**Rozwiązanie zadania M 1734.**
Ciąg $(x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1})$ nazwijmy *dobrym*, jeśli 1 występuje częściej wśród $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}$ niż wśród $x_1, x_2, \ldots, x_n$. W pozostałych przypadkach ciąg jest *zły*.
Ciągowi $s = (x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1})$ przypiszmy ciąg

$$s^* = (1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_{2n+1}).$$

Przypuśćmy, że 1 występuje $a$ razy wśród liczb $x_1, x_2, \ldots, x_n$ oraz $b$ razy wśród $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{2n+1}$. Wówczas występuje ona $n - a$ razy wśród liczb

$$1 - x_1, 1 - x_2, \ldots, 1 - x_n$$

oraz $n + 1 - b$ razy wśród liczb

$$1 - x_{n+1}, 1 - x_{n+2}, \ldots, 1 - x_{2n+1}.$$

Zauważmy jednak, że

$$a < b \iff n - a \geqslant n + 1 - b,$$

więc $s$ jest dobry wtedy i tylko wtedy, gdy $s^*$ jest zły. Wobec tego przypisanie $s \mapsto s^*$ jest bijekcją między zbiorami ciągów dobrych i złych, a to oznacza, że dokładnie połowa ciągów jest dobra.

**Twierdzenie o końcach.** *Koniec dowolnej sekwencji $R$ dla dowolnego $L_0$ ostatecznie wpada w jeden z trzech cykli:*

- $2^2]$
- $2311322113212221] \to 2132113222113121132 11] \to$
  $\to 211131221133221131112211 31221] \to$
  $\to 2123222113312221131122 11]$
- $231221132221222112112322211n] \to 2131122211332113221122112133 2211n]$, *dla* $(n > 1)$.

**Twierdzenie o podziale.** *Sekwencja $S = AB$ dzieli się na dwa niezależne pierwiastki $S = A * B$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A$ lub $B$ jest pusty lub obie sekwencje są jedną z podanych niżej (tutaj $n \geqslant 4$ oraz $m \leqslant 3$):*

| $A$ | $B$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n]$ | $[m$ | | | | | | |
| $2]$ | $[1^1X^1$ | *lub* | $[1^3$ | *lub* | $[3^1X^{\neq 3}$ | *lub* | $[n^1$ |
| $\neq 2]$ | $[2^21^1X^1$ | *lub* | $[2^21^3$ | *lub* | $[2^23^1X^{\neq 3}$ | *lub* | $[2^2n^{0 \text{ lub } 1}$ |

Dowody zaprezentowanych faktów są dość techniczne; można je odnaleźć w pracy Conwaya *The weird and wonderful chemistry of audioactive decay* z 1987 roku.

## Komentarz do rozwiązania zadania 1064

Czytelnik Dociekliwy na pewno nie jest zadowolony z podanego przez nas rozwiązania zadania 1064.

Zastosowaliśmy w nim wzory mechaniki klasycznej. Być może takie przybliżenie jest wystarczająco dokładne w przypadku mas i energii występujących w treści zadania, ale Czytelnik Dociekliwy chciałby, oczywiście, znać pełne rozwiązanie, poprawne także wtedy, gdy ciepło reakcji ma wartość porównywalną z masami substratów i produktów. Spełniając słuszne oczekiwania Czytelnika Dociekliwego, przedstawiamy poniżej pełne rozwiązanie uwzględniające efekty relatywistyczne.

Podczas reakcji spełnione są prawa zachowania pędu i energii: w układzie laboratorium po zajściu reakcji sumaryczny pęd produktów będzie równy pędowi deuteronu przed reakcją. Z pędami produktów związana jest też ich energia kinetyczna. Tylko w układzie środka masy zderzających się jąder sumaryczny pęd przed i po reakcji jest równy zeru (tak definiujemy układ środka masy). Oznacza to, że warunkiem zajścia reakcji jest, by sumaryczna energia w układzie środka masy była równa sumie energii spoczynkowych produktów, która jest o $|Q|$ większa od sumy mas spoczynkowych substratów.

W zderzeniach cząstek o energiach całkowitych $E_i$ i pędach $\vec{p_i}$ energia dostępna w środku masy $E_{CM}$ spełnia równanie:

$$E_{CM}^2 = \Big(\sum_i E_i\Big)^2 - \Big(\sum_i \vec{p_i}c\Big)^2.$$

W powyższym wzorze $c$ oznacza wartość prędkości światła, a prawa strona równania jest niezmiennikiem transformacji Lorentza, a ze względu na spełnienie praw zachowania pędu i energii ma tę samą wartość przed reakcją i po niej.

Zastosujmy dotychczasowe rozważania ogólne do podanej reakcji. Oznaczmy masę deuteronu (pocisku) przez $m$, a masę jądra $^{14}$N (tarczy) przez $M$. Brakuje nam pędu deuteronu o energii kinetycznej $E_k$. Całkowita energia deuteronu: $E = mc^2 + E_k$. Z drugiej strony: $E = \sqrt{m^2c^4 + (pc)^2}$. Otrzymujemy: $p^2c^2 = E_k^2 + 2mc^2E_k$. Podstawiamy do równania określającego energię dostępną w układzie środka masy w przypadku, gdy produkty reakcji w tym układzie spoczywają:

$$\big((m + M)c^2 + E_k\big)^2 - (E_k^2 + 2mc^2E_k) = \big((M + m)c^2 + |Q|\big)^2.$$

Po rozwiązaniu powyższego równania względem $E_k$ otrzymujemy wartość minimalnej energii kinetycznej deuteru (w układzie laboratorium):

$$E_k = \frac{m + M}{M}|Q| + \frac{Q^2}{2Mc^2}.$$

Dla reakcji podanej w treści zadania wynik pełnego rozwiązania różni się od rozwiązania przybliżonego (z zastosowaniem wzorów mechaniki klasycznej) o wyraz: $Q^2/(2Mc^2) \approx 4 \cdot 10^{-4}$ MeV. Tak mała wartość poprawki w pełni usprawiedliwia zastosowanie „przybliżenia klasycznego”.

Uwaga: Użyty w treści zadania termin „ciepło reakcji” odnosi się do wielkości mikroskopowej dotyczącej pojedynczego zderzenia. W chemii „ciepło reakcji” definiowane jest dla układów makroskopowych, a jego wartość zależy od warunków, w jakich przebiega reakcja (np. pod stałym ciśnieniem czy w stałej objętości).

*Andrzej MAJHOFER*