Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2023

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: **deltami.edu.pl**

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 843 ($WT = 2{,}09$) i 843 ($WT = 1{,}59$) z numeru 6/2022

Jerzy Cisło	Wrocław	47,65
Stanisław Bednarek	Łódź	42,60
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Tomasz Wietecha	Tarnów	39,23
Paweł Najman	Kraków	38,88
Mikołaj Pater	Opole	38,30
Krzysztof Zygan	Lubin	38,26
Marcin Kasperski	Warszawa	37,65
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Radosław Kujawa	Wrocław	35,83
Janusz Olszewski	Warszawa	34,88
Norbert Porwol	Essen	34,16

Jerzy Cisło – przekroczenie 44 p. po raz 2^4; drugi (w historii Ligi) uczestnik z takim osiągnięciem!

Widać też, że w bliskim czasie czeka nas zmasowane mijanie linii mety!

Zadania z matematyki nr 853, 854

Redaguje Marcin E. KUCZMA

853. Rozstrzygnąć, czy suma skończenie wielu czworokątów wklęsłych o rozłącznych wnętrzach może być wielokątem wypukłym (czworokąt wklęsły to taki, w którym jeden z kątów wewnętrznych jest większy od kąta półpełnego). Czy odpowiedź zmieni się, jeśli zamiast wklęsłych czworokątów będziemy rozważać wklęsłe pięciokąty?

854. Niech n będzie dowolną liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnić, że liczba przedstawień n w postaci sumy dwóch nieujemnych liczb trójkątnych jest równa liczbie przedstawień liczby $4n+1$ w postaci sumy kwadratów dwóch nieujemnych liczb całkowitych (utożsamiamy przedstawienia różniące się tylko kolejnością składników).

Zadanie 854 zaproponował pan Tomasz Ordowski.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2022

Przypominamy treść zadań:

845. Udowodnić nierówność dla liczb nieujemnych $x_1, \ldots, x_n$ oraz $y_1, \ldots, y_n$:

$$\Big(\sum_{i\neq j} x_i y_j\Big)^2 \geqslant \Big(\sum_{i\neq j} x_i x_j\Big)\Big(\sum_{i\neq j} y_i y_j\Big)$$

(każda z trzech napisanych sum ma $n(n-1)$ składników odpowiadających wszystkim uporządkowanym parom (i,j) różnych numerów $i,j \in \{1,\ldots,n\}$).

846. Ostrosłup ścięty, którego podstawami są podobne wielokąty o znanych polach A i B, został podzielony płaszczyznami $\pi_1, \ldots, \pi_{n-1}$, równoległymi do podstaw, na n wielościanów o równych objętościach; płaszczyzna π_k leży między płaszczyznami π_{k-1} i π_{k+1} (dla $k = 1, \ldots, n-1$), gdzie π_0, π_n to płaszczyzny zawierające, odpowiednio, podstawy o polach A, B. Obliczyć pole przekroju ostrosłupa każdą z płaszczyzn π_k.

845. Przyjmijmy oznaczenia

$$S_x = \sum_{i=1}^n x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^n y_i,$$
$$Q_x = \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad Q_y = \sum_{i=1}^n y_i^2, \quad T = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

i odnotujmy oszacowania:

$$(1) \qquad Q_x \leqslant {S_x}^2, \quad Q_y \leqslant {S_y}^2; \quad T^2 \leqslant Q_x Q_y$$

(ostatnia zależność to nierówność Cauchy'ego–Schwarza). Daną do udowodnienia nierówność przepisujemy w postaci

$$(2) \qquad \big(S_x S_y - T\big)^2 \geqslant \big(S_x^2 - Q_x\big)\big(S_y^2 - Q_y\big),$$

po czym przekształcamy do postaci kolejno równoważnych:

$$S_x^2 Q_y + S_y^2 Q_x - 2S_x S_y T \geqslant Q_x Q_y - T^2;$$
$$\big(S_x\sqrt{Q_y} - S_y\sqrt{Q_x}\big)^2 + 2S_x S_y\big(\sqrt{Q_x Q_y} - T\big) \geqslant$$
$$\geqslant \big(\sqrt{Q_x Q_y} - T\big)\big(\sqrt{Q_x Q_y} + T\big);$$

i wreszcie

$$(3) \quad \big(S_x\sqrt{Q_y} - S_y\sqrt{Q_x}\big)^2 + \big(\sqrt{Q_x Q_y} - T\big)\big[2S_x S_y - \sqrt{Q_x Q_y} - T\big] \geqslant 0.$$

Wystarczy teraz zauważyć, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym to suma

$$2\big(S_x S_y - \sqrt{Q_x Q_y}\big) + \big(\sqrt{Q_x Q_y} - T\big),$$

której oba składniki są nieujemne (co widać z oszacowań (1)). To uzasadnia nierówność (3), więc i równoważną jej nierówność (2).

846. Przyjmijmy, że $A > B$. Rozważany ostrosłup ścięty powstał w wyniku przecięcia (płaszczyzną π_n) pełnego ostrosłupa o podstawie w płaszczyźnie π_0 i wierzchołku („czubku”) Z i odrzucenia części położonej po tej stronie płaszczyzny π_n co punkt Z.

Niech S_k będzie polem przekroju ostrosłupa płaszczyzną π_k (dla $k = 0, \ldots, n$; dane są więc wartości $S_0 = A$, $S_n = B$) i niech V_k będzie objętością ostrosłupa o wierzchołku Z, którego podstawą jest ów k-ty przekrój; jego wysokość h_k to odległość punktu Z od płaszczyzny π_k.

Z warunku zadania wynika, że objętości $V_0, \ldots, V_n$ tworzą ciąg arytmetyczny. Wobec tego

$$(4) \qquad V_k = \frac{n-k}{n}V_0 + \frac{k}{n}V_n \quad \text{dla } k = 0, \ldots, n.$$

Rozważane ostrosłupy o wierzchołku Z są bryłami podobnymi. Stosunek pól $S_k : S_0$ to kwadrat skali podobieństwa $h_k : h_0$. Stąd

$$(5) \qquad h_k = h_0\sqrt{\frac{S_k}{S_0}} \quad \text{dla } k = 0, \ldots, n.$$

Pamiętając szkolny wzór $V_k = \frac{1}{3}S_k h_k$, wstawiamy do wzoru (4) równość (5) (braną dla bieżącego wskaźnika k oraz dla $k = n$), mnożymy przez 3 i otrzymujemy

$$S_k h_0\sqrt{\frac{S_k}{S_0}} = \frac{n-k}{n}S_0 h_0 + \frac{k}{n}S_n h_0\sqrt{\frac{S_n}{S_0}}.$$

Proste przekształcenie (po skróceniu czynnika h_0 i powrocie do oznaczeń $S_0 = A$, $S_n = B$) daje odpowiedź na pytanie z zadania:

$$S_k = \left(\frac{n-k}{n}A^{3/2} + \frac{k}{n}B^{3/2}\right)^{2/3} \quad \text{dla } k = 0, \ldots, n.$$