Nierówność izoperymetryczna

*Bartłomiej BZDĘGA**

* Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Klasyczne zagadnienie izoperymetryczne to problem znalezienia geometrycznej figury płaskiej o największym polu przy zadanym obwodzie. Sporo na temat jego historii można przeczytać w książce *Okruchy matematyki* Jarosława Górnickiego (wydanie drugie, Warszawa 2009, str. 158–172). Opisane jest w niej również elementarne, czysto geometryczne podejście do rozwiązania tego problemu.

Tytułową bohaterką artykułu jest nierówność:

(1) $$L^2 \geqslant 4\pi P,$$

w której L oznacza obwód, a P – pole pewnej figury płaskiej, przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy jest ona kołem. Wynika z tego, że:

1. spośród wszystkich figur o jednakowym obwodzie koło ma największe pole;

lub równoważnie:

2. spośród wszystkich figur o jednakowym polu koło ma najmniejszy obwód.

W niniejszym artykule przedstawiam rozwiązanie nie aż tak elementarne, za to niezwykle błyskotliwe. Pochodzi ono z pracy *Über das isoperimetrische Problem im Raum von n Dimensionen* [*Mathematische Zeitschrift* 44 (1939), strony 690–696] autorstwa Erharda Schmidta.

Fizyczna intuicja

W cytowanych powyżej twierdzeniach brakuje nieco ścisłości – doprecyzujmy zatem kilka pojęć.

Figura geometryczna to część płaszczyzny ograniczona pewną krzywą zamkniętą $\mathcal{C}$, zwaną jej brzegiem. Intuicja mówi nam, że krzywą $\mathcal{C}$ powinniśmy móc narysować w skończonym czasie, powiedzmy, T. Niech zatem $\mathcal{C}(t) = (x_c(t), y_c(t))$ będzie punktem w układzie współrzędnych, w którym znajduje się rysik ołówka w czasie $t \in [0, T]$ podczas rysowania, przy czym $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(0)$, a na przedziale $[0, T)$ funkcja $\mathcal{C}(t)$ jest różnowartościowa i ciągła. Krzywą spełniającą te warunki nazywamy *krzywą Jordana*. Twierdzenie Jordana orzeka, że rozdziela ona płaszczyznę na dwie części i jest ich wspólnym brzegiem.

Opisaną wyżej funkcję $\mathcal{C} : [0, T] \to \mathbb{R}^2$ nazywamy *parametryzacją krzywej* $\mathcal{C}$. Dla przyszłych rozważań umówmy się, że rysujemy tak, że jeśli patrzymy w kierunku rysowania, to obszar wewnątrz krzywej znajduje się z lewej strony. Taką parametryzację krzywej nazywamy *dodatnią*.

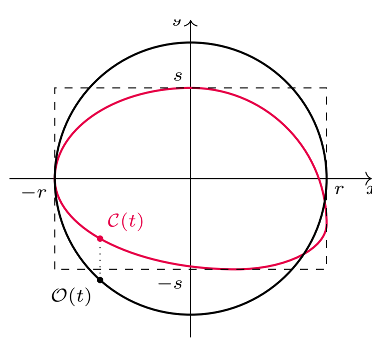
Dodatkowo założymy, że funkcje $x_c(t)$ i $y_c(t)$ mają ciągłe pochodne $\dot{x}_c(t)$ i $\dot{y}_c(t)$ na przedziale $(0, T)$, z wyjątkiem być może skończenie wielu wartości t (taką krzywą nazywamy *regularną*). Możemy wtedy wyrazić prędkość rysika jako wektor

(2) $$v_c(t) = \big(\dot{x}_c(t), \dot{y}_c(t)\big).$$

Pole P wewnątrz krzywej regularnej $\mathcal{C}$ z dodatnią parametryzacją $\mathcal{C}(t) = (x_c(t), y_c(t))$ dla $t \in [0, T]$ można obliczyć za pomocą wzorów:

(3) $$P = \int_0^T x_c(t)\dot{y}_c(t)\,dt = -\int_0^T y_c(t)\dot{x}_c(t)\,dt.$$

Stanowią one standard analizy matematycznej i można je znaleźć w każdym przyzwoitym podręczniku. W szczególności są one bezpośrednią konsekwencją *twierdzenia Greena*, któremu jednak nie będziemy się bliżej przyglądać w tym artykule.



Dowód nierówności

W dowodzie będziemy zakładali, że krzywa $\mathcal{C}$, będąca brzegiem rozważanej figury, jest regularna, a sama figura jest wypukła.

Wybierzmy taki układ współrzędnych, by dla pewnych $r, s \geqslant 0$ krzywa $\mathcal{C}$ była wpisana w prostokąt, którego boki leżą na prostych o równaniach:

$$x = r, \quad x = -r, \qquad y = s, \quad y = -s.$$

Rozważmy dodatnią parametryzację $\mathcal{C}(t) = (x_c(t), y_c(t))$, w której $|v_c(t)| = 1$ dla wszystkich t (intuicyjnie: rysik ołówka porusza się ze stałą szybkością równą 1); w szczególności T jest równe obwodowi, $T = L$.

Niech $\mathcal{O}$ będzie okręgiem o środku w punkcie $(0, 0)$ i promieniu r. Parametryzujemy go tak, by odcinek $\mathcal{C}(t)\mathcal{O}(t)$ był dla każdego t równoległy do osi OY, a więc

$$\mathcal{O}(t) = \big(x_o(t), y_o(t)\big) = \Big(x_c(t), \pm\sqrt{r^2 - x_c(t)^2}\Big),$$

przy czym znak $\pm$ dobieramy w ten sposób, by parametryzacja $\mathcal{O}(t)$ była dodatnia.

Niech P będzie polem figury ograniczonej przez krzywą $\mathcal{C}$. Stosując wzór (3) do parametryzacji krzywych $\mathcal{C}$ i $\mathcal{O}$, otrzymujemy:

$$P = \int\limits_0^L x_c(t)\dot{y}_c(t)\,dt = \int\limits_0^L x_o(t)\dot{y}_c(t)\,dt,$$

$$\pi r^2 = -\int\limits_0^L y_o(t)\dot{x}_o(t)\,dt = -\int\limits_0^L y_o(t)\dot{x}_c(t)\,dt.$$

Dodajmy powyższe równości stronami:

$$P + \pi r^2 = \int\limits_0^L \Big(x_o(t)\dot{y}_c(t) - y_o(t)\dot{x}_c(t)\Big)\,dt. \tag{4}$$

Funkcja podcałkowa jest iloczynem skalarnym wektora $v_o^*(t) = (-y_o(t), x_o(t))$ i wektora prędkości $v_c(t)$. Mamy $|v_o^*(t)| = r$, gdyż $(x_o(t), y_o(t)) \in \mathcal{O}$ oraz $|v_c(t)| = 1$. Iloczyn skalarny dwóch wektorów nie przekracza iloczynu ich długości, więc

$$P + \pi r^2 \leqslant \int\limits_0^L r\,dt = Lr.$$

Teraz wystarczy zastosować nierówność między średnią arytmetyczną i geometryczną:

$$\sqrt{P\cdot \pi r^2} \leqslant \frac{P+\pi r^2}{2} \leqslant \frac{Lr}{2}. \tag{5}$$

Nierówność $\sqrt{P\cdot\pi r^2} \leqslant \frac{Lr}{2}$ trzeba podzielić obustronnie przez $\frac{r}{2}$ i podnieść do kwadratu, by otrzymać nierówność (1).

Równość tylko dla koła

Pozostaje wykazać, że jeśli $L^2 = 4\pi P$, to krzywa $\mathcal{C}$ jest okręgiem. W tym celu prześledzimy te miejsca dowodu nierówności (1), w których szacowaliśmy – w każdej z nierówności w (5) musi być równość.

W pierwszej nierówności równość zachodzi tylko, gdy $P = \pi r^2$, i wówczas $L = \sqrt{4\pi P} = \sqrt{4\pi^2 r^2} = 2\pi r$. W drugiej korzystaliśmy z szacowania iloczynu skalarnego niezerowych wektorów. Jest równy iloczynowi ich długości tylko, gdy kąt między nimi jest zerowy – czyli jeden z wektorów jest równy drugiemu pomnożonemu przez pewną liczbę dodatnią. Biorąc pod uwagę długości tych wektorów, mamy $v_o^*(t) = r v_c(t)$, czyli w szczególności

$$x_c(t) = x_o(t) = r\dot{y}_c(t). \tag{6}$$

Nierówności (1) można dowieść alternatywnie, rozważając okrąg Ω o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu s oraz taką parametryzację dodatnią $\Omega(t)$, że odcinek $\mathcal{C}(t)\Omega(t)$ jest dla każdego t równoległy do osi OX. Analizując miejsca szacowania w tym alternatywnym dowodzie (wszystko przebiega tak samo, jak to zostało opisane w akapicie wyżej), dochodzimy do wniosku, że $P = \pi s^2$, więc $s = r$. Z równości w szacowaniu iloczynu skalarnego otrzymamy

$$y_c(t) = s\dot{x}_c(t) = r\dot{x}_c(t). \tag{7}$$

Równości (6) i (7) dają

$$\sqrt{x_c(t)^2 + y_c(t)^2} = r\sqrt{\dot{y}_c(t)^2 + \dot{x}_c(t)^2} = r|v_c(t)| = r,$$

więc $\mathcal{C}$ jest okręgiem o środku $(0,0)$ i promieniu r.

O pewnych hipotezach teorii liczb

*Witold BEDNAREK**

* Nauczyciel, I Liceum im. Mikołaja Kopernika w Łodzi

Rozpocznijmy od następującego zadania: udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej m liczba $m^2 + 3m + 2$ jest złożona. Nie jest to wymagający problem; rozwiązanie polega na zauważeniu, że badaną liczbę można przedstawić jako $(m+1)(m+2)$ i oba czynniki są zawsze liczbami całkowitymi, większymi niż 1. A co, jeśli zamiast tego spytamy o liczby postaci $m^2 + m + 2$? Tutaj poprzednia sztuczka już nie zadziała; wielomianu $w(x) = x^2 + x + 2$ nie jesteśmy w stanie przedstawić jako iloczynu dwóch wielomianów o współczynnikach całkowitych, różnych od wielomianu tożsamościowo równego 1. Takie wielomiany (o współczynnikach całkowitych) nazywamy *nierozkładalnymi*. Jeśli jednak przyjrzymy się wartościom $w(m)$ dla $m = 1, 2, \ldots$, zaobserwujemy, że wszystkie są parzyste i większe od 2, zatem złożone. Nietrudno uzasadnić, dlaczego tak jest dla dowolnej liczby naturalnej m: nierówność $w(m) > 2$ jest oczywista, a parzystość $w(m)$ wynika z faktu, że $w(m) = m(m+1) + 2$ i któraś z liczb m lub $m+1$ jest parzysta.

Czy teza naszego zadania może być prawdziwa, jeśli żaden z przedstawionych dwóch argumentów nie ma zastosowania? W 1857 roku Wiktor Buniakowski sformułował hipotezę, że nie. Niech f będzie wielomianem nierozkładalnym o współczynnikach całkowitych i dodatnim współczynniku przy najwyższej potędze. Ponadto niech wielomian f ma stopień co najmniej 2 oraz nie istnieje taka liczba naturalna $n > 1$, która dzieli wartości $f(k)$ dla każdego naturalnego k. Wtedy, wedle hipotezy Buniakowskiego, istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych m, że liczba $f(m)$ jest pierwsza.