraz o tym, jak oddziałuje ono z innymi elementami komórki. Z tego względu struktura przestrzenna danego białka jest dla badaczy bardzo pożądaną informacją, przydatną m.in. w przypadku projektowania leków.

Istnieje wiele możliwości odtworzenia kształtu białka występującego w naturze. Jedną ze standardowych metod jest „hodowla” cząsteczki w warunkach laboratoryjnych, imitujących te naturalne. Jednak to metoda bardzo czasochłonna i nie zawsze skuteczna, gdyż uchwycenie kształtu białka niekiedy bywa niemożliwe – białko może okazać się niestabilne i rozpaść się przed odtworzeniem jego kształtu. Alternatywą dla tej metody jest tworzenie trójwymiarowych struktur „w krzemie” (tj. przy użyciu komputera) w oparciu o modele teoretyczne. Podstawą tych ostatnich są istniejące już struktury białek (wcześniej odtworzone eksperymentalnie i zebrane w bazie białek *Protein Data Bank*). W ostatnich latach temat ten zyskał duże zainteresowanie mediów, ze względu na sukcesy projektu AlphaFold (alphafold.ebi.ac.uk), który do przewidywania struktur białek wykorzystuje sztuczną inteligencję.

Jednym z najprostszych modeli struktury przestrzennej białek jest model hydrofobowo-polarny (HP), w którym aminokwasy podzielone są na dwa typy: H (aminokwas hydrofobowy) i P (aminokwas hydrofilowy). Białko jest w nim reprezentowane przez zagięcie danej skończonej sekwencji $s \in \{H, P\}^k$ w kracie $L = \mathbb{Z}^3$. Zagięcie (lub *zwinięcie*) można formalnie zdefiniować jako przekształcenie różnowartościowe $\omega : \{1, \dots, k\} \rightarrow L$, takie że sąsiednie liczby odpowiadają sąsiednim punktom z kraty, tzn.

$$\omega(i) \neq \omega(j) \quad \text{oraz} \quad |\omega(i) - \omega(i+1)| = 1 \quad \text{dla} \quad 1 \leq i < j \leq k,$$

przy czym $|p - q|$ to zwyczajna (euklidesowa) odległość między punktami p i q . Poszukiwane jest zagięcie o największej liczbie E par sąsiadujących w kracie aminokwasów typu H . Wartość $-E$ określa się w tym kontekście mianem *energii*; innymi słowy, poszukiwane jest zagięcie o najmniejszej energii.

Dla krótkich sekwencji aminokwasów (tzn. niewielkich wartości k), optymalne zagięcie można odnaleźć, obliczając energię każdego możliwego zagięcia. W praktyce jednak sekwencje mogą liczyć od 50 do ponad 1500 aminokwasów, a liczba możliwych zagięć rośnie bardzo szybko wraz ze wzrostem k ! W umieszczonej na marginesie tabeli przedstawiono liczbę zagięć w kracie \mathbb{Z}^3 dla wybranych wartości k . Jasno wynika z niej, że przeszukiwanie wszystkich konfiguracji nie wchodzi w grę.

To, że przestrzeń możliwości jest ogromna, nie oznacza jeszcze, że z informatycznego punktu widzenia problem jest nierozwiązywalny. Przyjrzyjmy się bliżej trudności omawianego zadania. Sformułowany przez nas problem ma charakter obliczeniowy – szukamy zagięcia ω minimalizującego energię zadaną pewnym wzorem. To zdanie może zostać przeformułowane w następujący problem decyzyjny (nazwijmy go *ZB* od *zawijania białek*).

Wejście: Ustalona sekwencja $s \in \{H, P\}^k$, liczba naturalna $m \in \mathbb{N}$.

Pytanie: Czy istnieje zawinięcie sekwencji $s \in \{H, P\}^k$ w kracie \mathbb{Z}^3 o energii co najwyżej $-m$?

Gdybyśmy znali szybki algorytm rozwiązujący *ZB*, moglibyśmy uruchamiać go dla coraz większych wartości m , by uzyskać informacje o minimalnej energii zagięcia. Okazuje się jednak, że nasze decyzyjne zadanie jest problemem NP–pełnym, czyli z punktu widzenia informatyki bardzo trudnym (o takich problemach można przeczytać np. w Δ_{17}^{01} oraz Δ_{17}^{11}).

**Rozwiązanie zadania F 1064.**

Ciepło reakcji Q oznacza energię uwalnianą ($Q > 0$) lub pochłanianą ($Q < 0$) podczas reakcji i w naszym przypadku jest równe różnicy sumy energii spoczynkowych substratów i sumy energii spoczynkowych produktów. $Q < 0$ oznacza, że warunkiem zajścia reakcji jest dostarczenie energii $|Q|$. Energia ta zostanie „pobrana” z energii kinetycznej substratów (jąder ^2H i ^{14}N). Tylko w układzie środka masy możliwa jest sytuacja, że tuż po reakcji jej produkty spoczywają (względem tego układu) – odpowiadająca tej sytuacji suma energii kinetycznych substratów obliczona w układzie środka masy równa się $|Q|$. Podana w zadaniu wartość $|Q|$ jest ponad 100 razy mniejsza od energii spoczynkowej najbliższego z występujących jąder atomowych, można więc wykonać obliczenia, stosując wzory mechaniki klasycznej. Niech M oznacza masę ^{14}N (tarczy), m – masę deuteronu ^2H (pocisku), a v jego prędkość. Prędkość układu środka masy, V_{CM} , wynosi:

$$V_{CM} = \frac{mv}{m+M}.$$

W układzie środka masy warunkiem zajścia reakcji jest, by suma energii kinetycznych substratów była nie mniejsza niż $|Q|$:

$$\frac{m(v - V_{CM})^2}{2} + \frac{MV_{CM}^2}{2} \geq |Q|.$$

Po kilku prostych przekształceniach otrzymujemy warunek na energię kinetyczną pocisku w układzie laboratorium:

$$E_k = \frac{mv^2}{2} \geq \frac{m+M}{M}|Q|.$$

Liczbowo: $E_k \geq 11,54$ MeV.
Dla dociekliwych komentarz do rozwiązania na str. 12.



NP–zupełność problemu zagięć białek została wykazana w artykule *Protein Folding in the Hydrophobic–Hydrophilic (HP) Model is NP–Complete* autorstwa Bonniego Bergera i Toma Leightona. Schemat tego (miejscami mocno skomplikowanego) dowodu jest następujący: zamiast problemu ZB autorzy rozważają problem WS (*Wypełnianie Sześcianu*):

Wejście: Liczba naturalna n i ustalona sekwencja $s \in \{H, P\}^k$, w której znajduje się n^3 liter H .

Pytanie: Czy istnieje zawinięcie sekwencji $s \in \{H, P\}^k$ w kracie \mathbb{Z}^3 , w którym litery H wypełniają sześcian $n \times n \times n$?

Jest dość intuicyjne, że umiejętność rozwiązania problemu ZB pociąga za sobą zdolność do rozwikłania WS ; wystarczy wziąć $m = 3n^2(n - 1)$, czyli tyle, ile jest krawędzi w sześciennym siatce $n \times n \times n$. Nietrudno bowiem uwierzyć, że sześcienna siatka jest optymalnym rozwiązaniem z punktu widzenia liczby sąsiadujących liter H . Następnie dowodzi się, że problem WS jest tak samo trudny jak „problem pakowania” (*bin packing*), czyli uogólnienie problemu plecakowego, o którym wiadomo, że jest NP–trudny:

Wejście: Liczby naturalne B i K , zbiór U oraz funkcja $s : U \rightarrow \mathbb{N}$ przyjmująca wartości parzyste, taka że $\sum_{u \in U} s(u) = BK$.

Pytanie: Czy można podzielić zbiór U na K podzbiorów U_i ($i = 1, \dots, K$) w taki sposób, że dla każdego i mamy $\sum_{u \in U_i} s(u) = B$?

Wiemy już, że zadanie znajdowania optymalnego zwinięcia jest problemem trudnym. Czy to oznacza, że jesteśmy skazani na przypadkowe wybieranie losowych zwinięć i wskazywanie spośród nich tego o najmniejszej energii, choć wiemy, że w ten sposób przeglądamy tylko małą część całej przestrzeni? Na szczęście nie; można czynić coś istotnie mądrzejszego. Jednym z podejść jest oznaczanie tras, którymi się już przechodziło i które nie dały interesującego zagięcia. Taki pomysł stosowany jest w algorytmie *Monte Carlo Tree Search*. Algorytm został wykorzystany m.in. w słynnym programie Alpha Go, w którym w listopadzie 2015 roku jako pierwszy automat pokonał zawodowego gracza w grę Go, Fan Hui, a w marcu 2016 pokonał jednego z najlepszych zawodowych graczy, Lee Sedola.

W naszym przypadku „gra” (jednoosobowa) może być określona jako wydłużanie zawinięć tak, by uzyskać jak najmniejszą energię. Monte Carlo Tree Search dla modelu hydrofobowo–polarnego na każdym etapie działania algorytmu operuje na drzewie dotychczas sprawdzonych ruchów, czyli zawinięć częściowych. Każde z tych zawinięć ma obliczone dotychczasowe empiryczne oszacowanie jakości. Krok algorytmu składa się z wymienionych niżej działań:

- Startując od korzenia (który tworzy pierwszy aminokwas), schodzimy w dół aż do pewnego liścia \mathcal{L} aktualnego drzewa, w każdym kroku wybierając takie dziecko wierzchołka, które maksymalizuje pewną funkcję (zależną od aktualnego oszacowania jakości dziecka i tego, jak często było odwiedzane na dotychczasowych etapach).
- Rozszerzamy zawinięcie \mathcal{L} o kolejny aminokwas z sekwencji w losowym kierunku i dołączamy tak powstałe zawinięcie \mathcal{C} do aktualnego drzewa.
- Rozszerzamy \mathcal{C} o kolejne aminokwasy z sekwencji w losowych kierunkach aż do otrzymania zawinięcia długości k . Powtarzamy tę operację wielokrotnie i na tej podstawie wyznaczamy jakość \mathcal{C} jako średnią energię końcowych zawinięć uzyskanych w symulacji.
- Aktualizujemy jakość wierzchołków drzewa na drodze od \mathcal{C} do korzenia drzewa (na podstawie wcześniejszych symulacji z \mathcal{C}).

Mam nadzieję, że tym przykładem przekonaliśmy Czytelników, że algorytmy losowe mają ciekawe zastosowanie praktyczne i przydają się w poszukiwaniu przybliżonych rozwiązań dla określonych modeli. Sam model hydrofobowo–polarny daje bardzo ciekawe teoretyczne wyniki i wiąże się z istotnymi problemami informatyki, statystyki i matematyki.

„Wymowne” ciągi

Karol GRYSZKA*

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych,
Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

Jedną z popularnych łamigłówek logiczno-liczbowych jest wskazanie kolejnego wyrazu zadanego ciągu. Czytelnik lubiący takie zagadki może na podstawie podanych poniżej początkowych wyrazów

1, 2, 3, 4, 5, 11, 13, 22, 101, 10, 12, 14 . . .

odgadnąć trzy kolejne. Rozwiązanie tej nieco trudniejszej łamigłówki zamieszczamy na stronie 6.

W tym artykule interesować nas będzie jeden z ciekawszych ciągów-zagadek, opisany oraz zbadany przez Johna Conwaya. Założmy, że dany jest pewien zestaw cyfr, na przykład 55 – jest to jednocześnie pierwszy element konstruowanego ciągu. Ciąg ten składa się z dwóch „piątek” i obie liczby, 2 i 5, wymówione przy opisie pierwszego wyrazu zestawiamy do drugiego wyrazu konstruowanego ciągu: 25. Ten nowy zestaw to jedna „dwójka” i jedna „piątka”, czyli 1215. Każdy kolejny element konstruowanego ciągu powstaje zawsze przez wypowiedzenie poprzedniego i zapisanie wszystkich cyfr wypowiedzianych. Reguła ta prowadzi więc do następujących pięciu sekwencji:

55, 25, 1215, 11121115, 31123115.

Najpopularniejszą formą powyższego ciągu jest ten zaczynający się od 1 i tylko takim przypadkiem będziemy się dalej zajmować. Ciąg „generowany” przez 1 opisaną wyżej metodą to:

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211.

Ten ciąg jest przykładem tak zwanych **ciągów „patrz i mów”**, to jest ciągów, których strona werbalna odgrywa istotną rolę w konstrukcji.

Na potrzeby artykułu wprowadzimy teraz odpowiednią notację oraz terminologię. Niech $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ oznacza ciąg otrzymany z danej sekwencji początkowej $L = L_0$ (u nas $L = 1$) po n powtórzeniach procedury „patrz i mów”. Założmy, że dana jest pewna sekwencja cyfr S , którą można podzielić na dwie niepuste sekwencje A i B (co zapisujemy $S = AB$) w taki sposób, że $S_n = A_n B_n$ dla wszystkich $n \geq 0$, a więc takie, które w kolejnych iteracjach procedury „patrz i mów” pozostają od siebie niezależne. Taki podział oznaczymy przez $S = A * B$ i mówimy wtedy, że S jest **związkiem** A i B . Dla przykładu, zauważmy, że jeśli $L = 1$, to $L_1 \neq 1 * 1$ (choć $L_1 = 11$), gdyż $L_2 \neq L_1 L_1$. Każdy ciąg nieposiadający rozkładu na dwa niepuste niezależne podciągi nazywamy **pierwiastkiem**.

Conway zauważył, że jeśli $L_0 = 1$, to wtedy od pewnego momentu każdy element ciągu „patrz i mów” $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest związkiem pierwiastków pochodzących z pewnej ustalonej grupy 92 pierwiastków. W przypadku ogólnym (gdy L_0 jest dowolne) sytuacja okazuje się analogiczna – możliwych pierwiastków również będzie skończenie wiele, ale nie muszą one być takie same, jak pierwiastki z przypadku $L_0 = 1$.

Wspomnianym 92 pierwiastkom Conway nadał nazwy pierwszych 92 pierwiastków z tablicy Mendelejewa (od Helu do Uranu). Nie oznacza to jednak, że każda sekwencja cyfr daje się podzielić na pierwiastki – rozważając kolejne wyrazy ciągu „patrz i mów” dla $L_0 = 1$,

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221, 1113213211,

dopiero ostatni z wyżej podanych wyrazów jest związkiem pierwiastków: 11132 oraz 13211. Sekwencje takie jak

1, 11, 21, 1211, 111221, 312211, 13112221,

czyli niedające się rozłożyć na związek 92 pierwiastków, możemy określić mianem egzotycznych.

Powyższy opis może nieco przypominać proces Wielkiego Wybuchu – na początku było niewiele egzotycznej materii, która jednak po pewnym (niedługim w skali kosmicznej) czasie przekształciła się w znaną nam materię cząsteczkową, zbudowaną z podstawowych pierwiastków. Z tego też powodu dla ciągów „patrz i mów” formułuje się twierdzenie o niezwyklej nazwie.

John Conway (1937–2020) znany jest między innymi jako twórca koncepcji automatów komórkowych, a w szczególności ich koronnego przykładu – Gry w Życie (Game of Life).

Polecamy artykuł pt. *John Horton Conway (1937–2020)* zamieszczony w Δ_{21}^7 .

O ciągu Conwaya pisał w *Delcie* również Wojciech Czerwiński, w artykule *Dziwny ciąg*, Δ_{21}^{11} .

Jak łatwo się przekonać, jeśli zmienimy postać początkowej sekwencji, na przykład przyjmiemy $L = 22$, to $L_n = 22$ dla wszystkich $n \geq 0$. Gdy $L = 4$, to w kolejnych wyrazach ciągu $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zawsze będzie obecna cyfra 4, która nie występuje w żadnym wyrazie ciągu z warunkiem $L_0 = 1$. Jeśli teraz L_0 jest pustą sekwencją cyfr, to wszystkie kolejne L_n również będą puste (nie ma czego wymawiać).



Rozwiązanie zadania M 1734.

Ciąg $(x_1, x_2, \dots, x_{2n+1})$ nazwijmy *dobrym*, jeśli 1 występuje częściej wśród $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n+1}$ niż wśród x_1, x_2, \dots, x_n . W pozostałych przypadkach ciąg jest *zły*.
Ciągowi $s = (x_1, x_2, \dots, x_{2n+1})$ przypiszmy ciąg

$$s^* = (1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_{2n+1}).$$

Przypuśćmy, że 1 występuje a razy wśród liczb x_1, x_2, \dots, x_n oraz b razy wśród $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{2n+1}$. Wówczas występuje ona $n - a$ razy wśród liczb

$$1 - x_1, 1 - x_2, \dots, 1 - x_n$$

oraz $n + 1 - b$ razy wśród liczb

$$1 - x_{n+1}, 1 - x_{n+2}, \dots, 1 - x_{2n+1}.$$

Zauważmy jednak, że

$$a < b \iff n - a \geq n + 1 - b,$$

więc s jest dobry wtedy i tylko wtedy, gdy s^* jest zły. Wobec tego przypisanie $s \rightarrow s^*$ jest bijekcją między zbiorami ciągów dobrych i złych, a to oznacza, że dokładnie połowa ciągów jest dobra.

Twierdzenie o końcach. Koniec dowolnej sekwencji R dla dowolnego L_0 ostatecznie wpada w jeden z trzech cykli:

- $2^2]$
- $2311322113212221] \rightarrow 213211322211312113211] \rightarrow 21113122113322113111221131221] \rightarrow 212322211331222113112211]$
- $231221132221222112112322211n] \rightarrow 21311222113321132211221121332211n]$, dla $(n > 1)$.

Twierdzenie o podziale. Sekwencja $S = AB$ dzieli się na dwa niezależne pierwiastki $S = A * B$ wtedy i tylko wtedy, gdy A lub B jest pusty lub obie sekwencje są jedną z podanych niżej (tutaj $n \geq 4$ oraz $m \leq 3$):

| A | B |
|-----------|--|
| $n]$ | $[m$ |
| $2]$ | $[1^1 X^1 \quad \text{lub} \quad [1^3 \quad \text{lub} \quad [3^1 X^{\neq 3} \quad \text{lub} \quad [n^1$ |
| $\neq 2]$ | $[2^2 1^1 X^1 \quad \text{lub} \quad [2^2 1^3 \quad \text{lub} \quad [2^2 3^1 X^{\neq 3} \quad \text{lub} \quad [2^2 n^0 \quad \text{lub} \quad 1$ |

Dowody zaprezentowanych faktów są dość techniczne; można je odnaleźć w pracy Conwaya *The weird and wonderful chemistry of radioactive decay* z 1987 roku.

Komentarz do rozwiązania zadania 1064

Czytelnik Dociekliwy na pewno nie jest zadowolony z podanego przez nas rozwiązania zadania 1064.

Zastosowaliśmy w nim wzory mechaniki klasycznej. Być może takie przybliżenie jest wystarczająco dokładne w przypadku mas i energii występujących w treści zadania, ale Czytelnik Dociekliwy chciałby, oczywiście, znać pełne rozwiązanie, poprawne także wtedy, gdy ciepło reakcji ma wartość porównywalną z masami substratów i produktów. Spełniając słuszne oczekiwania Czytelnika Dociekliwego, przedstawiamy poniżej pełne rozwiązanie uwzględniające efekty relatywistyczne.

Podczas reakcji spełnione są prawa zachowania pędu i energii: w układzie laboratorium po zajściu reakcji sumaryczny pęd produktów będzie równy pędowi deuteronu przed reakcją. Z pędami produktów związana jest też ich energia kinetyczna. Tylko w układzie środka masy zderzających się jąder sumaryczny pęd przed i po reakcji jest równy zeru (tak definiujemy układ środka masy). Oznacza to, że warunkiem zajścia reakcji jest, by sumaryczna energia w układzie środka masy była równa sumie energii spoczynkowych produktów, która jest o $|Q|$ większa od sumy mas spoczynkowych substratów.

W zderzeniach cząstek o energiach całkowitych E_i i pędach \vec{p}_i energia dostępna w środku masy E_{CM} spełnia równanie:

$$E_{CM}^2 = \left(\sum_i E_i \right)^2 - \left(\sum_i \vec{p}_i c \right)^2.$$

W powyższym wzorze c oznacza wartość prędkości światła, a prawa strona równania jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, a ze względu na spełnienie praw zachowania pędu i energii ma tę samą wartość przed reakcją i po niej.

Zastosujmy dotychczasowe rozważania ogólne do podanej reakcji. Oznaczmy masę deuteronu (pocisku) przez m , a masę jądra ^{14}N (tarczy) przez M . Brakuje nam pędu deuteronu o energii kinetycznej E_k . Całkowita energia deuteronu: $E = mc^2 + E_k$. Z drugiej strony: $E = \sqrt{m^2 c^4 + (pc)^2}$. Otrzymujemy: $p^2 c^2 = E_k^2 + 2mc^2 E_k$. Podstawiamy do równania określającego energię dostępną w układzie środka masy w przypadku, gdy produkty reakcji w tym układzie spoczywają:

$$\begin{aligned} ((m + M)c^2 + E_k)^2 - (E_k^2 + 2mc^2 E_k) &= \\ &= ((M + m)c^2 + |Q|)^2. \end{aligned}$$

Po rozwiązaniu powyższego równania względem E_k otrzymujemy wartość minimalnej energii kinetycznej deuteru (w układzie laboratorium):

$$E_k = \frac{m + M}{M} |Q| + \frac{Q^2}{2Mc^2}.$$

Dla reakcji podanej w treści zadania wynik pełnego rozwiązania różni się od rozwiązania przybliżonego (z zastosowaniem wzorów mechaniki klasycznej) o wyraz: $Q^2 / (2Mc^2) \approx 4 \cdot 10^{-4} \text{ MeV}$. Tak mała wartość poprawki w pełni usprawiedliwia zastosowanie „przybliżenia klasycznego”.

Uwaga: Użyty w treści zadania termin „ciepło reakcji” odnosi się do wielkości mikroskopowej dotyczącej pojedynczego zderzenia. W chemii „ciepło reakcji” definiowane jest dla układów makroskopowych, a jego wartość zależy od warunków, w jakich przebiega reakcja (np. pod stałym ciśnieniem czy w stałej objętości).

Andrzej MAJHOFER

Nierówność izoperymetryczna

Bartłomiej BZDEGA*

* Uniwersytet im. A. Mickiewicza
w Poznaniu

Klasyczne zagadnienie izoperymetryczne to problem znalezienia geometrycznej figury płaskiej o największym polu przy zadanym obwodzie. Sporo na temat jego historii można przeczytać w książce *Okruchy matematyki* Jarosława Górnickiego (wydanie drugie, Warszawa 2009, str. 158–172). Opisane jest w niej również elementarne, czysto geometryczne podejście do rozwiązania tego problemu.

Tytułową bohaterką artykułu jest nierówność:

$$(1) \quad L^2 \geq 4\pi P,$$

w której L oznacza obwód, a P – pole pewnej figury płaskiej, przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona kołem. Wynika z tego, że:

1. spośród wszystkich figur o jednakowym obwodzie koło ma największe pole;

lub równoważnie:

2. spośród wszystkich figur o jednakowym polu koło ma najmniejszy obwód.

W niniejszym artykule przedstawiam rozwiązanie nie aż tak elementarne, za to niezwykle błyskotliwe. Pochodzi ono z pracy *Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen* [Mathematische Zeitschrift 44 (1939), strony 690–696] autorstwa Erharda Schmidta.

Fizyczna intuicja

W cytowanych powyżej twierdzeniach brakuje nieco ścisłości – doprecyzujemy zatem kilka pojęć.

Figura geometryczna to część płaszczyzny ograniczona pewną krzywą zamkniętą \mathcal{C} , zwaną jej brzegiem. Intuicja mówi nam, że krzywą \mathcal{C} powinniśmy móc narysować w skończonym czasie, powiedzmy, T . Niech

zatem $\mathcal{C}(t) = (x_c(t), y_c(t))$ będzie punktem w układzie współrzędnych, w którym znajduje się rysik ołówka w czasie $t \in [0, T]$ podczas rysowania, przy czym $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(0)$, a na przedziale $[0, T]$ funkcja $\mathcal{C}(t)$ jest różnowartościowa i ciągła. Krzywą spełniającą te warunki nazywamy *krzywą Jordana*. Twierdzenie Jordana orzeka, że rozdziela ona płaszczyznę na dwie części i jest ich wspólnym brzegiem.

Opisaną wyżej funkcję $\mathcal{C} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ nazywamy *parametryzacją krzywej \mathcal{C}* . Dla przyszłych rozważań umówmy się, że rysujemy tak, że jeśli patrzymy w kierunku rysowania, to obszar wewnątrz krzywej znajduje się z lewej strony. Taką parametryzację krzywej nazywamy *dodatnią*.

Dodatkowo założymy, że funkcje $x_c(t)$ i $y_c(t)$ mają ciągłe pochodne $\dot{x}_c(t)$ i $\dot{y}_c(t)$ na przedziale $(0, T)$, z wyjątkiem być może skończonej wielu wartości t (taką krzywą nazywamy *regularną*). Możemy wtedy wyrazić prędkość rysika jako wektor

$$(2) \quad v_c(t) = (\dot{x}_c(t), \dot{y}_c(t)).$$

Pole P wewnątrz krzywej regularnej \mathcal{C} z dodatnią parametryzacją $\mathcal{C}(t) = (x_c(t), y_c(t))$ dla $t \in [0, T]$ można obliczyć za pomocą wzorów:

$$(3) \quad P = \int_0^T x_c(t)\dot{y}_c(t) dt = - \int_0^T y_c(t)\dot{x}_c(t) dt.$$

Stanowią one standard analizy matematycznej i można je znaleźć w każdym przyzwoitym podręczniku.

W szczególności są one bezpośrednią konsekwencją *twierdzenia Greena*, któremu jednak nie będziemy się bliżej przyglądać w tym artykule.

Dowód nierówności

W dowodzie będziemy zakładali, że krzywa \mathcal{C} , będąca brzegiem rozważanej figury, jest regularna, a sama figura jest wypukłą.

Wybermy taki układ współrzędnych, by dla pewnych $r, s \geq 0$ krzywa \mathcal{C} była wpisana w prostokąt, którego boki leżą na prostych o równaniach:

$$x = r, \quad x = -r, \quad y = s, \quad y = -s.$$

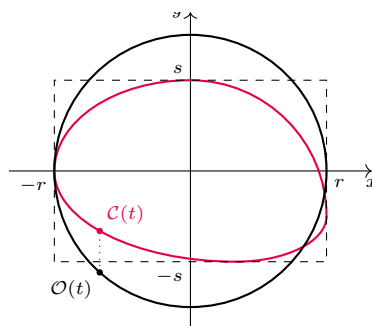
Rozważmy dodatnią parametryzację $\mathcal{C}(t) = (x_c(t), y_c(t))$, w której $|v_c(t)| = 1$ dla wszystkich t (intuicyjnie: rysik ołówka porusza się ze stałą szybkością równą 1); w szczególności T jest równe obwodowi, $T = L$.

Niech \mathcal{O} będzie okręgiem o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu r .

Parametryzujemy go tak, by odcinek $\mathcal{C}(t)\mathcal{O}(t)$ był dla każdego t równoległy do osi OY , a więc

$$\mathcal{O}(t) = (x_o(t), y_o(t)) = (x_c(t), \pm \sqrt{r^2 - x_c(t)^2}),$$

przy czym znak \pm dobieramy w ten sposób, by parametryzacja $\mathcal{O}(t)$ była dodatnia.



Niech P będzie polem figury ograniczonej przez krzywą \mathcal{C} . Stosując wzór (3) do parametryzacji krzywych \mathcal{C} i \mathcal{O} , otrzymujemy:

$$P = \int_0^L x_c(t)y_c'(t) dt = \int_0^L x_o(t)y_c'(t) dt,$$

$$\pi r^2 = - \int_0^L y_o(t)x_o'(t) dt = - \int_0^L y_o(t)x_c'(t) dt.$$

Dodajmy powyższe równości stronami:

$$(4) \quad P + \pi r^2 = \int_0^L (x_o(t)y_c'(t) - y_o(t)x_c'(t)) dt.$$

Funkcja podcałkowa jest iloczynem skalarnym wektora $v_o^*(t) = (-y_o(t), x_o(t))$ i wektora prędkości $v_c(t)$. Mamy $|v_o^*(t)| = r$, gdyż $(x_o(t), y_o(t)) \in \mathcal{O}$ oraz $|v_c(t)| = 1$. Iloczyn skalarny dwóch wektorów nie przekracza iloczynu ich długości, więc

$$P + \pi r^2 \leq \int_0^L r dt = Lr.$$

Teraz wystarczy zastosować nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$(5) \quad \sqrt{P \cdot \pi r^2} \leq \frac{P + \pi r^2}{2} \leq \frac{Lr}{2}.$$

Nierówność $\sqrt{P \cdot \pi r^2} \leq \frac{Lr}{2}$ trzeba podzielić obustronnie przez $\frac{r}{2}$ i podnieść do kwadratu, by otrzymać nierówność (1).

Równość tylko dla koła

Pozostaje wykazać, że jeśli $L^2 = 4\pi P$, to krzywa \mathcal{C} jest okręgiem. W tym celu prześledzimy te miejsca dowodu nierówności (1), w których szacowaliśmy – w każdej z nierówności w (5) musi być równość.

W pierwszej nierówności równość zachodzi tylko, gdy $P = \pi r^2$, i wówczas $L = \sqrt{4\pi P} = \sqrt{4\pi^2 r^2} = 2\pi r$. W drugiej korzystaliśmy z szacowania iloczynu skalarnego niezerowych wektorów. Jest równy iloczynowi ich długości tylko, gdy kąt między nimi jest zerowy – czyli jeden z wektorów jest równy drugiemu pomnożonemu przez pewną liczbę dodatnią. Biorąc pod uwagę długości tych wektorów, mamy $v_o^*(t) = r v_c(t)$, czyli w szczególności

$$(6) \quad x_c(t) = x_o(t) = r y_c'(t).$$

Nierówności (1) można dowieść alternatywnie, rozważając okrąg Ω o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu s oraz taką parametryzację dodatnią $\Omega(t)$, że odcinek $\mathcal{C}(t)\Omega(t)$ jest dla każdego t równoległy do osi OX . Analizując miejsca szacowania w tym alternatywnym dowodzie (wszystko przebiega tak samo, jak to zostało opisane w akapicie wyżej), dochodzimy do wniosku, że $P = \pi s^2$, więc $s = r$. Z równości w szacowaniu iloczynu skalarnego otrzymamy

$$(7) \quad y_c(t) = s \dot{x}_c(t) = r \dot{x}_c(t).$$

Równości (6) i (7) dają

$$\sqrt{x_c(t)^2 + y_c(t)^2} = r \sqrt{y_c'(t)^2 + \dot{x}_c(t)^2} = r |v_c(t)| = r,$$

więc \mathcal{C} jest okręgiem o środku $(0, 0)$ i promieniu r .

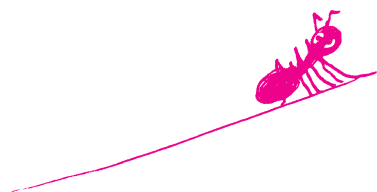
O pewnych hipotezach teorii liczb

Witold BEDNAREK*

Rozpocznijmy od następującego zadania: udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej m liczba $m^2 + 3m + 2$ jest złożona. Nie jest to wymagający problem; rozwiązanie polega na zauważeniu, że badaną liczbę można przedstawić jako $(m + 1)(m + 2)$ i oba czynniki są zawsze liczbami całkowitymi, większymi niż 1. A co, jeśli zamiast tego spytamy o liczby postaci $m^2 + m + 2$? Tutaj poprzednia sztuczka już nie zadziała; wielomianu $w(x) = x^2 + x + 2$ nie jesteśmy w stanie przedstawić jako iloczynu dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych, różnych od wielomianu tożsamościowo równego 1. Takie wielomiany (o współczynnikach całkowitych) nazywamy *niezrozkładalnymi*. Jeśli jednak przyjrzymy się wartościom $w(m)$ dla $m = 1, 2, \dots$, zaobserwujemy, że wszystkie są parzyste i większe od 2, zatem złożone. Nietrudno uzasadnić, dlaczego tak jest dla dowolnej liczby naturalnej m : nierówność $w(m) > 2$ jest oczywista, a parzystość $w(m)$ wynika z faktu, że $w(m) = m(m + 1) + 2$ i któraś z liczb m lub $m + 1$ jest parzysta.

Czy teza naszego zadania może być prawdziwa, jeśli żaden z przedstawionych dwóch argumentów nie ma zastosowania? W 1857 roku Wiktor Buniakowski sformułował hipotezę, że nie. Niech f będzie wielomianem niezrozkładalnym o współczynnikach całkowitych i dodatnim współczynnikiem przy najwyższej potędze. Ponadto niech wielomian f ma stopień co najmniej 2 oraz nie istnieje taka liczba naturalna $n > 1$, która dzieli wartości $f(k)$ dla każdego naturalnego k . Wtedy, wedle hipotezy Buniakowskiego, istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych m , że liczba $f(m)$ jest pierwsza.

* Nauczyciel, I Liceum im. Mikołaja Kopernika w Łodzi



Przykład 1. Niech $f(x) = x^2 + 1$. Wielomian ten spełnia założenia hipotezy Buniakowskiego, z której wynikałoby, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $m^2 + 1$. Na przykład liczby:

$$\begin{array}{lll} 1^2 + 1 = 2, & 4^2 + 1 = 17, & 10^2 + 1 = 101 \\ 2^2 + 1 = 5, & 6^2 + 1 = 37, & \end{array}$$

są liczbami pierwszymi.

W 1978 roku Henryk Iwaniec (uczeń Andrzeja Schinzla) udowodnił coś bliskiego hipotezie Buniakowskiego w przypadku z przykładu 1: uzasadnił, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych m , dla których liczba $m^2 + 1$ jest liczbą pierwszą lub iloczynem dwóch liczb pierwszych.

Przykład 2. Niech $f(x) = x^2 + x + 41$. Wielomian ten spełnia założenia hipotezy Buniakowskiego, z której wynikałoby, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $m^2 + m + 41$. Wspomnijmy, że wielomian ten był rozważany przez Leonharda Eulera, który zauważył, że liczby $f(0), f(1), \dots, f(39)$ są pierwsze.

Jak już wcześniej zauważyliśmy, dla dowolnej liczby naturalnej m któraś z liczb m oraz $m + 1$ jest parzysta (więc, poza $m = 1, 2$, złożona). Nie ma jednak widocznego powodu, dla którego nie mogłoby istnieć nieskończenie wiele par liczb pierwszych postaci m i $m + 2$. Takie liczby pierwsze nazywamy *bliźniaczymi*, przykładami są:

$$\begin{array}{lll} 3 \text{ i } 5, & 11 \text{ i } 13, & 29 \text{ i } 31, \\ 5 \text{ i } 7, & 17 \text{ i } 19, & 41 \text{ i } 43; \end{array}$$

hipoteza liczb bliźniaczych stwierdza, że takich par jest nieskończenie wiele. W 1904 roku Leonard E. Dickson sformułował istotne uogólnienie tej hipotezy: Niech $s \geq 1$ będzie dowolnie ustaloną liczbą naturalną oraz $f_i(x) = a_i x + b_i$ dla $i = 1, \dots, s$, gdzie liczby $a_1, \dots, a_s > 0$ oraz b_1, \dots, b_s są całkowite. Załóżmy ponadto, że nie istnieje taka liczba pierwsza $p > 1$, która dzieli iloczyn $f_1(k) \cdot \dots \cdot f_s(k)$ dla każdego naturalnego k . Wtedy istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych m , że każda z liczb $f_1(m), \dots, f_s(m)$ jest pierwsza.

Przykład 3. $s = 2$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x + 2$. Wówczas dostajemy hipotezę o liczbach bliźniaczych.

Przykład 4. $s = 2$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 2x + 1$. W tym przypadku prawdziwość hipotezy Dicksona oznaczałoby, że istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $2m + 1$, gdzie m jest liczbą pierwszą. Takie liczby nazywamy liczbami Sophie Germain, przykładami są:

$$\begin{array}{ll} 5 = 2 \cdot 2 + 1, & 11 = 2 \cdot 5 + 1, \\ 7 = 2 \cdot 3 + 1, & 23 = 2 \cdot 11 + 1. \end{array}$$

Skoro mamy liczby pierwsze bliźniacze, to nasuwa się pytanie o liczby pierwsze *trojacze*. W pierwszym odruchu można by pomyśleć, że są to trójki liczb pierwszych postaci $m, m + 2$ i $m + 4$. Poza przypadkiem $m = 3$ takich trójek jednak nie ma, co można wywnioskować z faktu, że liczby $m, m + 2$ i $m + 4$ dają różne reszty z dzielenia przez 3. Może w takim

razie poszukać trójek liczb pierwszych postaci $m, m + 3$ i $m + 6$? To też zły pomysł, ze względu na różną parzystość liczb m i $m + 3$. Po chwili namysłu dochodzimy do wniosku, że najbliższej idei *pierwszych trojaczków* byłyby trójki $m, m + 2$ i $m + 6$, na przykład:

$$\begin{array}{lll} (5, 7, 11), & (17, 19, 23), & \\ (11, 13, 17), & (41, 43, 47), & (101, 103, 107), \end{array}$$

lub $m, m + 4$ i $m + 6$, na przykład:

$$\begin{array}{lll} (7, 11, 13), & (37, 41, 43), & (97, 101, 103). \\ (13, 17, 19), & (67, 71, 73), & \end{array}$$

Hipoteza Dicksona pociągałaby za sobą istnienie nieskończenie wielu trojaczków obu typów.

Rozważmy teraz dowolną liczbę naturalną $r > 0$. Zastanówmy się, jak długi może być ciąg arytmetyczny o różnicy r , złożony z samych liczb pierwszych. Przypadek $r = 2$ już rozważyliśmy – trójka $(3, 5, 7)$ to jedyny ciąg arytmetyczny liczb pierwszych o różnicy 2 i długości 3 (w szczególności, nie ma dłuższego takiego ciągu). Załóżmy zatem, że $r \geq 3$. Niech p_1, p_2, \dots, p_n będzie najdłuższym takim ciągiem i niech q będzie najmniejszą liczbą pierwszą, która nie dzieli r . Przypuśćmy, że $n \geq q$. Ponieważ q jest liczbą pierwszą i $q \nmid r$, to liczby p_1, \dots, p_q dają różne reszty z dzielenia przez q ; skoro liczb tych jest co najmniej q , występuje wśród nich liczba p_i podzielna przez q , a że są to liczby pierwsze, musi być $p_i = q$. Ponadto różnica między kolejnymi dwoma jest równa r (czyli, dla $r \geq 3$, więcej niż q), a zatem $i = 1$. Wynika stąd również, że w takim wypadku $n = q$ (gdyby $n > q$, to $p_{q+1} = q(1 + r)$ byłoby liczbą złożoną). Z drugiej strony, z prawdziwości hipotezy Dicksona wynikałoby, że istnieje nieskończenie wiele ciągów arytmetycznych liczb pierwszych o różnicy r długości $q - 1$.

Przykład 5. Weźmy $r = 6$. Mamy tu $q = 5$, zatem $n \leq 5$. Jeśli $n = 5$, musi być $p_1 = 5$. Sprawdzamy, że ciąg arytmetyczny $(5, 11, 17, 23, 29)$ o różnicy 6 składa się z samych liczb pierwszych. Niech teraz $r = 36$. Ponownie $q = 5$, więc sprawdzamy ciąg $(5, 41, 77, 113, 149)$, ale liczba 77 jest złożona. Wobec tego musi być $n < 5$. Zgodnie z hipotezą Dicksona czterowrazowych ciągów arytmetycznych liczb pierwszych o różnicy $r = 36$ jest nieskończenie wiele. Takim jest na przykład ciąg $(31, 67, 103, 139)$.

Artykuł zakończymy przedstawieniem *hipotezy Schinzla*, która jest uogólnieniem jednocześnie hipotezy Buniakowskiego i hipotezy Dicksona. Hipoteza Schinzla orzeka, że hipoteza Dicksona jest prawdziwa również, gdy zamiast funkcji liniowych weźmiemy dowolne wielomiany nierozkładalne (przy założeniu o braku „trywialnych podzielności”, wynikających z prostych kongruencji, podobnie jak w hipotezie Buniakowskiego).

Przykład 6. $s = 2$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2 + x + 1$.

Na przykład liczby

$$\begin{array}{ll} 2^2 + 2 + 1 = 7, & 5^2 + 5 + 1 = 31, \\ 3^3 + 3 + 1 = 13, & 17^2 + 17 + 1 = 307 \end{array}$$

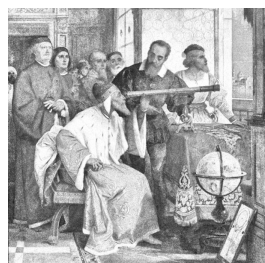
są liczbami pierwszymi.

James Clerk Maxwell i pierścienie Saturna

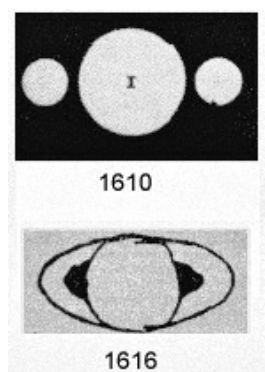
* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



James Clerk Maxwell



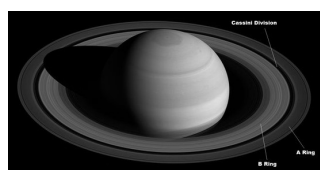
25 sierpnia 1609 roku Galileusz zademonstrował weneckim prawodawcom jeden z pierwszych teleskopów



Szkice „księżyców” i „ramion” Saturna, z notatek Galileusza; odpowiednio z 1610 i 1616 roku



Christiaan Huygens (portret z 1671 r.)



Przerwa Cassiniego

Mateusz DEMBNY*

Celem tego artykułu jest zainteresowanie Czytelnika historią obserwacji pierścieni Saturna, ze szczególnym uwzględnieniem wkładu Jamesa Clerka Maxwella (1831–1879) w wyjaśnienie natury tych pierścieni. Nazwisko Maxwella kojarzymy głównie z równaniami pola elektromagnetycznego oraz kinetyczną teorią ciepła, jednak jego wkład w wyjaśnienie struktury pierścieni Saturna jest równie doniosły i stanowi ostateczne rozwiązanie problemów postawionych przez XVII-wiecznych astronomów.

Odkrycie pierścieni Saturna

Saturn znany był już starożytnym, choć nie byli oni świadomi istnienia jego pierścieni. Pierwszym, który do obserwacji tej planety wykorzystał teleskop (w 1610 r.), był Galileusz (1564–1642), jednak z powodu prostoty swojego teleskopu nie był on w stanie określić, czym są pierścienie. Błędnie zgadywał, że po obu stronach Saturna znajdują się dwa duże księżyce! Dwa lata później, kiedy ponownie mu się przyjrzał, „księżyce” zniknęły – teraz wiemy, że za drugim razem patrzył na pierścienie, gdy były ustawione krawędzią, przez co były niedostrzegalne. Galileusz uznał, że jest to bardzo dziwne. W kolejnych latach ponownie zwrócił uwagę na Saturna i odkrył, że „księżyce” powróciły. Doszedł do wniosku, że pierścienie to pewnego rodzaju „ramiona”.

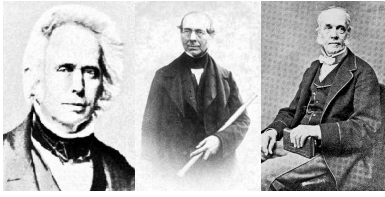
Lata później Christiaan Huygens (1629–1695) rozwiązał zagadkę „ramion” Saturna. Dzięki ulepszonej optyce teleskopu poprawnie wydedukował, że „ramiona” były w rzeczywistości pierścieniem. Swoje odkrycie opublikował w 1659 roku w dziele *Systema Saturnium*. Nie było to pierwsze odkrycie Huygensa związane z Saturnem – cztery lata wcześniej zaobserwował jego pierwszy księżyc – Tytana.

Kilka lat po odkryciu Huygensa Giovanni Domenico Cassini (1625–1712) odkrył wąską szczelinę, która dzieli pierścienie Saturna na dwie części. Pierścienie te nazwano A i B, a sama szczelina, nazwana później przerwą Cassiniego, to obszar o szerokości 4800 km. Jednak to nie koniec odkryć Cassiniego związanych z Saturnem. W latach 1671–1684 w obserwatorium paryskim, którego był założycielem, odkrył 4 inne księżyce tej planety: Japeta, Reę, Tetydę i Dione. Obserwacji tych dokonał za pomocą teleskopu refrakcyjnego z 2,5-calowym obiektywem pozwalającym na 90-krotne powiększenie obrazu.

Trzeci pierścień Saturna został odkryty niezależnie przez trzech uczonych. Pierścień C jako pierwszy odkrył George Bond (1825–1865) w Cambridge, Massachusetts, w Stanach Zjednoczonych, 15 listopada 1850 roku. Następnie William Dawes (1799–1868), nieświadomy odkrycia Bonda, zaobserwował ten pierścień 29 listopada tego samego roku w prywatnym obserwatorium w swoim domu na wsi – Haddenham w hrabstwie Buckinghamshire, w środkowej Anglii, a kilka dni później zaobserwował go jego przyjaciel William Lassell (1799–1880), również w domowym obserwatorium – w Liverpoolu, w północnej Anglii.

Jednak te odkrycia nie odpowiedziały na kluczowe pytanie o strukturę pierścieni i ich ewentualną stabilność. Tym problemem, który umykał naukowcom przez ponad 200 lat, zajął się 25-letni Maxwell (w listopadzie 1856 r. objął profesurę na Marischal College w Aberdeen, w Szkocji).

Pytanie o naturę pierścieni Saturna nabrało w tym czasie szczególnego znaczenia, ponieważ stanowiło temat ogłoszonego przez St John's College w Cambridge (Wielka Brytania) konkursu do Nagrody Adamsa w 1857 roku. Należało odnieść się do hipotez na temat budowy pierścieni, to znaczy rozstrzygnąć, czy są one bryłami sztywnymi, strumieniem cząstek, czy płynem. Adams Prize jest jedną z najbardziej prestiżowych nagród przyznawanych przez Uniwersytet Cambridge. Jest ona przyznawana przez St John's College do dzisiaj, obecnie co roku, matematykowi z Wielkiej Brytanii za wybitne osiągnięcia w dziedzinie nauk matematycznych.



Od lewej:
G. Bond (prawdopodobnie), W. Dawes,
W. Lassell

* Zachęcamy Czytelnika do samodzielnego porównania zmiany wartości niektórych walut na stronie www.in2013dollars.com.

Maxwell poświęcił dwa lata na zbadanie tego problemu i udowodnił, że pierścienie składają się z wielu małych cząstek, z których każda niezależnie okrąża Saturna. W 1859 roku otrzymał £130 nagrody (równowartość ok. 100 000 zł w dzisiejszej walucie*) za esej *On the stability of the motion of Saturn's rings*, przy czym był jedynym uczestnikiem, który zrobił wystarczająco duże postępy, aby przesłać zgłoszenie.

Jego praca była tak szczegółowa i przekonująca, że kiedy George Airy (1801–1892) ją przeczytał, skomentował:

It is one of the most remarkable applications of mathematics to physics that I have ever seen.

Cytowane za [O'Connor, Robertson]

Prześledźmy podejście Maxwella do tego problemu, zawarte w jego pracy konkursowej.

Esej Maxwella o stabilności pierścieni

Maxwell zaczyna swoją pracę od streszczenia rozważań Laplace'a (1749–1827) o ruchu pierścieni Saturna. W swoich traktatach *Traité de mécanique céleste*, pisanych w latach 1798–1825, Laplace badał siły przyciągania działające na pierścieniach. Stąd wyprowadził równanie pozwalające wyznaczyć stosunek szerokości pierścienia do jego grubości. Oznaczmy ten stosunek przez λ . Wspomniane równanie to:

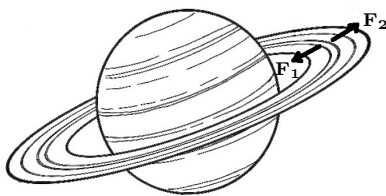
$$e = \frac{R_S^3 \rho_S}{3R_R^3 \rho_R} = \frac{\lambda(\lambda - 1)}{(\lambda + 1)(3\lambda^2 + 1)},$$

gdzie R_S to promień Saturna, z jego gęstością ρ_S , a R_R to promień pierścienia o gęstości ρ_R .

Nietrudno się przekonać, że funkcja $\frac{\lambda(\lambda-1)}{(\lambda+1)(3\lambda^2+1)}$ (określona dla $\lambda > 0$) jest najpierw rosnąca, a potem malejąca, swoją maksymalną wartość $e_0 = 0,0543$ otrzymując dla $\lambda = 2,594$ – są to wartości przybliżone podane przez Laplace'a. Stąd jeśli e jest dane, to równanie na λ ma dwa dodatnie pierwiastki, gdy $e < e_0$, oraz nie ma ich w ogóle, gdy e jest większe. Brak rozwiązań dla zbyt dużych wartości e pokazuje, że pierścień nie może się utrzymać, jeśli stosunek gęstości planety do gęstości pierścienia przekracza pewną wartość. Przy dodatkowym założeniu $R_R = 2R_S$ Laplace podał ją w przybliżeniu:

$$\frac{\rho_S}{\rho_R} = e_0 \cdot 3 \cdot (R_R/R_S)^3 \approx \frac{13}{10}.$$

Zastanówmy się, jakie siły działają na pierścień.

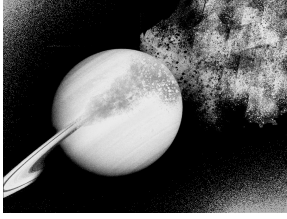


Siły 1 i 2 działające na pierścień

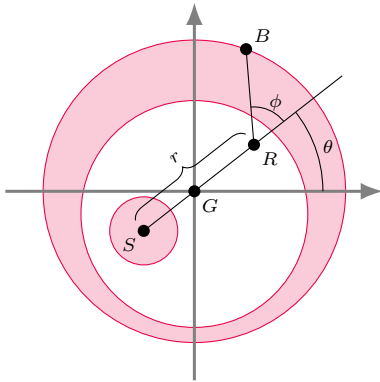
1. Przyciąganie Saturna – zmieniające się odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu odległości od jego środka.
2. Siła odśrodkowa cząstek pierścienia – działająca na zewnątrz i zmieniająca się wraz z odległością od osi biegunowej Saturna.
3. Przyciąganie samego pierścienia – w zależności od jego formy i gęstości skierowane, w uproszczeniu, w kierunku środka jego przekroju.

Pierwsza z tych sił musi zrównoważyć drugą gdzieś w pobliżu środka pierścienia. Jeśli nie, zewnętrzne i wewnętrzne części pierścienia będą miały tendencję do rozdzielania się, a pierścień ulegnie rozszczepieniu; z przytoczonych wcześniej rachunków Laplace'a wynika, że tak będzie, jeśli gęstość pierścienia będzie mniejsza niż $\frac{10}{13}$ gęstości planety.

We wspomnianych traktatach Laplace wykazał również, że płaszczyzny pierścieni będą podążać za równikiem Saturna przy każdej zmianie jego położenia z powodu zakłócającego działania innych ciał niebieskich. Ponadto pokazuje on, że sztywny, jednorodny pierścień nie może trwale obracać się wokół ciała centralnego, ponieważ najmniejsze przesunięcie środka pierścienia względem środka planety wywołałoby ruch, który nie zostanie powstrzymany i nieuchronnie wytrąci pierścień. We wniosku, na podstawie swoich rozważań, Laplace uznał, że pierścienie są niejednorodnymi bryłami sztywnymi, których środki ciężkości nie pokrywają się z ich środkami geometrycznymi (o różnicy



Hipotetyczny rozpad pierścieni



Ruch pierścienia wokół planety. Rysunek „w ogólności”, dopuszczający niekoncentryczność rozważanych okręgów. S – środek ciężkości Saturna
 R – środek ciężkości pierścienia
 G – środek grawitacyjny całego układu
 B – ustalony punkt na pierścieniu

między tymi pojęciami można przeczytać w tekście Wojciecha Kopczyńskiego z Δ_{99}^6 przedrukowanym w Δ_{22}^{10}). Maxwell zauważył, że ten wniosek jest nieprawdziwy – poprawne rozumowanie wraz z konkluzją to:

Twierdzenie 1. *Gdyby pierścienie były sztywne i jednorodne, to do tej pory uległyby zniszczeniu. Tak się nie stało. W konsekwencji pierścienie są niejednorodne lub nieszttywne.*

Zgodnie z tematem konkursu należało odnieść się do ewentualnej stabilności układu pierścieni. Maxwell zdefiniował ją w następujący sposób:

Definicja 1. Ruch jest *dynamicznie stabilny*, jeśli niewielkie zaburzenie spowoduje okresowe wahanie (o małej amplitudzie) elementów ruchu. Jeśli niewielkie zaburzenie spowoduje zmianę, która narastałaby w nieskończoność i trwale zniekształcała układ, to taki ruch nazwiemy *dynamicznie niestabilnym*.

W jaki sposób Maxwell odrzucił hipotezę, że pierścien jest bryłą sztywną? Był to wynik błyskotliwej analizy własności mechanicznych oraz dynamicznych układu. Aby modelować ruch pierścieni wokół Saturna, wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech S i R oznaczają odpowiednio środki grawitacyjne Saturna oraz jego pierścienia. Wybierzmy punkt G – środek grawitacyjny systemu (niezmienniczy względem wzajemnych działań układu). Dzieli on odcinek SR w proporcji

$$\frac{SG}{GR} = \frac{m_R}{m_S},$$

gdzie m_S, m_R oznaczają odpowiednio masę Saturna i jego pierścienia. Następnie musimy opisać siły działające między pierścieniem a planetą, a zrobimy to za pomocą *funkcji potencjału*. Oznaczmy ją przez V . Wartość V w każdym punkcie Saturna uzależniamy od położenia danego punktu względem pierścienia. Mamy

$$(1) \quad V = \sum \frac{dm}{r'},$$

gdzie dm jest elementem masy pierścienia, r' – odległością tego elementu od danego punktu, oraz sumujemy po wszystkich elementach masy należących do pierścienia. Potencjał V będzie zależeć wyłącznie od położenia punktu S względem pierścienia, zatem można go wyrazić w zmiennych r i ϕ (których znaczenie przedstawia rysunek na marginesie), czyli $V = V(r, \phi)$.

Należy skomentować, że wzór (1) jest nieścisły z punktu widzenia współczesnej matematyki. Jest to spore uproszczenie, które jednak wystarczyło Maxwellowi do przeprowadzenia koniecznych obliczeń. Wzór (1) jest natomiast zbliżony do współczesnej definicji potencjału z rozkładem masy zadany przez miarę m . Wtedy potencjałem jest splot $-\frac{G}{|x|} * dm$, czyli

$$V(x) = - \int_{\mathbb{R}^3} G \frac{dm(y)}{|x-y|},$$

gdzie G jest stałą grawitacji. Z definicji potencjału Maxwell wyprowadził równania opisujące ruch pierścienia:

$$(2) \quad m_R (2r \cdot \dot{r}\dot{\theta} + r^2 \cdot \dot{\theta}^2) + (m_R + m_S) \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0,$$

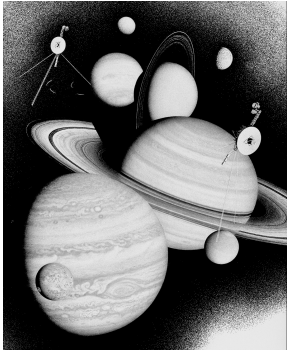
$$(3) \quad m_R (\ddot{r} - r \cdot \dot{\theta}^2) - (m_R + m_S) \frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

$$(4) \quad m_R k^2 (\ddot{\theta} + \ddot{\phi}) - m_S \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0,$$

gdzie k jest promieniem bezwładności pierścienia względem jego środka ciężkości. Za ich pomocą określił, czy ruch pierścienia jest stabilny, czy niestabilny, wyznaczył jego środek ciężkości i potencjał w pobliżu środka pierścienia oraz znalazł warunki na stabilność ruchu w terminach współczynników rozwinięcia w szereg Fouriera funkcji masy jednostki długości pierścienia. Rozwiążmy za Maxwellem prosty problem.



Hipotetyczna, sporej wielkości, punktowa masa na obwodzie, której jednak nie obserwujemy



Artystyczna wizja sond kosmicznych Voyager (1977-) z mijanymi planetami zewnętrznymi. Obraz autorstwa Dona Davisa zamówiony przez Jet Propulsion Laboratory dla upamiętnienia misji.

Źródła:

- [1] James C. Maxwell, *On the stability of the motion of Saturn's rings*, Cambridge University Press, 1859.
- [2] James Clerk Maxwell Foundation, *Saturn's Rings*, poster, 2015. clerkmaxwellfoundation.org/Saturn-s_Rings.pdf
- [3] J.J. O'Connor, E.F. Robertson, *James Clerk Maxwell*, School of Mathematical and Computational Sciences University of St Andrews (November 1997). mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Maxwell/
- [4] MicroObservatory Robotic Telescope Network, *Saturn – Then & Now*, strona internetowa, Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, 2009. mo-www.harvard.edu/microobs/guestobserverportal/Galileo/ThenNow/Saturn/mObsSaturnWeb.htm
- [5] Huygens GCMS: Huygens Gas Chromatograph Mass Spectrometer, *History of Saturn*, strona internetowa, NASA. attic.gsfc.nasa.gov/huygensgcms/Shistory.htm
- [6] David Sky Brody, *Kingdom of Saturn – Cassini's Epic Quest*, film dokumentalny, 2017.

Zadanie 1. Znaleźć warunki konieczne dla jednostajnego ruchu pierścienia.

Jednostajny ruch oznacza, że r i ϕ są stałe w czasie, a zatem $V = V(r, \phi)$ też. Z równania (3) mamy:

$$m_{Rr} \cdot \dot{\theta}^2 + (m_R + m_S) \frac{\partial V}{\partial r} = 0,$$

co pokazuje, że prędkość kątowna $\dot{\theta}$ jest stała w czasie i zachodzi wzór:

$$\dot{\theta}^2 = - \frac{m_R + m_S}{m_{Rr}} \frac{\partial V}{\partial r} = \text{const.}$$

W konsekwencji mamy $\ddot{\theta} = 0$. Ponadto z (4) otrzymujemy:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0,$$

i to są warunki, o które nam chodziło.

Podsumowanie pracy

W dalszej części eseju Maxwell pokazuje, że sztywny pierścień nie może być stabilny poza przypadkiem, gdyby na jego obwodzie znajdowała się sporej wielkości punktowa masa, a nic takiego nie zaobserwowano. Z drugiej strony, płynny pierścień w żadnym wypadku nie jest stabilny i z konieczności musiałby podzielić się na małe porcje. Ostatnim przypadkiem do rozważenia jest układ pierścieni złożony z ogromnej liczby niepołączonych cząstek, krążących wokół planety. Co wiemy o stabilności tego układu? Czy stabilność zależy od ustawienia tych cząstek względem siebie? Maxwell stwierdził, że niezależnie od tego, czy cząstki są ułożone w szeregi wąskich pierścieni, czy mogą poruszać się między sobą niezależnie od siebie, w obu przypadkach wzajemne perturbacje wewnątrz pierścieni będą z czasem narastać do niszczycielskich wielkości, co w przyszłości poskutkuje ich unicestwieniem. Jak zatem rozstrzygnięto, która hipoteza na temat budowy pierścieni Saturna jest słuszna? Niestabilność w dwóch pierwszych przypadkach postępowałaby na tyle szybko, że proces destrukcji układu pierścieni byłby już wtedy obserwowalny, natomiast rozpad pierścieni jako strumienia cząstek postępowałby bardzo wolno. Ostatnie zdanie autor musi poprzeć autorytetem Maxwella, ponieważ zabrakłoby tu miejsca nawet na streszczenie dziesiątek stron modelowania ruchu pierścienia oraz badania własności dynamicznych opartych na obliczeniach wykonanych w tych modelach. Zatem jedyny system pierścieni, jaki może istnieć, to ten złożony z ogromnej liczby cząstek.

Późniejsze obserwacje dokonane przez sondy Voyager w latach 80. XX wieku potwierdziły przewidywania Maxwella, że pierścienie składają się z cząstek, które nie są stabilne. Oczekuje się, że pierścienie znikną całkowicie w ciągu najbliższych 300 milionów lat (obecnie ich wiek szacuje się na od 10 milionów do 100 milionów lat).

Artykuł powstał jako rozszerzenie referatu zaprezentowanego na seminarium „Rewolucja Newtonowska. Matematyka i astronomia XVII wieku”, które odbywa się na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.



Rozwiązanie zadania F 1063. Podczas procesu rozpadu cząstki spełnione są zasady zachowania energii i pędu. Oznacza to, że:

$$E_1 + E_2 = mc^2$$

oraz

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0.$$

Z bilansu energii widać, że energie całkowite obu powstających mezonów π są porównywalne z ich masami spoczynkowymi. Musimy więc opisywać proces rozpadu w ramach szczególnej teorii względności.

Niech oś x będzie równoległa do \vec{p}_1 . Mamy wówczas $p_{1x} = p$ i $p_{2x} = -p$ (pozostałe składowe wektorów pędu są równe zeru). Energie i pędy cząstek związane są zależnościami:

$$E_1^2 - p^2 c^2 = m_1^2 c^4,$$

$$E_2^2 - p^2 c^2 = m_2^2 c^4.$$

Skąd otrzymujemy:

$$E_1^2 - E_2^2 = (E_1 + E_2)(E_1 - E_2) = (m_1^2 - m_2^2)c^4.$$

Po kilku prostych przekształceniach, pamiętając, że $E_1 + E_2 = mc^2$, otrzymujemy ostatecznie:

$$E_1 = \frac{(m^2 + m_1^2 - m_2^2)c^2}{2m},$$

$$E_2 = \frac{(m^2 + m_2^2 - m_1^2)c^2}{2m}.$$

Liczbowo:

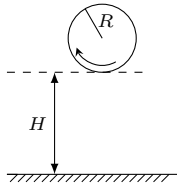
$$E_1 = 284,4 \text{ MeV} \text{ i } E_2 = 245,6 \text{ MeV}.$$

Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2023

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl



Rys. 1

Zadania z fizyki nr 750, 751

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

750. Koło rowerowe spada swobodnie z wysokości H (rys. 1) i po odbiciu podskakuje na wysokość h . Koło to rozkręcono do prędkości kątowej ω_0 i puszczono swobodnie z tej samej wysokości. Pod jakim kątem od pionu odbije się ono od podłoża? Współczynnik tarcia między kołem a podłożem wynosi μ , promień koła R . Zakładamy, że cała masa koła skupiona jest na jego obwodzie.

751. Kondensator płaski naładowany ładunkiem Q wypełnia płytka z dielektryka o stałej dielektrycznej ε . Powierzchnia okładek wynosi S , odległość między okładkami jest równa d . Znaleźć energię zgromadzoną w dielektryku w wyniku jego polaryzacji. Przyjąć, że dielektryk jest niepolarny.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2022

Przypominamy treść zadań:

742. Mała drewniana kulka przymocowana jest za pomocą nierozciągliwej nici o długości $l = 30$ cm do dna cylindrycznego naczynia z wodą. Odległość środka dna do punktu zaczepienia nici $r = 20$ cm. Naczynie rozkręcono wokół osi pionowej przechodzącej przez środek dna. Przy jakiej prędkości kątowej nić odchyła się od pionu o kąt $\alpha = \pi/6$?

743. W obwodzie przedstawionym na rysunku 3 ze źródłem o sile elektromotorycznej U_0 i zaniedbywalnym oporze wewnętrznym połączone są szeregowo kondensatory o pojemnościach C i $3C$. Po zamknięciu klucza K równoległe do kondensatora o pojemności $3C$ dołączamy połączone szeregowo cewkę o indukcyjności L oraz idealną diodę. a) Znaleźć maksymalną wartość natężenia prądu płynącego przez cewkę. b) Jakie będzie napięcie na kondensatorze o pojemności C , gdy prąd przestanie płynąć przez cewkę? c) Ile czasu prąd będzie płynął przez cewkę?

742. Na kulkę działa siła naprężenia nici N , siła ciężkości $F_g = mg = V\rho g$, gdzie V jest objętością kulki, a ρ jej gęstością, oraz siła Archimedesesa F_A , czyli siła spowodowana ciśnieniem otaczającej wody (rys. 2). Gdy zastąpimy kulkę na nitce elementem wody, siła Archimedesesa nie zmienia się, a wypadkowa tej siły i ciężaru elementu wody będzie siłą dośrodkową

$$\vec{F}_A = V\rho_w(\vec{a}_d - \vec{g}),$$

gdzie ρ_w jest gęstością wody, \vec{a}_d przyspieszeniem dośrodkowym. Składowe siły Archimedesesa w kierunku poziomym i pionowym wynoszą odpowiednio:

$$(1) \quad F_{A1} = V\rho_w\omega^2(r - l \sin \alpha), \quad F_{A2} = V\rho_w g.$$

Równanie ruchu obrotowego drewnianej kulki na nitce ma postać:

$$(2) \quad \rho V \omega^2 (r - l \sin \alpha) = F_{A1} - N \sin \alpha,$$

a warunek równowagi sił w kierunku pionowym:

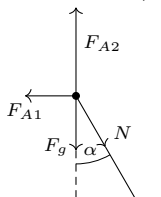
$$(3) \quad \rho V g = F_{A2} - N \cos \alpha.$$

Rozwiązując układ równań (1) – (3), otrzymujemy

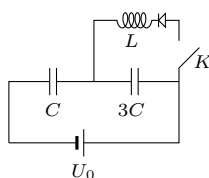
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_{A1}}{F_{A2}} = \frac{\omega^2 (r - l \sin \alpha)}{g}.$$

Wypadkowa siła Archimedesesa działa więc w kierunku zgodnym z kierunkiem nici, a szukana prędkość kątowa

$$\omega = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{(r - l \sin \alpha)}} = \frac{10,6}{s}.$$



Rys. 2



Rys. 3

743. Przed zamknięciem klucza ładunki na obu kondensatorach są jednakowe i wynoszą $q_0 = \frac{3CU_0}{4}$.

(a) Po zamknięciu klucza, gdy prąd płynący przez cewkę osiąga maksymalną wartość, napięcie na cewce i na kondensatorze o pojemności $3C$ staje się równe

zeru, a ładunek na kondensatorze o pojemności C osiąga w tym momencie wartość CU_0 . Przez źródło przepłynął ładunek $CU_0 - q_0 = \frac{CU_0}{4}$. Zgodnie z zasadą zachowania energii

$$-\frac{3CU_0^2}{8} + \frac{CU_0^2}{2} + \frac{LI_{\max}^2}{2} = U_0 \frac{CU_0}{4}.$$

Stąd maksymalne natężenie prądu płynącego przez cewkę wynosi

$$I_{\max} = \frac{U_0}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

(b) Oznaczmy przez U napięcie na kondensatorze o pojemności C , gdy prąd przez cewkę już nie płynie. Napięcie na drugim kondensatorze wynosi wtedy $U_0 - U$. Bilans energetyczny dla procesu od chwili zamknięcia klucza do chwili, gdy prąd przestaje płynąć przez cewkę, ma postać:

$$\frac{CU^2}{2} + \frac{3C(U_0 - U)^2}{2} - \frac{3CU_0^2}{8} = U_0 \left(CU - \frac{3CU_0}{4} \right),$$

stąd $U = U_0 \pm \frac{U_0}{4}$. Ponieważ $U > U_0$ (napięcie na kondensatorze o pojemności $3C$ jest ujemne), końcowe napięcie na kondensatorze o pojemności C wynosi

$$U = \frac{5U_0}{4}.$$

(c) Oznaczmy ładunki na kondensatorach o pojemnościach $3C$ i C w pewnej chwili badanego procesu odpowiednio przez q_1 i q_2 . Suma napięć na kondensatorach jest stała, zatem $\frac{\delta q_1}{3C} + \frac{\delta q_2}{C} = 0$. Gdy z kondensatora $3C$ odpłynie ładunek δq_1 , na kondensator C dopłynie ładunek $\delta q_2 = \frac{\delta q_1}{3}$, a przez cewkę przepłynie ładunek $\delta q = \frac{4\delta q_1}{3}$. Drugie prawo Kirchhoffa dla górnego oczka obwodu ma postać:

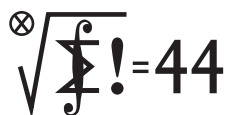
$$\frac{q_1}{3C} = -\frac{LdI}{dt} = -\frac{Ld^2q}{dt^2} = -\frac{4L}{3} \cdot \frac{d^2q_1}{dt^2}.$$

Ładunek q_1 spełnia równanie oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{q_1}{4CL} = 0.$$

Okres drgań wynosi $T = 4\pi\sqrt{LC}$, a szukany czas procesu $t = \frac{T}{2} = 2\pi\sqrt{LC}$.

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2023

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: deltami.edu.pl

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 843 ($WT = 2,09$) i 843 ($WT = 1,59$) z numeru 6/2022

| | | |
|--------------------|----------|-------|
| Jerzy Cisko | Wrocław | 47,65 |
| Stanisław Bednarek | Łódź | 42,60 |
| Krzysztof Maziarz | Kraków | 40,67 |
| Tomasz Wietecha | Tarnów | 39,23 |
| Paweł Najman | Kraków | 38,88 |
| Mikołaj Pater | Opole | 38,30 |
| Krzysztof Zygan | Lubin | 38,26 |
| Marcin Kasperski | Warszawa | 37,65 |
| Adam Woryna | Ruda Śl. | 36,14 |
| Radosław Kujawa | Wrocław | 35,83 |
| Janusz Olszewski | Warszawa | 34,88 |
| Norbert Porwol | Essen | 34,16 |

Jerzy Cisko – przekroczenie 44 p. po raz 2⁴; drugi (w historii Ligi) uczestnik z takim osiągnięciem!

Widać też, że w bliskim czasie czeka nas zmasowane mijanie linii mety!

Zadania z matematyki nr 853, 854

Redaguje Marcin E. KUCZMA

853. Rozstrzygnąć, czy suma skończenie wielu czworokątów wklęsłych o rozłącznych wnętrzach może być wielokątem wypukłym (czworokąt wklęsły to taki, w którym jeden z kątów wewnętrznych jest większy od kąta półpełnego). Czy odpowiedź zmieni się, jeśli zamiast wklęsłych czworokątów będziemy rozważać wklęsłe pięciokąty?

854. Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że liczba przedstawień n w postaci sumy dwóch nieujemnych liczb trójkątnych jest równa liczbie przedstawień liczby $4n + 1$ w postaci sumy kwadratów dwóch nieujemnych liczb całkowitych (utożsamiamy przedstawienia różniące się tylko kolejnością składników).

Zadanie 854 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2022

Przypominamy treść zadań:

845. Udowodnić nierówność dla liczb nieujemnych x_1, \dots, x_n oraz y_1, \dots, y_n :

$$\left(\sum_{i \neq j} x_i y_j\right)^2 \geq \left(\sum_{i \neq j} x_i x_j\right) \left(\sum_{i \neq j} y_i y_j\right)$$

(każda z trzech napisanych sum ma $n(n-1)$ składników odpowiadających wszystkim uporządkowanym parom (i, j) różnych numerów $i, j \in \{1, \dots, n\}$).

846. Ostrosłup ścięty, którego podstawami są podobne wielokąty o znanych polach A i B , został podzielony płaszczyznami π_1, \dots, π_{n-1} , równoległymi do podstaw, na n wielościanów o równych objętościach; płaszczyzna π_k leży między płaszczyznami π_{k-1} i π_{k+1} (dla $k = 1, \dots, n-1$), gdzie π_0, π_n to płaszczyzny zawierające, odpowiednio, podstawy o polach A, B . Obliczyć pole przekroju ostrosłupa każdą z płaszczyzn π_k .

845. Przyjmijmy oznaczenia

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n y_i,$$

$$Q_x = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad Q_y = \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad T = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

i odnotujmy oszacowania:

$$(1) \quad Q_x \leq S_x^2, \quad Q_y \leq S_y^2, \quad T^2 \leq Q_x Q_y$$

(ostatnia zależność to nierówność Cauchy'ego-Schwarza).

Daną do udowodnienia nierówność przepisujemy w postaci

$$(2) \quad (S_x S_y - T)^2 \geq (S_x^2 - Q_x)(S_y^2 - Q_y),$$

po czym przekształcamy do postaci kolejno równoważnych:

$$S_x^2 Q_y + S_y^2 Q_x - 2S_x S_y T \geq Q_x Q_y - T^2;$$

$$(S_x \sqrt{Q_y} - S_y \sqrt{Q_x})^2 + 2S_x S_y (\sqrt{Q_x Q_y} - T) \geq$$

$$\geq (\sqrt{Q_x Q_y} - T)(\sqrt{Q_x Q_y} + T);$$

i wreszcie

$$(3) \quad (S_x \sqrt{Q_y} - S_y \sqrt{Q_x})^2 + (\sqrt{Q_x Q_y} - T) [2S_x S_y - \sqrt{Q_x Q_y} - T] \geq 0.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym to suma

$$2(S_x S_y - \sqrt{Q_x Q_y}) + (\sqrt{Q_x Q_y} - T),$$

której oba składniki są nieujemne (co widać z oszacowań (1)). To uzasadnia nierówność (3), więc i równoważną jej nierówność (2).

846. Przyjmijmy, że $A > B$. Rozważany ostrosłup ścięty powstał w wyniku przecięcia (płaszczyzną π_n) pełnego ostrosłupa o podstawie w płaszczyźnie π_0 i wierzchołku („czubku”) Z i odrzucenia części położonej po tej stronie płaszczyzny π_n co punkt Z .

Niech S_k będzie polem przekroju ostrosłupa płaszczyzną π_k (dla $k = 0, \dots, n$; dane są więc wartości $S_0 = A, S_n = B$) i niech V_k będzie objętością ostrosłupa o wierzchołku Z , którego podstawą jest ów k -ty przekrój; jego wysokość h_k to odległość punktu Z od płaszczyzny π_k .

Z warunku zadania wynika, że objętości V_0, \dots, V_n tworzą ciąg arytmetyczny. Wobec tego

$$(4) \quad V_k = \frac{n-k}{n} V_0 + \frac{k}{n} V_n \quad \text{dla } k = 0, \dots, n.$$

Rozważane ostrosłupy o wierzchołku Z są bryłami podobnymi. Stosunek pól $S_k : S_0$ to kwadrat skali podobieństwa $h_k : h_0$. Stąd

$$(5) \quad h_k = h_0 \sqrt{\frac{S_k}{S_0}} \quad \text{dla } k = 0, \dots, n.$$

Pamiętając szkolny wzór $V_k = \frac{1}{3} S_k h_k$, wstawiamy do wzoru (4) równość (5) (brana dla bieżącego wskaźnika k oraz dla $k = n$), mnożymy przez 3 i otrzymujemy

$$S_k h_0 \sqrt{\frac{S_k}{S_0}} = \frac{n-k}{n} S_0 h_0 + \frac{k}{n} S_n h_0 \sqrt{\frac{S_n}{S_0}}.$$

Proste przekształcenie (po skróceniu czynnika h_0 i powrocie do oznaczeń $S_0 = A, S_n = B$) daje odpowiedź na pytanie z zadania:

$$S_k = \left(\frac{n-k}{n} A^{3/2} + \frac{k}{n} B^{3/2}\right)^{2/3} \quad \text{dla } k = 0, \dots, n.$$

Prosto z nieba: Czerwone galaktyki spiralne

Galaktyki spiralne są młode (oczywiście w skali Wszechświata) i emitują niebieskie światło młodych gwiazd, galaktyki eliptyczne są stare i emitują światło czerwone starej populacji gwiazdowej. Jest to prawdopodobnie jeden z najbardziej fundamentalnych i najprostszych faktów, o których dowiaduje się student na początku każdego kursu lub wykładu o astronomii.

W ogromnym skrócie, w większości przypadków, proces ewolucji galaktyk wygląda tak, że galaktyki rodzą się jako niebieskie galaktyki spiralne tworzące gwiazdy. Następnie w wyniku kolizji z innymi galaktykami przybierają kształt eliptyczny. W czasie tych zderzeń galaktyki zostają też pozbawione gazu, z którego tworzone są nowe gwiazdy, przez co zanikają w nich procesy gwiazdotwórcze. Istniejące w takich galaktykach gwiazdy starzeją się i galaktyka przyjmuje czerwony odcień charakterystyczny dla umierających gwiazd.

W tym artykule napiszę o obiektach zupełnie niepasujących do tego scenariusza. Okazuje się bowiem, że istnieją czerwone galaktyki spiralne. Są one niezwykle rzadkie, bo szacuje się, że stanowią tylko około 2% wszystkich galaktyk w lokalnym Wszechświecie. Ale aż trzy takie galaktyki zostały zaobserwowane przez kosmiczny teleskop Jamesa Webba (JWST).

Spiralne galaktyki czerwone, o których mowa, znajdują się na zdjęciu gromady galaktyk SMACS 0723. Bez trudu można ją znaleźć na stronach NASA.

Co więcej, wszystkie trzy znajdują się na jednym zdjęciu. JWST nie był pierwszym, który odkrył te galaktyki, jednak dzięki dużej rozdzielczości zdjęć po raz pierwszy została ujawniona ich spiralność.

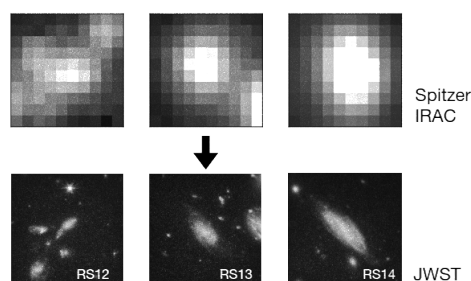
Oparte na artykule: Yoshinobu Fudamoto, Akio K. Inoue, Yuma Sugahara, *Red Spiral Galaxies in the Cosmic Noon Unveiled in the First JWST Image*, arXiv:2208.00132.

* Departament Badań Podstawowych (BP4), Zakład Astrofizyki, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Niebo w styczniu

Od początku roku Słońce wznosi się powoli, przemierzając gwiazdozbiór Strzelca. W drugiej połowie miesiąca, 20 stycznia, przejdzie ono do gwiazdozbioru Koziorożca, a następnej doby przetnie równoleżnik -20° deklinacji w drodze na północ, i od tego momentu czas jego przebywania nad widnokresem zacznie się szybko wydłużać. Jak zawsze na początku roku, Ziemia przechodzi przez peryhelium swojej orbity. W tym roku przejście nastąpi 4 stycznia. W związku z tym w styczniu tarcza Słońca ma największą średnicę kątową i pokonuje w ciągu doby największy dystans wzdłuż ekliptyki. Stąd jeśli w styczniu dochodzi do zaćmienia

Za czerwony kolor tych spiralnych galaktyk może być odpowiedzialnych kilka czynników, z których najbardziej prawdopodobne to: (i) z jakiegoś powodu nie powstają w nich nowe gwiazdy; (ii) ich zaczerwienienie jest spowodowane przez duże ilości pyłu, który przysłania światło gwiazd; lub (iii) galaktyki te znajdują się na wysokich przesunięciach ku czerwieni. Oczywiście jest też możliwe, że mamy do czynienia z połączeniem dwóch lub wszystkich tych czynników.



Porównanie zdjęć trzech czerwonych galaktyk spiralnych pochodzących z teleskopu kosmicznego Spitzera i nowego teleskopu kosmicznego Jamesa Webba

Co zatem wiemy o tych galaktykach? Szacuje się, że ich przesunięcie ku czerwieni znajduje się w przedziale pomiędzy 1 a 3, czyli ich światło podróżowało do nas przez około 10 miliardów lat. Astronomowie stwierdzili również, że populacja gwiazdowa wszystkich trzech galaktyk wydaje się stara, a więc galaktyki te prawie całkowicie nie tworzą już gwiazd. Kluczowe jest tutaj słowo *prawie*, ponieważ jedna z tych galaktyk (zwana SR14) wykazuje pewne oznaki istnienia młodszych, niebieskich kępek gwiazd widocznych w świetle ultrafioletowym.

Niestety, to wszystkie informacje, jakie w tym momencie mamy na temat tych trzech czerwonych galaktyk spiralnych. Ich właściwości fizyczne nie są jeszcze zbyt dobrze zbadane. Mogą na przykład zawierać znacznie więcej pyłu, niż się spodziewamy. Jedno jest pewne. Badania nad tymi egzotycznymi obiektami będą kontynuowane, ponieważ stanowią interesującą populację galaktyk, która może zaoferować nam wgląd w mechanizmy formowania się galaktyk. Szczególnie mogą nam pomóc w odpowiedzi na pytanie o to, kiedy dokładnie możemy mówić o istnieniu różnych typów galaktyk we wczesnym Wszechświecie.

Anna DURKALEC*

Słońca, to częściej jest to zaćmienie częściowe lub obrączkowe, całe zjawisko trwa też nieco dłużej niż w innych miesiącach.

Także co roku na początku stycznia maksimum swojej aktywności mają meteory z roju Kwadrantydów. Ich radiant znajduje się na północ od głównej figury Wolarza i w naszym kraju przebywa stale nad horyzontem. Oznacza to, że Kwadrantydę można obserwować, jak tylko zrobi się odpowiednio ciemno. Lepiej jednak robić to w drugiej części nocy, gdy radiant wznosi się wysoko po wschodniej stronie nieba i przed godziną 6 dociera prawie do zenitu. Tym razem

maksimum aktywności roju prognozuje się na dzień 4 stycznia około godziny 4:40 naszego czasu, wtedy można się spodziewać ponad 100 zjawisk na godzinę. Niestety w obserwacjach przeszkodzi Księżyc będący dwa dni przed pełnią, w fazie 97%. Tej nocy Srebrny Glob przejdzie $2,5^\circ$ na południe od gwiazdy El Nath, drugiej co do jasności gwiazdy Byka.

Dobę wcześniej oświetlona w ponad 90% tarcza Srebrnego Globu odwiedzi środkową część Byka, mniej więcej 1° na południe od **Marsa**. Czerwona Planeta w styczniu przebywa w odległości około 5° na północ od Hiad i 12 dnia miesiąca zmieni kierunek ruchu na prosty, kończąc tym samym okres najlepszej widoczności w trwającym sezonie obserwacyjnym. Do końca miesiąca planeta osłabnie od $-1,2^m$ do $-0,3^m$, a jej średnica kątowna zmniejszy się od $15''$ do $11''$. Marsa najlepiej obserwować około godziny 21, gdy przecina południk lokalny na wysokości ponad 60° . Ostatniego dnia miesiąca rano do planety ponownie zbliży się Księżyc. Tym razem na niecałe 2° .

Pełnia Księżyca przypada 7 stycznia tuż po północy naszego czasu, zastając Srebrny Glob w środkowej części Bliźniąt, około 9° na zachód od Kastora i Polluksa. A zatem jego jasna tarcza zdominuje pierwszą część miesiąca. Pierwszego dnia stycznia jego tarcza pokaże się na pograniczu gwiazdozbiorów Ryb, Barana i Wieloryba, osiągając fazę 77%. Jak zapewne Czytelnicy pamiętają, w tym rejonie nieba przebywa planeta **Uran**, świecąca blaskiem $+5,7^m$. Dojdzie zatem do jej dużego zbliżenia, a nawet zakrycia przez Księżyc. Zjawisko da się obserwować z północnej części Europy. W Polsce dojdzie do zakrycia brzegowego, z granicą zjawiska przebiegającego mniej więcej na linii Cedynia–Włocławek–Siemiatycze. Srebrny Glob minie Urana około północy. Niecałe 4 godziny wcześniej dojdzie również do zakrycia brzegowego odległej o $1,5^\circ$ na zachód od Urana, świecącej podobnym blaskiem gwiazdy o Ari. Tym razem granica zjawiska przebiegnie na linii Szczecin–Lębork, a zatem gwiazda zniknie za księżycową tarczą jedynie na wybrzeżu Bałtyku. W obu przypadkach do zakrycia dojdzie na północ od wspomnianych granic.

Po pełni Księżyc 10 stycznia w fazie 86% spotka się z Regulusem, najjaśniejszą gwiazdą Lwa, a 15 stycznia, w ostatniej kwadrze, przejdzie 3° na północ od Spiki. W styczniu ekliptyka tworzy dość duże kąty z widnokregiem zarówno rano, jak i wieczorem, stąd cienki sierp Srebrnego Globu jest tak samo dobrze widoczny przed, jak i po nowiu. Kolejnego dnia faza tarczy Srebrnego Globu spadnie do 38%, zbliżając się jednocześnie na 6° do Zuben Elgenubi, drugiej co do jasności gwiazdy Wagi, choć oznaczanej na mapach nieba grecką literą α . Kolejne dwa dni później jego sierp zwęzi się do 18% i dotrze do gwiazdozbioru Skorpiona, zajmując pozycję między Antaresem, najjaśniejszą gwiazdą konstelacji, a łukiem jasnych gwiazd z północno-zachodniej części Skorpiona. O godzinie 6 Księżyc zdąży się wzniesć na wysokość ponad 8° .

W ostatnich dniach stycznia i na początku lutego tuż nad punktem SE widnokregu można próbować dostrzec

planetę **Merkury**, która 30 dnia miesiąca osiągnie maksymalną elongację zachodnią, wynoszącą 25° . Niestety w tym czasie nachylenie ekliptyki wyraźnie się już zmniejszy, stąd planeta o świcie nie wzniesie się wyżej niż 5° ponad horyzont. Do końca miesiąca Merkury zwiększy jasność z $+1^m$ do $-0,1^m$. W tym czasie jego tarcza skurczy się z $9''$ do $6''$, a faza urośnie z 20% do 75%. W nocy 19 stycznia na prawo od Merkurego, w odległości 17° , znajdzie się Księżyc w fazie 10%.

Srebrny Glob przejdzie przez now 21 stycznia i przeniesie się na niebo wieczorne, na którym znajdują się prawie wszystkie planety Układu Słonecznego, poza Merkurym. Najbliżej linii horyzontu świeci planeta **Venus**, która powoli dąży do maksymalnej elongacji wschodniej w czerwcu. Wenus początkowo jest bardzo nisko, ale szybko nabiera wysokości, zwiększając ją na początku zmierzchu cywilnego do końca miesiąca do ponad 10° . Po drodze, 22 stycznia, Wenus minie Saturna w odległości mniejszej niż $30'$, a dobę później do pary planet zbliży się Księżyc w fazie 5%, mijając je w odległości 5° . Nadarza się okazja do wykonania uroczej fotografii! Wenus jest wciąż daleko od Ziemi, stąd przez cały miesiąc jej jasność wyniesie $-3,9^m$, przy średnicy tarczy $10''$ i fazie przekraczającej 90%.

Sam **Saturn** jest już słabo widoczny. Na początku miesiąca, dwie godziny po zachodzie Słońca, planeta przebywa na wysokości niewiele przekraczającej 10° , a już w trzeciej dekadzie stycznia znika z nieboskłonu jeszcze przed zapadnięciem nocy astronomicznej. Zanim to się jednak stanie, Saturn przejdzie niecałe $1,5^\circ$ na północ od dwóch jasnych gwiazd Koziorożca: Nashiry (γ Cap) i Deneb Algedi (δ Cap). Saturn w styczniu świeci blaskiem $+0,8^m$, a jego tarcza ma średnicę $16''$.

Zdecydowanie lepsze warunki obserwacyjne mają planety **Neptun** i **Jowisz**. Do końca stycznia Jowisz oddali się od Neptuna na odległość ponad 12° . W pierwszej części miesiąca obie planety na początku nocy astronomicznej przekraczają wysokość 30° , jednak one również ulegną szybko rosnącej długości dnia i pod koniec stycznia na dwie godziny po zachodzie Słońca zmniejszą wysokość nad widnokregiem do 15° . Jowisz przejdzie przez perihelium swojej orbity 20 stycznia, zbliżając się do Słońca na mniej niż 5 AU. Słabnie jednak coraz bardziej, ponieważ od jego opozycji mijają już ponad 3 miesiące. Do końca stycznia blask planety zmniejszy się do $-2,2^m$, jej tarcza zaś zmniejszy średnicę do $36''$. Neptun świeci z jasnością $+7,9^m$ i w połowie miesiąca opuści obręb równoległoboku gwiazd 6. i 7. wielkości, dążąc ku granicy Wodnika z Rybami. Przetnie ją jednak dopiero w marcu. Księżyc w fazie cienkiego sierpa minie obie planety w dniach 25–26 stycznia, zbliżając się doń na około 6° .

Srebrny Glob przejdzie przez I kwadrę 28 stycznia w Baranie i jednocześnie odwiedzi planetę Uran. W ostatnich dwóch dniach miesiąca natomiast uczyni to samo z planetą Mars. Za każdym razem Księżycowi do planety zabraknie po mniej więcej 6° .

Ariel MAJCHER

Starość roślin cd.

Gdy wspomniałam na Facebooku, że piszę o starzeniu roślin, odezwało się wielu czytelników, a jeden napisał: rośliny się nie starzeją. Właściwie kiedyś też tak myślałam...

Zacząc muszę od banału: „życie na Ziemi trwa dzięki istnieniu organizmów samożywnych”, które syntetyzują związki organiczne z dwutlenku węgla i wody. Są to głównie rośliny. To one do takich syntez wykorzystują energię światła słonecznego w reakcjach opisywanych wspólną nazwą fotosyntezy. Powstające w wyniku fotosyntezy złożone związki organiczne ulegają przemianom w różnych cyklach metabolicznych dostarczających energii „do życia”. Fotosynteza frapowała badaczy od XVII wieku, ale jej podstawowe mechanizmy molekularne poznano dopiero w wieku XX.

W toku poznawania życia i jego regulacji uznaliśmy za pewnik różnorodność składających się na biosferę organizmów. Każdy ma swój jednostkowy zestaw genów, które podobnie, ale nie identycznie, reagują na sygnały wewnętrzne i zewnętrzne. W wyższych organizmach wyróżnia się tkanki i narządy o określonym planie rozwojowym. W roślinach inaczej żyją korzenie, inaczej nasiona, cebule, łodygi czy pnie. Rośliny bywają jednoroczne, dwuletnie, wieloletnie. Różnorodnie się mnożą. Trudno uogólniać.

O wielu procesach zdecydował fakt stałej lokalizacji rośliny w podłożu – jak się nie „umiesz” przemieścić do bardziej nasłonecznionej części lasu, łąki, to zwracasz ku słońcu łodygę, kwiat. Starzenie roślin zaczęliśmy rozumieć od niedawna. Różne części roślin starzeją się i umierają inaczej. Niedawno obok nas zakończył się cykl życia fotosyntetyzujących narządów roślinnych, a prościej – liści, do czego sygnałem jest spowolnienie fotosyntezy, rozpad organelli fotosyntetyzujących (chloroplastów) do toksycznych związków. Kończy się też cykl dojrzewania nasion. Liść spada na ziemię.

Przyrost masy rośliny zależy od tkanki merystematycznej, grupy stale dzielących się komórek stożka wzrostu i wzdłuż długości łodygi lub pnia. Tych komórek jest w każdym osobniku niewiele – w głównym stożku 30–50. W dodatku nie bardzo udają się laboratoryjne hodowle takich komórek.

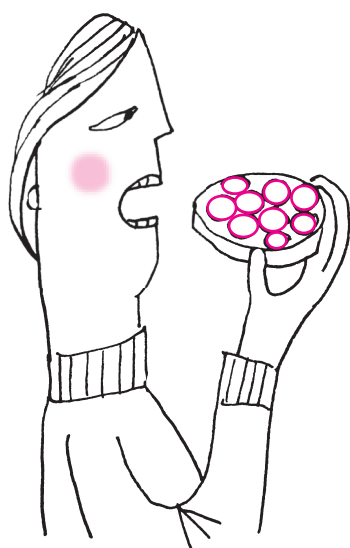
Większość danych molekularnych dotyczących roślin uzyskano z badań modelowych małej jednorocznej roślinki, rzodkiewnika. Mierzy ona kilka centymetrów, polubili ją genetycy, bo jej genom, jak na roślinę, jest stosunkowo mały (125 mln nukleotydów, zsekwencjonowany w 2000 r.) Rzodkiewnik łatwo też hodować w laboratorium. Badając wiek roślin, zauważono wyjątki w „odwrotnym” kierunku. Na przykład stuletnie *dęby*, żyjące kilka tysięcy lat *sekwoje wieczniezielone* czy *sosny długowieczne*. Te ostatnie występują na kilku amerykańskich pustyniach: w Utah, Nevadzie, Kolorado. Wyrastają z rozbudowanego systemu korzeni, można uznać, że części naziemne są klonami. Wiek korzeni ocenia się na tysiące lat, a część naziemną na setki: to właściwie ile lat liczy sobie taka sosna?

Cyklami życia roślin steruje też kilkadziesiąt związków organicznych o wspólnej nazwie: fitohormony. Mają różnorodną budowę chemiczną, wspólne jest silne kierunkowe działanie w minimalnych stężeniach. Niektóre przyspieszają, niektóre opóźniają wzrost i rozwój. Za rozwój i wzrost rośliny (w każdym razie... rzodkiewnika) odpowiada 25% genomu. Nie znaczy to, że istnieją geny „starzenia się”. Rozwój rośliny to działanie wielu procesów – część z nich może obniżyć sprawność rośliny, część struktur (błony) może ulec uszkodzeniom ze skutkiem toksycznym. Nieuniknione zmiany, początkowo z zewnątrz niezauważalne, gromadzą się, aż przekroczona jest granica funkcjonalności. Fizyk powie, że rośnie entropia. W poszczególnych organizmach, w grupach i typach

roślin moment dekompozycji zależy od warunków środowiska: temperatury, wilgotności, intensywności oświetlenia i długości fal światła przeważających w danej lokalizacji. Roślina nie może się spakować i zmienić lokalu, o swój dobrobyt dba inaczej niż zwierzę. Długość życia zależy też od rodzaju tkanek nadających mechaniczną trwałość, chroniących – warstwy łodygi, pnia, trwałość kory, odporność na szkodniki.

Tak czy inaczej, często spotykanym zwrotem – nawet w podręcznikach edukacyjnych – gdy chodzi o rośliny, jest: „nie wiadomo”. Jest tu wskazówka dla kolejnych badaczy: poszukajcie odpowiedzi na zagadki stawiane przez świat roślin. Bez nich życie nie przetrwa.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

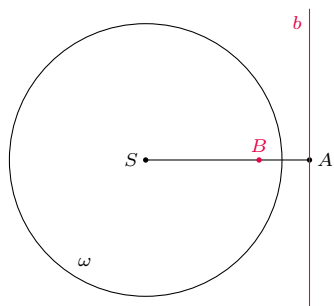




Na biegunach

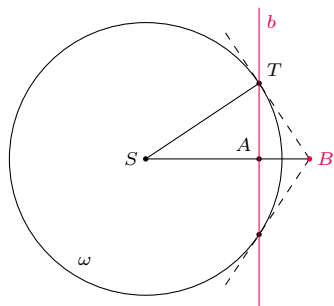
Bartłomiej BZDEGA

Ustalmy okrąg ω o środku S i promieniu r . Punkty A i B leżą na wspólnej półprostej z początkiem w S . Prosta b przechodzi przez punkt A i jest prostopadła do tej półprostej (rys. 1). Jeśli $|AS| \cdot |BS| = r^2$, to mówimy, że zachodzi *odpowiedniość biegunowa* $\mathcal{B}_\omega(B, b)$ punktu B i prostej b względem okręgu ω . Mówimy również, że punkt B jest *biegunem* prostej b , a prosta b jest *biegunową* punktu B względem okręgu ω .



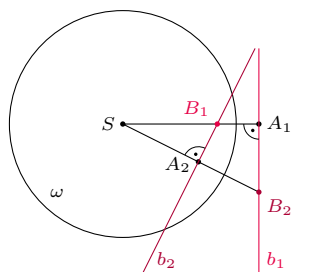
Rys. 1

Dla punktu B leżącego na zewnątrz okręgu ω biegunową b możemy skonstruować, prowadząc z punktu B proste styczne do okręgu ω . Wówczas biegunowa b przechodzi przez oba punkty styczności (rys. 2). Wynika to z podobieństwa trójkątów SAT i STB : $\frac{|SA|}{|ST|} = \frac{|ST|}{|SB|}$, więc $|SA| \cdot |SB| = |ST|^2 = r^2$. Oczywiście działa to w obie strony. Mając daną sieczną okręgu nieprzechodzącą przez jego środek, możemy wyznaczyć jej biegun – jest to punkt przecięcia stycznych poprowadzonych z punktów przecięcia okręgu sieczną.



Rys. 2

Wzajemność biegunowa. Rozważmy odpowiedniość biegunową $\mathcal{B}_\omega(B_1, b_1)$ i niech B_2 będzie dowolnie wybranym punktem na prostej b_1 . Przez A_2 oznaczmy rzut prostokątny punktu B_1 na prostą SB_2 (rys. 3). Z podobieństwa trójkątów SA_1B_2 i SA_2B_1 wynika równość $\frac{|SA_1|}{|SB_2|} = \frac{|SA_2|}{|SB_1|}$, a zatem $|SA_2| \cdot |SB_2| = |SA_1| \cdot |SB_1| = r^2$, więc biegunowa b_2 punktu B_2 przechodzi przez punkt A_2 . Ponadto $b_2 \perp SB_2$, więc $B_1 \in b_2$. Wynika z tego następujące *prawo wzajemności biegunowej*: biegun prostej b_1 leży na prostej b_2 wtedy i tylko wtedy, gdy biegun prostej b_2 leży na prostej b_1 . Jest ono znane również jako *twierdzenie La Hire'a*.



Rys. 3

Dualność biegunowa. Rozważmy odpowiedniości biegunowe $\mathcal{B}_\omega(B_i, b_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas:

- jeśli proste b_1, b_2, \dots, b_n przecinają się w jednym punkcie B , to na mocy prawa wzajemności biegunowej ich bieguny B_1, B_2, \dots, B_n leżą na jednej prostej b , która jest biegunową punktu B ;
- w drugą stronę, jeżeli punkty B_1, B_2, \dots, B_n leżą na jednej prostej b , to na mocy prawa wzajemności biegunowej ich biegunowe b_1, b_2, \dots, b_n przechodzą przez punkt B , który jest biegunem prostej b .

Ta własność pozwala w niektórych zadaniach zamienić tezę na równoważną: współliniowość punktów na współpękowość prostych i *vice versa*. Bywa, że to upraszcza rozwiązanie zadania.

Zadania

1. Ustalmy okrąg ω o środku O i rozłączną z nim prostą k . Niech X będzie dowolnym punktem na prostej k . Punkty przecięcia okręgu ω i okręgu o średnicy OX wyznaczają prostą ℓ_X . Udowodnić, że wszystkie otrzymane w ten sposób proste ℓ_X są współpękowe.
2. Punkt I jest środkiem okręgu o wpisanego w trójkąt ABC , a punkty D, E, F są punktami styczności tego okręgu odpowiednio do odcinków BC, CA, AB . Punkt P wybrano w taki sposób, by punkt F leżał na odcinku EP . Okrąg o średnicy IP przecina okrąg o w punktach Q i R . Dowieść, że prosta QR przechodzi przez punkt A .
3. Okrąg o środku I , wpisany w trójkąt różnoboczny ABC , styczny jest do boków BC, CA, AB w punktach, odpowiednio, D, E, F . Punkt P leży na prostej BC i spełnia warunek $PI \perp AD$. Punkt Q leży na prostej CA i spełnia warunek $QI \perp BE$. Punkt R leży na prostej AB i spełnia warunek $RI \perp CF$. Dowieść, że punkty P, Q, R leżą na jednej prostej.
4. W czworokąt $ABCD$ wpisany jest okrąg o środku I , styczny do odcinków AB, BC, CD w punktach, odpowiednio, K, L, M . Prosta KL przecina prostą CD w punkcie P , a prostą BM w punkcie Q . Dowieść, że $BP \perp IQ$.

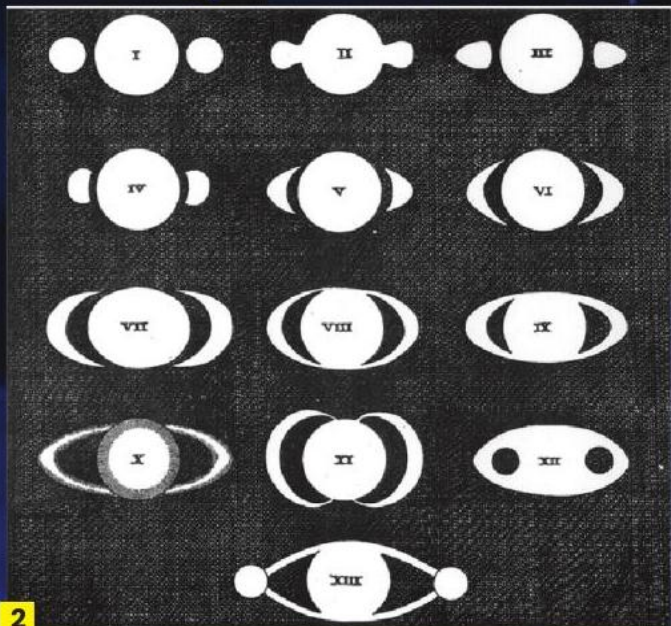
Wskazówki do zadań
 1. Zasadań odpowiedniość biegunową $\mathcal{B}_\omega(X, \ell_X)$ i skorzystać z dualności biegunowej dla okręgu ω .
 2. Wykazać, że punkt F jest biegunem prostej QR i skorzystać z prawa wzajemności biegunowej dla okręgu o .
 3. Punkty P, Q, R są biegunami prostych AD, BE, CF . Zastosowanie dualności biegunowej i twierdzenia Cevy kończy dowód.
 4. Wystarczy udowodnić, że punkt Q jest biegunem prostej BP względem okręgu wpisanego w $ABCD$. Korzystając ze wzajemności biegunowej dowodzimy kolejno, że: punkt B leży na biegunowych punktów P i Q , punkt F jest biegunem prostej MB , punkt F leży na biegunowej punktu Q .

Historia obserwacji pierścieni Saturna

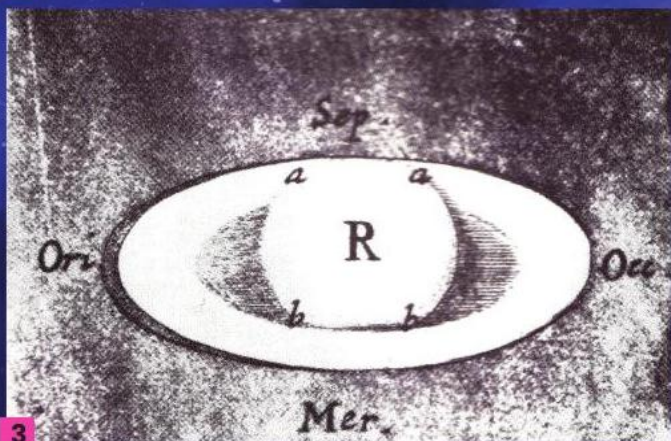
Więcej w artykule *James Clerk Maxwell i pierścienie Saturna*, s. 16



1



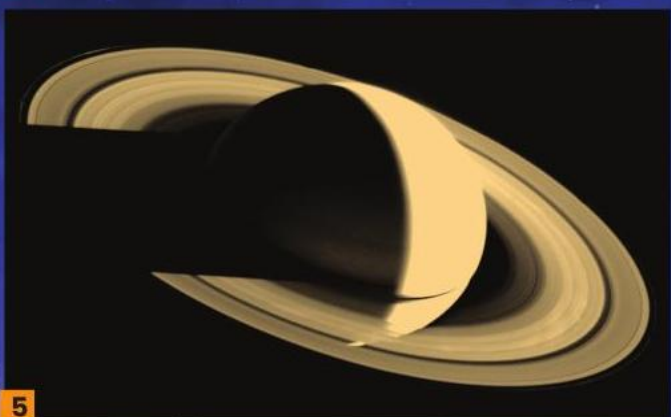
2



3



4



5



6

1 Rysunki Galileusza (1610 i 1616)

Źródło: <https://spacecentre.co.uk/blog-post/galileos-telescope-changed-our-view-of-the-solar-system/>

2 Rysunek z kompendium Huygensa (1659)

Źródło: https://www.researchgate.net/figure/Huygens-1659-compendium-p-32-see-https-galileoouedu-exhibits-system-saturn_fig2_330538632

3 Rysunek Roberta Hooke'a (1666)

Źródło: https://en.wikipedia.org/wiki/Saturn#/media/File:Saturn_Robert_Hooke_1666.jpg

4 Zdjęcie wykonane przez sondę Pioneer (1973)

Źródło: https://www.nasa.gov/multimedia/imagegallery/image_feature_2483.html

5 Zdjęcie wykonane przez sondę Voyager (1980)

Źródło: <https://www.nasa.gov/image-feature/voyager-1-image-of-saturn>

6 Zdjęcie wykonane przez sondę Cassini-Huygens (2009)

Źródło: <https://solarsystem.nasa.gov/news/539/10-things-why-cassini-mattered>