Modele Wszechświata dla początkujących

Część 1: Wędrówki po rozciągającej się nici

Szymon CHARZYŃSKI

Katedra Metod Matematycznych Fizyki, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Karol Gryszka w artykule „Nieoczekiwane zastosowania szeregu harmonicznego”, opublikowanym w Δ^7_{19} przedstawił dwa problemy. Jeden z nich dotyczył mrówki idącej po rozciągającej się nici. Okoliczności, w których znalazła się mrówka – dla ustalenia uwagi damy jej na imię Karolina – były następujące. Jeden koniec nici, z którego startowała mrówka, był zamontowany na sztywno (spoczywał), a drugi koniec uciekał ze stałą prędkością, przy czym nić rozciągała się równomiernie na całej długości. Eleganckie, przedstawione dwiema metodami rozwiązanie (przypadek dyskretny i ciągły) nie pozostawia żadnych niedomówień: niezależnie od tego, z jaką prędkością idzie mrówka i jak szybko ucieka koniec nici, Karolinie **zawsze** uda się dojść na drugi koniec nici, jeśli tylko damy jej wystarczająco dużo czasu. Artykuł zakończył się optymistycznym przesłaniem, że w rozszerzającym się zgodnie z prawem Hubble'a–Lemaître'a Wszechświecie możemy dotrzeć do dowolnego punktu, o ile będziemy mieli wystarczająco dużo czasu.

Czy na pewno jest aż tak różowo? Aby się o tym przekonać, zbadamy prosty model innego Wszechświata niż ten modelowany przez nić mrówki Karoliny. Rozważmy podobny, ale nieco odmienny problem. Druga mrówka, o imieniu Ksymena, również będzie szła po rozciągającej się nici. Jednak tym razem reguły zabawy będą trochę inne. Znowu rozwiążemy zadanie na dwa sposoby. Zaczniemy od dyskretnej wersji, której sformułowanie jest następujące.

Zadanie 1. Mrówka Ksymena porusza się ze stałą prędkością $1\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{s}}$. W chwili początkowej mrówka znajduje się na zamocowanym na sztywno początku nici o długości 1 m, a jej celem jest drugi uciekający koniec. Co sekundę cała nić rozciąga się równomiernie na całej długości o czynnik $\frac{11}{10}$, czyli w kolejnych chwilach długość nici jest równa 100 cm, 110 cm, 121 cm, 133,1 cm... Czy Ksymenie uda się dojść na drugi koniec nici?

Przypomnijmy, że Karolina szła z tą samą prędkością, ale jej nić na początku miała 1 km długości i co sekundę wydłużała się o 1 km. Mimo wszystko Karolinie się udało, a czy tak samo poradzi sobie Ksymena?

Rozwiązanie zadania 1. Rozważmy od razu przypadek ogólny. Oznaczmy przez s początkową długość nici, a przez v prędkość Ksymeny. Nić będzie się wydłużać w równych odstępach czasu Δt o czynnik $q > 1$. Ponieważ prędkość mrówki jest stała, to pomiędzy rozszerzeniami nici mrówka pokona zawsze odcinek tej samej długości, równej $v \cdot \Delta t$. Jeżeli chcemy wiedzieć, jaką część nici przejdzie mrówka po czasie $k \cdot \Delta t$, to musimy obliczyć następującą sumę:

$$f(k) = \frac{v\Delta t}{s} + \frac{v\Delta t}{qs} + \frac{v\Delta t}{q^2 s} + \ldots + \frac{v\Delta t}{q^{k-1} s}.$$

W mianownikach składników powyższej sumy mamy za każdym razem aktualną długość nici, a licznik jest stały. Nietrudno zauważyć, że jest to suma szeregu geometrycznego, na którą znamy ogólny wzór:

$$f(k) = \frac{v\Delta t}{s}\left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^{k-1}}\right) = \frac{v\Delta t}{s} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{q}\right)^k}{1 - \frac{1}{q}}.$$

Pytanie o to, czy Ksymena dojdzie do końca nici, jest równoważne pytaniu, czy istnieje k, dla którego $f(k) \geqslant 1$. Ponieważ $q > 1$, to $\frac{1}{q} < 1$, i możemy przejść z k do nieskończoności, otrzymując skończoną sumę, którą oznaczymy $f(\infty) = \frac{v\Delta t}{s} \cdot \frac{q}{q-1}$, przy czym jest oczywiste, że $f(k) < f(\infty)$ dla dowolnego k. Dla danych z zadania 1 dostajemy wynik $f(\infty) = 11/100$, czyli mrówka nie ma szans dotrzeć na drugi koniec nici. Co więcej, obliczyliśmy, że nie ma szans pokonać więcej niż 11% nici.

Rozwiążemy teraz wersję problemu z ciągłym czasem. Nadal chcemy, żeby po upływie czasu Δt nić wydłużała się o czynnik q, ale żeby rozciąganie było rozłożone w czasie, a nie skokowe. Naturalnym rozwiązaniem jest przyjęcie, że zależność długości nici od czasu jest dana wzorem $sq^{t/\Delta t}$. Możemy tę samą zależność zapisać również w postaci se^{Ht}, która jest wygodniejsza, bo występuje w niej tylko jedna stała $H = \frac{\ln q}{\Delta t}$ (zamiast dwóch q i Δt), i łatwiej się tę postać różniczkuje (a bez różniczkowania w przypadku ciągłym się nie obejdzie). Wiemy już, że mrówka może nie dotrzeć na drugi koniec, sformułujemy więc problem bardziej ogólnie.

Zadanie 2. Mrówka Ksymena wyrusza ze stałą prędkością v z jednego końca nici, która rozciąga się równomiernie na całej długości, przy czym zależność długości nici od czasu jest dana wzorem se^{Ht}, gdzie s to początkowa długość nici. Jaka może być maksymalna długość nici, aby mrówka dotarła na jej drugi koniec?

Rozwiązanie zadania 2. Wprowadźmy oznaczenie $a(t) = e^{Ht}$. Jeżeli odległość jakiegoś punktu na nici do końca, z którego startuje mrówka, wynosi w chwili początkowej $x(0)$, to jego odległość w chwili t wynosi $x(t) = x(0)a(t)$. Taki punkt oddala się od nieruchomego końca nici z prędkością $x(0)\dot{a}(t)$, gdzie „kropka” oznacza pochodną po czasie. Z jaką prędkością Ksymena oddala się od nieruchomego końca nici, kiedy znajduje się w punkcie $x(t)$? Do prędkości, z jaką ten punkt jest „unoszony” przez rozciąganie nici, czyli $x(0)\dot{a}(t)$, należy dodać własną prędkość mrówki względem nici, czyli v. W ten sposób otrzymujemy zależność:

$$\dot{x}(t) = x(0)\dot{a}(t) + v,$$

gdzie $\dot{x}(t)$ oznacza właśnie prędkość, z jaką Ksymena się porusza, kiedy znajduje się w punkcie $x(t)$. Dokonując podstawienia $x(0) = x(t)/a(t)$, otrzymujemy:

$$\dot{x}(t) = x(t)\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} + v. \tag{1}$$

Ponieważ $a(t) = e^{Ht}$, to $\dot{a}(t)/a(t) = H$, i ostatecznie dostajemy równanie ruchu mrówki w postaci:

$$\dot{x}(t) = Hx(t) + v.$$

Jest to równanie różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach, co dla Czytelników Zaznajomionych z równaniami różniczkowymi oznacza „równanie bardzo łatwe do rozwiązania". Jego rozwiązaniem (co Czytelnik Dociekliwy może łatwo sprawdzić) jest funkcja:

$$x(t) = Ce^{Ht} - \frac{v}{H}, \tag{2}$$

gdzie C jest dowolną stałą, którą wyznaczamy, żądając, aby spełniony był warunek początkowy $x(0) = 0$.

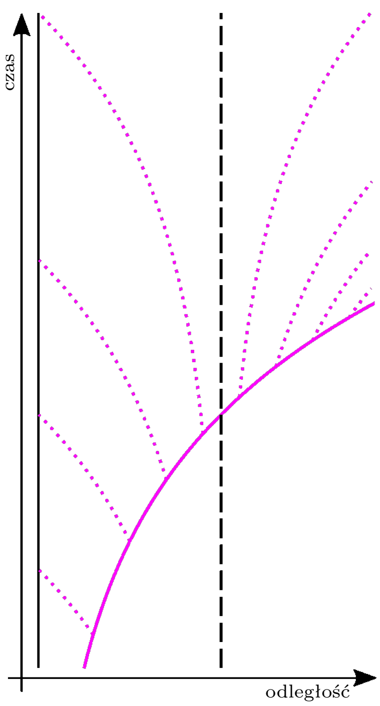
Dzięki temu zabiegowi otrzymujemy ostateczny wynik:

$$x(t) = \frac{v}{H}\left(e^{Ht} - 1\right).$$

Znaleziona funkcja $x(t)$ mówi nam, jak daleko od początku nici jest Ksymena w chwili t. Żeby wiedzieć, czy doszła do końca nici, musimy tę odległość porównać z długością nici w chwili t, która wynosi $sa(t)$. Jeżeli istnieje t, dla którego stosunek tych dwóch odległości jest większy od 1, to mrówka dojdzie do końca nici. Czyli sprawdzamy, czy spełniony jest warunek:

$$1 \leqslant \frac{x(t)}{sa(t)} = \frac{v}{sH}\left(1 - e^{-Ht}\right).$$

Wyrażenie w nawiasie jest zawsze mniejsze od 1, a dobierając odpowiednio t, możemy uczynić je dowolnie bliskim 1. Aby więc istniało t, dla którego nierówność jest spełniona, musi zachodzić warunek: $s < v/H$. Czyli w przypadku ciągłym mrówka również ma „skończony zasięg".



Rys. 1. Ciągła czarna linia po lewej stronie wykresu przedstawia położenie mrówki Ksymeny w zależności od czasu – mrówka spoczywa, więc linia jest równoległa do osi czasu. Czarną linią przerywaną oznaczono sferę Hubble'a – galaktyki na lewo od tej linii oddalają się od Ksymeny wolniej niż c, a na prawo szybciej. Ciągła kolorowa linia przedstawia trajektorię pewnej galaktyki, która początkowo znajduje się wewnątrz sfery Hubble'a, a w pewnym momencie ją opuszcza. Liniami kropkowanymi narysowane są przykładowe trajektorie fotonów wysłanych z tej galaktyki w różnych chwilach czasu. Widać, że fotony wysłane z wnętrza sfery Hubble'a docierają do Ksymeny, a te wysłane z zewnątrz oddalają się coraz szybciej, pomimo że zostały wysłane w lewo, czyli w stronę Ksymeny. Wszystkie krzywe przedstawione na rysunku są wykresami funkcji (2) z odpowiednio dobranymi parametrami C i v.

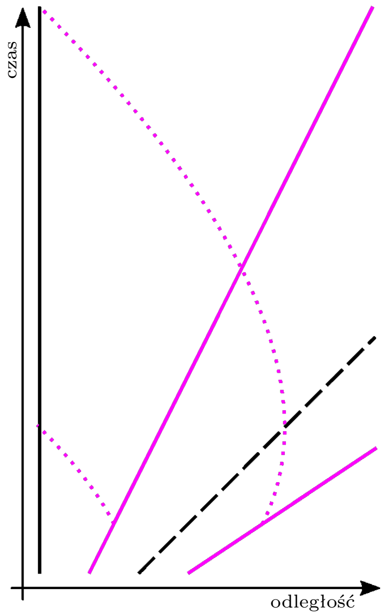
Czym się różnią Wszechświaty Karoliny i Ksymeny? Wyobraźmy sobie, że te rozciągające się nici to modele pewnego jednowymiarowego Wszechświata, w którym żyją nasze mrówki. Wszechświaty te mogą być nieskończone, a parametr s występujący w zadaniach może oznaczać odległość pomiędzy jakimiś obiektami (np. galaktykami) w pewnej ustalonej chwili czasu. Oba Wszechświaty się rozszerzają. Jednak Karolina może dojść do dowolnego punktu w swoim Wszechświecie (do dowolnie dalekiej galaktyki), a Ksymena może odwiedzić tylko pewną jego część – reszta jest dla niej niedostępna. We Wszechświecie Ksymeny galaktyka, która w jakiejś chwili znajduje się dalej niż v/H, jest poza jej zasięgiem. Jeżeli za v podstawimy prędkość światła c, to sygnał, jaki Ksymena wyśle z prędkością c w chwili, w której jest ona dalej niż c/H, nigdy do tej galaktyki nie dotrze i odwrotnie: sygnał wysłany w tej chwili z tamtej odległej galaktyki nigdy nie dotrze do Ksymeny.

We Wszechświecie Ksymeny obowiązuje więc ciekawe prawo: w chwili gdy obiekt znajdzie się dalej niż c/H, tracimy z nim kontakt na zawsze. W tym momencie prędkość, z jaką jest on unoszony przez rozszerzający się Wszechświat, wynosi c. Czyli we Wszechświecie Ksymeny utrata szansy na kontakt zachodzi w chwili, w której prędkość ucieczki związana z rozszerzaniem się Wszechświata przekracza c. Zauważmy też, że funkcja $a(t) = e^{Ht}$ ma tę własność, że jeżeli będziemy się cofać w czasie, to nawet jeżeli aktualnie jakiś obiekt jest od nas bardzo daleko (dużo dalej niż c/H), to istnieje taka chwila w przeszłości, w której był bliżej. Sygnał wtedy wysłany mógł do nas dotrzeć. Widzimy więc ciekawą własność tego Wszechświata: galaktyki, które kiedyś Ksymena mogła obserwować, po pewnym czasie przestają być dla niej widoczne. Im dłużej Ksymena obserwuje swój Wszechświat, tym mniejszą część galaktyk widzi – kolejne galaktyki opuszczają obserwowalną dla niej część Wszechświata (rys. 1).

We Wszechświecie Karoliny jest zupełnie inaczej. Wiemy już, że poruszając się z dowolnie małą prędkością, może zajść dowolnie daleko. Oznacza to również, że sygnał wysłany z galaktyki znajdującej się dowolnie daleko dotrze do Karoliny, jeżeli tylko poczeka ona dostatecznie długo. Czyli jeżeli jest jakaś odległa galaktyka, której Karolina nie widzi, to prędzej czy później ją zobaczy. Część Wszechświata dostępna jej obserwacjom z czasem staje się coraz większa. Co więcej, to, czy Karolina zobaczy daną galaktykę, nie zależy od relacji prędkości, z jaką ucieka dana galaktyka, do prędkości światła. Sygnał wysłany z galaktyki oddalającej się z prędkością większą od c dotrze do Karoliny!

Jak to jest możliwe? Jakim sposobem Karolina może zobaczyć galaktykę uciekającą szybciej od światła? Moglibyśmy poprzestać na odpowiedzi, że wynika to wprost z równań wyprowadzonych przez Karola Gryszkę w Δ^7_{19}, ale spróbujemy przyjrzeć się bliżej rozwiązaniu tego pozornego paradoksu.

We Wszechświecie Karoliny, podobnie jak we Wszechświecie Ksymeny, możemy wprowadzić funkcję $a(t)$, która mówi nam, jak skalują się odległości w miarę



Rys. 2. Ciągła czarna linia po lewej stronie wykresu przedstawia położenie mrówki Karoliny. Czarną linią przerywaną oznaczono sferę Hubble'a – galaktyki na lewo od tej linii oddalają się wolniej niż c, a na prawo szybciej. Promień tej sfery rośnie z prędkością światła. Ciągłe kolorowe linie przedstawiają przykładowe trajektorie dwóch galaktyk: jedna (po lewej) znajduje się wewnątrz sfery Hubble'a, a druga (po prawej) na zewnątrz. Linie kropkowane przedstawiają trajektorie fotonów wysłanych w lewo (do Karoliny) w tej samej chwili czasu przez obie galaktyki. Widać, że foton wysłany przez galaktykę spoza sfery Hubble'a (oddalającą się od Karoliny z prędkością $3/2c$) początkowo oddala się od Karoliny, ale w pewnym momencie sfera Hubble'a go „dogania" i od tej chwili zaczyna się zbliżać do Karoliny. Wszystkie krzywe na rysunku są wykresami rozwiązania ogólnego przedstawionego przez Karola Gryszkę w Δ^7_{19} z odpowiednio dobranymi stałymi.

rozciągania się Wszechświata. Tutaj będzie to $a(t) = 1 + ut$. Jeżeli odległa galaktyka (ta na końcu nici) w chwili $t = 0$ znajduje się w odległości s od Karoliny, to zależność odległości od czasu ma postać $s \cdot a(t) = s + sut$, czyli galaktyka oddala się ze stałą prędkością su, tak jak było w treści zadania. Zastanówmy się teraz, jaka jest odległość $r(t)$ do punktu na nici (galaktyki we Wszechświecie), który oddala się od Karoliny z prędkością c. Żeby na nie odpowiedzieć, wystarczy do równania (1) podstawić $\dot{x}(t) = c$, $x(t) = r(t)$, $v = 0$ oraz $a(t) = 1 + ut$. Rozwiązaniem jest $r(t) = c\frac{a(t)}{\dot{a}(t)} = c\left(\frac{1}{u} + t\right)$, czyli brzeg obszaru, wewnątrz którego galaktyki uciekają wolniej niż c, oddala się od Karoliny z prędkością c (dla porównania, we Wszechświecie Ksymeny odległość ta była stała i wynosiła c/H). Obszar ten w kosmologii nazywany jest *objętością Hubble'a,* a jego brzeg to *sfera Hubble'a.* Rozwiązanie naszego paradoksu przedstawia rysunek 2. Foton wysłany przez galaktykę poza sferą Hubble'a początkowo oddala się od Karoliny, ale w pewnym momencie rozszerzająca się sfera Hubble'a go dogania i do tej chwili foton zbliża się już do Karoliny i w skończonym czasie do niej dotrze.

Widzimy więc, że we Wszechświecie Ksymeny objętość Hubble'a pokrywa się z tym, co nazywa ona obserwowalną częścią Wszechświata, natomiast we Wszechświecie Karoliny ta obserwowalna część jest większa od objętości Hubble'a. Nie należy więc mylić tych dwóch pojęć (co niestety często ma miejsce w tekstach popularnonaukowych). Odległość, w jakiej znajdują się galaktyki uciekające z prędkością światła, nie wyznacza krańca obserwowalnego Wszechświata. Na przykładzie Wszechświata Karoliny widzimy, że (w pewnych sytuacjach) możliwe jest obserwowanie w teleskopach galaktyk, które oddalają się od nas szybciej niż światło (nawet takich, które zawsze oddalały się od nas szybciej niż światło).

Parametr Hubble'a. W naszych rozważaniach wygodne okazało się wprowadzenie czynnika $a(t)$, który ma różną formę w obu Wszechświatach, ale pełni tę samą funkcję – mówi, jak skalują się odległości w miarę upływu czasu. Zauważmy, że kilka razy pojawił się nam również stosunek $\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, który we Wszechświecie Ksymeny jest stały i wynosi H, a we Wszechświecie Karoliny zależy od czasu. Ten współczynnik pozwalał nam obliczyć, jaka jest prędkość galaktyki (punktu na nici) oddalonej w danej chwili o x. Ta prędkość wynosi po prostu $x \cdot \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$. Wprowadzamy więc parametr $H(t) := \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$, nazwiemy go *parametrem Hubble'a.* W obu Wszechświatach obowiązuje tzw. *prawo Hubble'a–Lemaître'a*, które mówi, że prędkość ucieczki galaktyk jest proporcjonalna do odległości. Jednak tylko we Wszechświecie Ksymeny współczynnik tej proporcjonalności $H(t)$ jest stały w czasie, natomiast we Wszechświecie Karoliny maleje z czasem, dążąc do zera w granicy przy $t \to \infty$.

A co z teorią względności? Ktoś może się czuć zaniepokojony beztroską, z jaką opisujemy galaktyki uciekające szybciej niż światło, i powziąć podejrzenie, że ta cała paplanina ma się nijak do prawdziwego Wszechświata, w którym żyjemy. Słusznie może podnieść zarzut, że szczególna teoria względności zabrania przekraczania prędkości światła. Okazuje się jednak, że jeżeli do modelowania Wszechświata zaprzęgniemy ogólną teorię względności i odpowiednio starannie zdefiniujemy używane pojęcia (takie jak „prędkość ucieczki"), to żadnej sprzeczności nie ma. Będzie to temat kolejnego artykułu, który ukaże się za miesiąc. Przekonamy się, że modele opisujące nasz Wszechświat mają pewne cechy wspólne z obydwoma przedstawionymi tutaj prostymi modelikami.
Z jednej strony, rzeczywiście jest tak, że w naszych teleskopach obserwujemy galaktyki, które oddalają się od nas z prędkością większą od prędkości światła (tak jak we Wszechświecie Karoliny). To między innymi dzięki temu możemy zobaczyć zdarzenie odległe od nas o 17 miliardów lat świetlnych, o którym pisał Michał Bejger w Δ^{10}_{20}, mimo że nasz Wszechświat istnieje dopiero 13,8 miliarda lat. Z drugiej strony, powszechnie akceptowany obecnie model naszego Wszechświata przewiduje, że podobnie jak to ma miejsce we Wszechświecie Ksymeny, nigdy nie będziemy mogli zobaczyć całego Wszechświata, a co więcej, ta jego część dostępna naszym obserwacjom ciągle się kurczy. Co chwilę jakaś odległa galaktyka bezpowrotnie opuszcza obszar dostępny naszym obserwacjom.