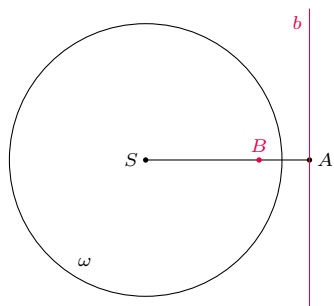




Na biegunach

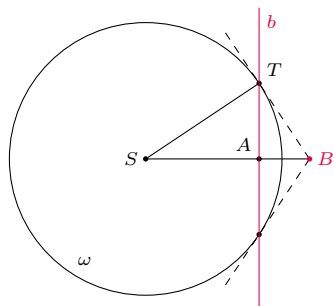
Bartłomiej BZDEGA

Ustalmy okrąg ω o środku S i promieniu r . Punkty A i B leżą na wspólnej półprostej z początkiem w S . Prosta b przechodzi przez punkt A i jest prostopadła do tej półprostej (rys. 1). Jeśli $|AS| \cdot |BS| = r^2$, to mówimy, że zachodzi *odpowiedniość biegunowa* $\mathcal{B}_\omega(B, b)$ punktu B i prostej b względem okręgu ω . Mówimy również, że punkt B jest *biegunem* prostej b , a prosta b jest *biegunową* punktu B względem okręgu ω .



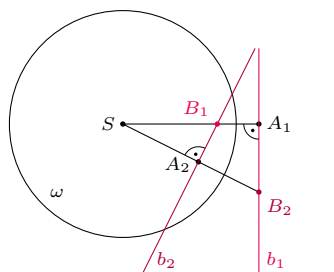
Rys. 1

Dla punktu B leżącego na zewnątrz okręgu ω biegunową b możemy skonstruować, prowadząc z punktu B proste styczne do okręgu ω . Wówczas biegunowa b przechodzi przez oba punkty styczności (rys. 2). Wynika to z podobieństwa trójkątów SAT i STB : $\frac{|SA|}{|ST|} = \frac{|ST|}{|SB|}$, więc $|SA| \cdot |SB| = |ST|^2 = r^2$. Oczywiście działa to w obie strony. Mając daną sieczną okręgu nieprzechodzącą przez jego środek, możemy wyznaczyć jej biegun – jest to punkt przecięcia stycznych poprowadzonych z punktów przecięcia okręgu sieczną.



Rys. 2

Wzajemność biegunowa. Rozważmy odpowiedniość biegunową $\mathcal{B}_\omega(B_1, b_1)$ i niech B_2 będzie dowolnie wybranym punktem na prostej b_1 . Przez A_2 oznaczmy rzut prostokątny punktu B_1 na prostą SB_2 (rys. 3). Z podobieństwa trójkątów SA_1B_2 i SA_2B_1 wynika równość $\frac{|SA_1|}{|SB_2|} = \frac{|SA_2|}{|SB_1|}$, a zatem $|SA_2| \cdot |SB_2| = |SA_1| \cdot |SB_1| = r^2$, więc biegunowa b_2 punktu B_2 przechodzi przez punkt A_2 . Ponadto $b_2 \perp SB_2$, więc $B_1 \in b_2$. Wynika z tego następujące *prawo wzajemności biegunowej*: biegun prostej b_1 leży na prostej b_2 wtedy i tylko wtedy, gdy biegun prostej b_2 leży na prostej b_1 . Jest ono znane również jako *twierdzenie La Hire'a*.



Rys. 3

Dualność biegunowa. Rozważmy odpowiedniości biegunowe $\mathcal{B}_\omega(B_i, b_i)$ dla $i = 1, 2, \dots, n$. Wówczas:

- jeśli proste b_1, b_2, \dots, b_n przecinają się w jednym punkcie B , to na mocy prawa wzajemności biegunowej ich bieguny B_1, B_2, \dots, B_n leżą na jednej prostej b , która jest biegunową punktu B ;
- w drugą stronę, jeżeli punkty B_1, B_2, \dots, B_n leżą na jednej prostej b , to na mocy prawa wzajemności biegunowej ich biegunowe b_1, b_2, \dots, b_n przechodzą przez punkt B , który jest biegunem prostej b .

Ta własność pozwala w niektórych zadaniach zamienić tezę na równoważną: współliniowość punktów na współpękowość prostych i *vice versa*. Bywa, że to upraszcza rozwiązanie zadania.

Zadania

1. Ustalmy okrąg ω o środku O i rozłączną z nim prostą k . Niech X będzie dowolnym punktem na prostej k . Punkty przecięcia okręgu ω i okręgu o średnicy OX wyznaczają prostą ℓ_X . Udowodnić, że wszystkie otrzymane w ten sposób proste ℓ_X są współpękowe.
2. Punkt I jest środkiem okręgu o wpisanego w trójkąt ABC , a punkty D, E, F są punktami styczności tego okręgu odpowiednio do odcinków BC, CA, AB . Punkt P wybrano w taki sposób, by punkt F leżał na odcinku EP . Okrąg o średnicy IP przecina okrąg o w punktach Q i R . Dowieść, że prosta QR przechodzi przez punkt A .
3. Okrąg o środku I , wpisany w trójkąt różnoboczny ABC , styczny jest do boków BC, CA, AB w punktach, odpowiednio, D, E, F . Punkt P leży na prostej BC i spełnia warunek $PI \perp AD$. Punkt Q leży na prostej CA i spełnia warunek $QI \perp BE$. Punkt R leży na prostej AB i spełnia warunek $RI \perp CF$. Dowieść, że punkty P, Q, R leżą na jednej prostej.
4. W czworokąt $ABCD$ wpisany jest okrąg o środku I , styczny do odcinków AB, BC, CD w punktach, odpowiednio, K, L, M . Prosta KL przecina prostą CD w punkcie P , a prostą BM w punkcie Q . Dowieść, że $BP \perp IQ$.

Wskazówki do zadań
 1. Zasadań odpowiedniość biegunową $\mathcal{B}_\omega(X, \ell_X)$ i skorzystać z dualności biegunowej dla okręgu ω .
 2. Wykazać, że punkt F jest biegunem prostej QR i skorzystać z prawa wzajemności biegunowej dla okręgu o .
 3. Punkty F, Q, R są biegunami prostych AD, BE, CF . Zastosowanie dualności biegunowej i twierdzenia Cevy kończy dowód.
 4. Wystarczy udowodnić, że punkt Q jest biegunem prostej BP względem okręgu wpisanego w ABC . Korzystając ze wzajemności biegunowej dowodzimy kolejno, że: punkt B leży na biegunowych punktów F i Q , punkt F jest biegunem prostej MB , punkt F leży na biegunowej punktu Q .