

delfin

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

II = 6,63 · 10⁻³⁴ J · s $\tau = 3,141592...$

NR 11 (582) 2022




CENA 6 ZŁ + VAT 8%
PL ISSN 1737-9005 | NR INB 35 550 X
MIESIĘCZNIK
www.delfami.edu.pl

**Tyrania większości:
Jak budżet partycypacyjny
w Polsce dyskryminuje
mniejszości**
str. 10



Nakład: 3500 egz.

SPIS TREŚCI NUMERU 11 (582)

Koła pamięci <i>Aleksandra Horubala</i>	str. 1
 Zadania	str. 3
Dawno temu w odległej galaktyce. Odcinek I: Galaktyczne widmo <i>Francesco Pistis</i>	str. 4
Kocha, nie kocha. . . <i>Lukasz Rajkowski</i>	str. 6
Nowa generacja perowskitowych ogniw słonecznych <i>Waqas Pervez</i>	str. 8
Tyrania większości: Jak budżet partycypacyjny w Polsce dyskryminuje mniejszości <i>Grzegorz Pierczyński, Piotr Skowron</i>	str. 10
Konstrukcja sfer dopisanych do czworościanu <i>Lukasz Łopacki</i>	str. 15
Nawijanie miodu <i>Jan Turczynowicz, Radost Waszkiewicz</i>	str. 17
 Bez komórek jajowych i plemników <i>Magdalena Fikus</i>	str. 20
Prosto z nieba: Pozdrowienia z cmentarza	str. 21
Klub 44	str. 22
Niebo w listopadzie	str. 22
Aktualności Kiedy chłód za oknem	str. 24
 Prostopadłość prostych w przestrzeni <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

Informujemy, że
następny numer
będzie o informacji.



Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Lukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

Adres do korespondencji:
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa
e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje:
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.
Skład systemem L^AT_EX wykonała Redakcja.
Druk: Poligrafia NOT poligrafianot.pl

Prenumerata:
Garmond Press: www.garmondpress.pl
Kolporter: www.kolporter.com.pl (tylko instytucje)
RUCH S.A.: www.prenumerata.ruch.com.pl

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym
artykuły archiwalne, linki itd.):
deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Koła pamięci

Aleksandra HORUBAŁA*

* Dowództwo Komponentu Wojsk Obrony Cyberprzestrzeni, Narodowe Centrum Bezpieczeństwa Cyberprzestrzeni

Sanskryt to język literacki starożytnych, średniowiecznych i wczesnonowożytnych Indii. Język literacki to odmiana języka o szczególnym prestiżu społecznym, mająca większy zasięg niż lokalne dialekty.

Yamátárájabánasalagám!

To nie magiczne zaklęcie, nie onomatopeja ani błąd drukarski... ale starożytne słowo w języku sanskryt, stworzone, aby ułatwić bębniarzom zapamiętanie rytmów. Słowo to jest wyjątkowe, ponieważ zawiera wszystkie potrójne kombinacje krótkich i długich sylab. W sanskrycie sylaba jest krótka, jeżeli pojawia się w niej litera *a*, a długa, kiedy występuje w niej litera akcentowana *á*. Analizując kolejne trójki sylab słowa, dostajemy różne rytmy:

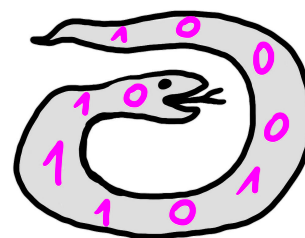
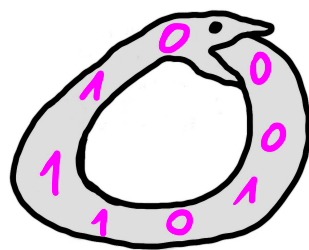
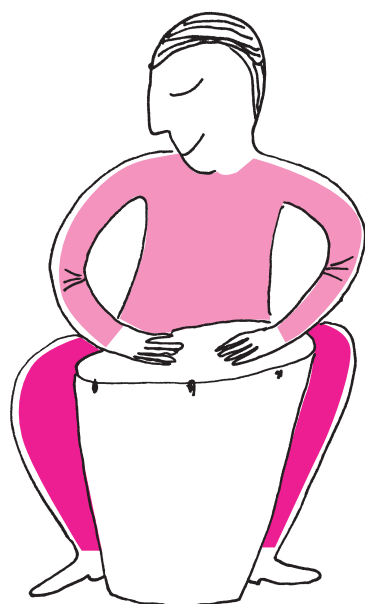
ya má tá → krótka długa długa
má tá rá → długa długa długa
tá rá ja → długa długa krótka

Yamátárájabánasalagám – i problem z głowy – umiemy zagrać każdy rytm!

Jeśli jesteś matematykiem, a nie starożytnym bębniarzem, myślisz pewnie, że byłoby elegancko krótkim sylabom przyporządkować cyfrę 0, a długim cyfrę 1. Słowo *yamátárájabánasalagám* zamieni się wtedy w ciąg binarny: 0111010001 (cyfry 0 i 1 będziemy dalej nazywać bitami). Zauważmy, że w tym ciągu każda trójka bitów pojawia się dokładnie raz:

011 111 110 101 010 100 000 001.

Ale na tym nie koniec! Ostatnie dwie cyfry ostatniej trójki są takie same, jak pierwsze dwie cyfry pierwszej trójki. Wykorzystując ten fakt, możemy zaprezentować słowo nie jako ciąg znaków, ale jako okrąg.



Rys. 1. Koło pamięci. Rysunek na podstawie artykułu S. Steina [1]

Koło pamięci czwórek powinno składać się z $2^4 = 16$ bitów, bo tyle jest różnych ciągów czterobitowych (na każdej z 4 pozycji możemy wybrać dowolną z 2 wartości: 0 lub 1). Uogólniając, koło pamięci kombinacji n -elementowych będzie składało się z 2^n bitów ustawionych na okręgu.

Tak skonstruowany okrąg nazywany jest *kołem pamięci (memory wheel) trójek*. Można wytworzyć analogiczne koła pamięci, które zawierają dłuższe kombinacje bitów. Spróbujcie sami skonstruować koło pamięci czwórek.

Telegramy

Koła pamięci były używane do konstrukcji teleprinterów, czyli maszyn wykorzystywanych do przesyłania telegramów. Pierwszy zrobił to Émile Baudot w 1874 roku. System Baudota składał się z nadajnika i odbiornika. Aby wysłać tekst telegramu, trzeba było go najpierw przedstawić jako ciąg bitów. Ponieważ w alfabecie jest 26 liter, do zakodowania ich trzeba użyć co najmniej 5 bitów ($2^5 = 32$ różne kombinacje pozwalają zakodować wszystkie litery). Kod Baudota, w którym bitowi 0 odpowiada znak $-$, a bitowi 1 znak $+$, zaprezentowano na rysunku 2.

Operator nadajnika musiał wciskać przyciski maszyny, pamiętając, który kod odpowiada której literze (dwa klawisze lewą ręką, trzy prawą ręką, jak widać na rysunku 3).

Nie było to łatwe zadanie i powodowało wiele technicznych problemów (operatorzy musieli pracować w tempie nadanym przez maszynę!). Na szczęście Baudotowi udało się skonstruować odbiornik automatycznie drukujący tekst telegramów, a wykorzystał do tego koła pamięci.

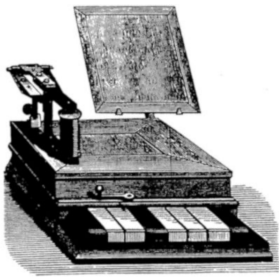
Teleprinter Baudota wykorzystywał układ zsynchronizowanych obracających się kół. Koła pamięci zamodelowane zostały jako metalowe dyski z literami

(No Model.) J. M. E. BAUDOT. 11 Sheets—Sheet 6.
 PRINTING TELEGRAPH. Patented Aug. 21, 1888.
 No. 388,244. Fig. 22.

	1	2	3	4	5
A	+	-	-	+	-
B	-	-	-	-	-
C	+	+	+	+	-
D	+	+	+	+	+
E	+	+	+	+	+
F	+	+	+	+	+
G	+	+	+	+	+
H	+	+	+	+	+
I	+	+	+	+	+
J	+	+	+	+	+
K	+	+	+	+	+
L	+	+	+	+	+
M	+	+	+	+	+
N	+	+	+	+	+
O	+	+	+	+	+
P	+	+	+	+	+
Q	+	+	+	+	+
R	+	+	+	+	+
S	+	+	+	+	+
T	+	+	+	+	+
U	+	+	+	+	+
V	+	+	+	+	+
W	+	+	+	+	+
X	+	+	+	+	+
Y	+	+	+	+	+
Z	+	+	+	+	+
0	-	-	-	-	-
1	+	+	+	+	+

INVENTOR:
Jean Maurice Émile Baudot

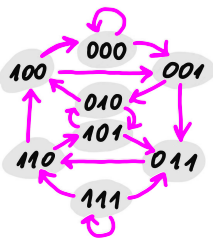
Rys. 2. Kod Baudota



Rys. 3. Nadajnik systemu Baudota



Rys. 4



Rys. 5. Graf odpowiadający kołu pamięci trójek. Rysunek na podstawie artykułu S. Steina [1]

wytłoczonymi na obwodzie (rys. 4). Po otrzymaniu kodu litery obracający się dysk był automatycznie zatrzymywany w pozycji, którą wskazywały bity kodu (wysuwane i chowane metalowe słupki), a litera zapisana na obwodzie była przyciskana do papieru. Teleprinter Baudota był przełomowym wynalazkiem – dopiero ponad 40 lat później, w 1916 roku, Edward Kleinschmidt skonstruował maszynę drukującą telegamy na kartkach papieru (jak współcześnie znane maszyny do pisania).

Powróćmy jednak do kół pamięci. Zastanówmy się, co jeżeli chcielibyśmy zakodować nie tylko litery, ale też cyfry? I jeszcze znaki interpunkcyjne? Będziemy potrzebowali coraz większych kół pamięci. Czy istnieje koło pamięci dowolnego rozmiaru?

Problem Teleprintera

Problem konstrukcji kół pamięci został nazwany Problemem Teleprintera, a sformułowany go w następujący sposób:

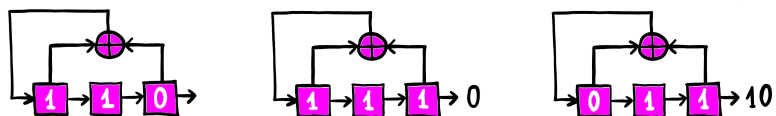
Skonstruuj najdłuższy ciąg okresowy, składający się z elementów 0 i 1, taki że żaden podciąg r-elementowy nie pojawi się w nim więcej niż raz.

Problem został rozwiązany w 1940 roku przez Irvinga Gooda – brytyjskiego matematyka, który pracował jako kryptolog w Bletchley Park z Alanem Turingiem. W swoim dowodzie Good użył teorii grafów. Rzeczywiście możemy skonstruować graf, w którym kombinacje bitów odpowiadają wierzchołkom, a krawędź z kombinacji A do B oznacza, że B można uzyskać z A, kasując pierwszy znak i dodając jakiś nowy na koniec. Dla trójek bitów będzie to graf przedstawiony na rysunku 5.

Znalezienie szukanego ciągu odpowiada przejściu przez graf w taki sposób, aby odwiedzić wszystkie wierzchołki, ale żadnego dwa razy. Aby skonstruować koło pamięci, należy zakończyć spacer po grafie w punkcie, od którego został rozpoczęty – takie przejście przez graf nazywane jest cyklem Hamiltona. Good pokazał, że w grafach reprezentujących n-bitowe kombinacje zawsze istnieje cykl Hamiltona.

Generacja kół pamięci

Wiemy zatem, że da się skonstruować koło pamięci dowolnego rozmiaru. Jednak rysowanie grafów jest odrobinę uciążliwe, wolelibyśmy prostszą metodę. Z ratunkiem nadciągnął amerykański matematyk Solomon Golomb (znany skądinąd jako pomysłodawca figur *polyomino*, które wykorzystali twórcy gry Tetris). Pokazał on, że koła pamięci można generować, używając liniowych rejestrów przesuwanych ze sprzężeniem zwrotnym.[†] Przykład takiego rejestru zaprezentowano na rysunku:



[†]Rejestr nazywamy przesuwany, gdy bity są przesuwane między jego komórkami. Mówimy, że rejestr ma sprzężenie zwrotne, jeżeli w każdym takcie zegara pewna funkcja bitów z komórek rejestru trafia z powrotem do początkowej komórki. Określenie *liniowy* odnosi się do liniowości wybranej funkcji – operacji sumowania.

Zasada działania takiego rejestru jest następująca. W każdą komórkę rejestru należy wstawić jeden bit. Następnie należy wyobrazić sobie tykający zegar. Przy każdym tyknięciu następuje przesunięcie bitów w rejestrze zgodnie z kierunkiem strzałek. Jeżeli dwa bity napotkają na drodze symbol +, należy je dodać modulo 2 (tak by w wyniku otrzymać bit 0 lub 1). Kiedy ostatni bit wypadnie na zewnątrz, a bit otrzymany z sumowania trafi do pierwszej komórki rejestru, czekamy na kolejne tyknięcie zegara i cykl zaczyna się od nowa. Bity, które wypadają z rejestru, tworzą tak zwany *ciąg generowany przez rejestr*.

Ciągi generowane przez rejestry tego typu są zawsze cykliczne, ponieważ liczba różnych sekwencji bitów, które mogą pojawić się w rejestrze, jest skończona. W końcu w komórkach rejestru musi pojawić się ciąg, który był tam już wcześniej – od tej pory wszystko będzie się dziać cyklicznie.

- [1] Sherman K. Stein, *Mathematician as an explorer*, Scientific American, www.scientificamerican.com/article/stein-the-mathematician-as-an-explorer/
- [2] Solomon Golomb, *Shift Register Sequences*, World Scientific Publishing Company, 2017.



Na przykładzie dodaliśmy bity z pierwszej i trzeciej komórki rejestru, ale tę zasadę działania możemy wybrać dowolnie, i różne wybory prowadzą do konstrukcji rejestrów o różnych własnościach. Golomb pokazał, jak wybrać komórki rejestru do sumowania tak, żeby ciąg wygenerowany przez rejestr odpowiadał kołu pamięci. W języku rejestrów mówimy o takim ciągu, że ma maksymalny okres. Ponieważ pojawiły się w nim wszystkie możliwe stany, to ten sam stan pojawił się drugi raz najpóźniej, jak to tylko możliwe – stąd cykl, który się będzie powtarzał, ma najdłuższy możliwy okres. Golomb identyfikował wybór komórek rejestru ze współczynnikami wielomianu. Na przykład rejestr z rysunku 5 przy sumowaniu wykorzystuje komórki 1 i 3, co odpowiada wielomianowi $1 + x^1 + x^3$. Można pokazać, że wygenerowany ciąg jest maksymalny wtedy i tylko wtedy, gdy wielomian odpowiadający komórkom rejestru jest *pierwotny* [2]. Oznacza to między innymi, że nie da się go rozłożyć na iloczyn wielomianów niższego stopnia. Zainteresowanego Czytelnika odsyłamy do książki Golomba zatytułowanej *Shift Register Sequences*.

Ciągi o maksymalnym okresie generowane przez dostatecznie długie rejestry są trudne do odróżnienia od ciągów losowych (zakładając, że widzimy ich skończony fragment, niezawierający cyklu). Dzięki tej własności rejestry przesuwne ze sprzężeniem zwrotnym mają szerokie zastosowania w kryptografii, m.in. są wykorzystywane do generowania ciągów pseudolosowych i konstrukcji szyfrów strumieniowych. Na koniec zauważmy, że aby wygenerować ciąg odpowiadający zawołaniu indyjskich bębniarzy, można użyć pokazanego wcześniej rejestru. Może umiesz znaleźć rejestr, który pozwoli wygenerować koło pamięci czwórek?

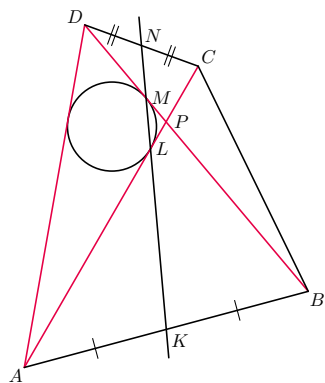


Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1726. Jaką najmniejszą liczbę wież szachowych można ustawić na szachownicy 8×8 tak, aby każde białe pole było zagrożone? (Wieża atakuje pole, na którym stoi, oraz każde pole w tym samym wierszu i kolumnie).
Rozwiązanie na str. 6

M 1727. W czworokącie wypukłym $ABCD$ zachodzi $AC = BD = AD$. Punkty K i N są środkami boków odpowiednio AB i CD . Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie P . Okrąg wpisany w trójkąt APD jest styczny do boków PA i PD w punktach odpowiednio L i M (rys. 1). Udowodnić, że punkty K, L, M i N leżą na jednej prostej.
Rozwiązanie na str. 13



Rys. 1

M 1728. Dane są liczby rzeczywiste a, b i c takie, że

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 2.$$

Udowodnić, że

$$|a - b| + |b - c| + |c - a| \geq 2.$$

Rozwiązanie na str. 14

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1059. Prędkości gwiazd układu podwójnego wynoszą v_1 i v_2 , a okres, z jakim obiegają środek masy układu, wynosi T . Gwiazdy poruszają się po orbitach kołowych. Wyznacz masy gwiazd i odległość między nimi.
Rozwiązanie na str. 5

F 1060. W temperaturze T ciśnienie pary nasyconej nad płaską powierzchnią jednorodnej cieczy wynosi p_0 . Ile wynosi ciśnienie pary nasyconej w temperaturze T nad powierzchnią tej samej cieczy o kształcie wycinka sfery o promieniu r (np. nad kropłą tej cieczy)? Masa molowa cieczy wynosi μ , napięcie powierzchniowe γ , stała gazowa R , przyspieszenie ziemskie g .
Wskazówka: powierzchnia cieczy w wąskiej kapilarze o przekroju kołowym ma kształt wycinka sfery i jeśli promień tej sfery wynosi r , to dodatkowe ciśnienie pod meniskiem wypukłym wynosi $2\gamma/r$.
Rozwiązanie na str. 7

Dawno temu w odległej galaktyce.

Odcinek I: Galaktyczne widmo

*Francesco PISTIS**

*Doktorant, Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Tłumaczenie: Anna DURKALEC

Wszystkie filmy słynnej sagi *Gwiezdných Wojen* rozpoczynają się słowami „Dawno, dawno temu w odległej galaktyce”. Scenerią przedstawionych w filmach wydarzeń nie jest więc nasza Droga Mleczna, a historia nie rozgrywa się w przyszłości, jak można by sądzić, widząc zaawansowane technologie, ale w odległej przeszłości. Z astronomicznego punktu widzenia nie ma w tym nic dziwnego – galaktyki zawsze obserwujemy takimi, jakie były w przeszłości (mniej lub bardziej odległej).

Po pierwsze przyznajmy, że astronomowie nie są zbyt dobrzy w nadawaniu nazw. Weźmy na przykład lata świetlne. W przeciwieństwie do tego, co sugerowałaby nazwa, jednostka ta nie mierzy czasu, a odległość w przestrzeni, nawet jeśli słuszne jest stwierdzenie, że gdy obserwujemy galaktykę w odległości miliarda lat świetlnych, to patrzą na taką, jaka była miliard lat temu, a nie taką, jaka jest dzisiaj.

Rok świetlny odpowiada odległości, jaką pokonują fale elektromagnetyczne (światło) w próżni w ciągu jednego roku. A ponieważ prędkość światła wynosi 299 792 458 m/s, to rok świetlny odpowiada ~9461 miliardom kilometrów, czyli odległości 63 241 razy większej niż średnia odległość między Ziemią a Słońcem (czyli jednostka astronomiczna). Jest to ogromna odległość, więc astronomowie czasami dzielą ją na mniejsze jednostki: dni świetlne, godziny świetlne (np. odległość Saturn–Słońce to około 1 godzina świetlna), minuty świetlne (Ziemia–Słońce to około 8,33 minuty świetlnej), a nawet sekundy świetlne (odległość Ziemia–Księżyc to około 1,28 sekundy świetlnej).

Prędkość światła czasami trudno jest nam sobie wyobrazić. Do wyobraźni przemawia fakt, że światło pokonuje odległość 7,5 obwodu Ziemi w ciągu sekundy.

Odległość pomiędzy Drogą Mleczną a galaktyką Andromedy wynosi około 2,54 mln (!) lat świetlnych.

Grupa Lokalna to najbliższa okolica Drogi Mlecznej (oczywiście w skali Wszechświata). Używając analogii ziemskich, Grupa Lokalna to takie kosmiczne województwo zawierające Drogę Mleczną.

Powróćmy do galaktyk. Najpopularniejsza i największa z naszych najbliższych galaktyk to M31, zwana również NGC224, a szerzej znana jako galaktyka Andromedy (naprawdę nie jesteśmy najlepsi w nazewnictwie). Jest to duża spiralna galaktyka obserwowana w gwiazdozbiornie... tak! zgadliście, Andromedy. Jest jednym z najodleglejszych obiektów widocznych gołym okiem i jest około dwa razy większa od Drogi Mlecznej. To czyni ją największą w Grupie Lokalnej, gromadzie zawierającej co najmniej 80 galaktyk (wliczając w to Drogę Mleczną).

Bliżej nas znajdują się mniejsze galaktyki karłowate. Na przykład Obłoki Magellana – małe, nieregularne galaktyki widoczne gołym okiem na półkuli południowej Ziemi. Jedna z nich, nieco masywniejsza od pozostałych, została nazwana Dużym Obłokiem Magellana (znajduje się 157 000 lat świetlnych od Ziemi), a druga, mniejsza, Małym Obłokiem Magellana (197 000 lat świetlnych od Ziemi). Galaktyki te połączone są ze sobą chmurą wodoru i gwiazd – tak zwanym Mostem Magellana, powstałym prawdopodobnie w wyniku oddziaływań pomiędzy obiema galaktykami. Co ciekawe, bardziej masywne pasmo gazu (tak zwany Strumień Magellana) łączy Obłoki Magellana z Drogą Mleczną. Początkowo astronomowie sądzili, że Obłoki Magellana stanowią układ podwójny (tzn. że są związane oddziaływaniem grawitacyjnym) i jednocześnie oba są satelitami Drogi Mlecznej. Jednak pomiary ruchu Wielkiego Obłoku Magellana za pomocą Kosmicznego Teleskopu Hubble’a wykazały, że porusza się on zbyt szybko, aby mógł być galaktyką satelitarną.

Uwaga! SagDEG nie należy mylić z Karłowatą Galaktyką Nieregularną w gwiazdozbiornie Strzelca (SagDIG), znajdującą się w odległości 4 mln lat świetlnych od nas (tak, jak już wspominaliśmy, astronomowie nie są najlepsi w nadawaniu nazw).

W pobliżu Drogi Mlecznej jest jeszcze Karłowata Galaktyka Eliptyczna (SagDEG). SagDEG znajduje się w gwiazdozbiornie Strzelca w odległości 70 000 lat świetlnych od Ziemi. Widzimy ją po drugiej stronie centrum Drogi Mlecznej, z tego powodu została odkryta dopiero w 1994 roku. Według astronomów galaktyka ta krąży po orbicie wokół Drogi Mlecznej od kilku miliardów lat. W swojej przeszłości SagDEG dwukrotnie przeszła przez dysk naszej Galaktyki. Ponadto symulacje jej trajektorii ruchu pokazują, że kolejny raz przejdzie ona przez dysk galaktyczny Drogi Mlecznej w ciągu najbliższych 10 milionów lat. Każde takie przejście przez dysk naszej galaktyki pozbawia SagDEG części gazu. Co więcej, w wyniku „zderzeń” z naszą galaktyką niektóre gwiazdy SagDEG zostały rozrzucone wzdłuż trajektorii jej ruchu i teraz można

je obserwować w postaci ogona gwiazd ciągnącego się za galaktyką. SagDEG jednak nadal jest samodzielną galaktyką, mimo że jej pierwotny eliptyczny kształt został rozciągnięty w wyniku oddziaływania z naszą galaktyką. Nie jest wiadome, czy SagDEG przetrwa kolejne przejście przez Drogę Mleczną, ale trzymamy za nią kciuki.

SagDEG nie będzie pierwszą galaktyką pochłoniętą przez Drogę Mleczną. Najnowsze obserwacje wskazują, że nasza galaktyka ma na sumieniu przynajmniej trzy ofiary. Pozostałości jednej z nich zostały w 2020 roku zaobserwowane blisko jądra Drogi Mlecznej. Pośmiertnie galaktykę tę nazwano Herkulesem. Badania wskazują, że była ona stosunkowo młodą galaktyką, a zderzenie nastąpiło 10 miliardów lat temu, we wczesnych etapach formowania się Drogi Mlecznej. Herkules była też stosunkowo duża. Szacuje się, że około 1/3 gwiazd w ścisłym centrum Drogi Mlecznej (tzw. halo) pochodzi właśnie z tej galaktyki.

Teraz opuścimy okolice naszej Galaktyki, zadając pytanie: która galaktyka jest najbardziej odległa? W tej chwili najdalej zaobserwowaną galaktyką jest GN-z11, która w 2016 roku pobiła rekord EGSY8p7 (więcej na jej temat w numerach Δ_{16}^{08} i Δ_{16}^{12}). GN-z11 narodziła się zaledwie 400 milionów lat po Wielkim Wybuchu (który nastąpił 13,8 miliarda lat temu). To zaskakujący fakt, ponieważ z kosmologicznego punktu widzenia 400 milionów lat to mgnienie oka. GN-z11 to więc bardzo młoda galaktyka, czyli taka, którą obserwujemy na wczesnym etapie rozwoju. Jest ~ 25 razy mniejsza od Drogi Mlecznej (jej masa stanowi ok. 1% masy naszej galaktyki), a mimo to tworzy gwiazdy około dwudziestokrotnie szybciej niż Droga Mleczna. Jej odkrycie zmusza badaczy do zrewidowania teorii na temat powstawania pierwszych galaktyk. Potwierdzenie jej istnienia i miarę odległości uzyskano w 2020 roku dzięki analizie jej widma spektroskopowego. Potwierdzono, że galaktyka GN-z11 ma przesunięcie ku czerwieni $z = 11,09$. Co to oznacza?

Galaktyki obserwujemy dzięki światłu emitowanemu przez gwiazdy znajdujące się w danej galaktyce. Jak Czytelnik zapewne pamięta, światło wykazuje własności falowe. Dla każdej fali możemy zdefiniować częstotliwość i długość. Jeśli wyobrazimy sobie falę jako ciąg szczytów i dolin, długość fali to odległość między dwoma szczytami, a częstotliwość to liczba oscylacji w ciągu sekundy. Przesunięcie ku czerwieni to zjawisko polegające na tym, że promieniowanie emitowane przez źródło oddalające się względem obserwatora w czasie obserwacji ma większą długość fali niż w momencie (i miejscu) emisji. W przypadku światła oznacza to, że kolor promieniowania jest przesunięty w kierunku dłuższych fal, czyli w kierunku czerwieni, biorąc za przykład najlepiej nam znany przedział światła widzialnego. W astronomii wyróżnia się trzy rodzaje przesunięcia ku czerwieni.

Pierwszy z nich wynika z efektu Dopplera. Tego samego, który modyfikuje brzmienie karetek pogotowia czy syren strażackich. Drugi to tzw. grawitacyjne przesunięcie ku czerwieni. W ogólnej teorii względności Einsteina czas ulega dylatacji w pobliżu masy, która wytwarza pole grawitacyjne. Jeśli masa zmienia miarę czasu, to zmienia się również częstotliwość fali. Trzeci rodzaj to kosmologiczne przesunięcie ku czerwieni. Jest ono bardzo podobne do efektu Dopplera, ale o ile efekt Dopplera jest spowodowany ruchem źródła względem obserwatora, to kosmologiczne przesunięcie ku czerwieni spowodowane jest rozszerzającą się przestrzenią. Dwa obiekty będące w spoczynku oddalają się od siebie w wyniku rozszerzania się Wszechświata. Ten efekt jest mierzony tylko dla odległości kosmologicznych.

Jak daleko jest zatem najbardziej odległa galaktyka? Odległość do GN-11z wynosi 32,2 miliarda lat świetlnych. Ale zaraz! Spozstrzegawczy Czytelnik zauważy, że przecież wiek Wszechświata to tylko 13,8 miliarda lat. A przecież nic nie może się poruszać szybciej niż światło. To w takim razie, jak dwie galaktyki mogą być oddalone o 32,2 miliarda lat świetlnych? Odpowiedź jest prosta. W czasie 13,8 miliarda lat Wszechświat się rozszerzał wraz ze znajdującymi się w nim galaktykami i emitowanymi przez nie fotonami – to tłumaczy ten pozorny paradoks.

Od Redakcji: Istnieje dość silna przesłanka o tym, że najnowsza perełka astronomii – Kosmiczny Teleskop Jamesa Webba w swoim głębokim polu zaobserwował kilku kandydatów o wyższym przesunięciu ku czerwieni. Naukowcy twierdzą, iż zaobserwowano galaktyki o przesunięciu ku czerwieni wynoszącym 13 (300 milionów po Wielkim Wybuchu), a nawet 20 (200 milionów lat po Wielkim Wybuchu). Widma spektroskopowe tych kandydatów zostaną niebawem bardzo dokładnie zbadane w celu potwierdzenia/obalenia tego odkrycia.



Rozwiązanie zadania F 1059.

Gwiazdy obiegają środek masy układu z tą samą prędkością kątową $\omega = 2\pi/T$, po okręgach o różnych promieniach. Przyjmijmy, że promień orbity gwiazdy o masie m_1 wynosi r_1 , a gwiazdy o masie m_2 równy jest r_2 . Środek masy układu porusza się ruchem jednostajnym. Ruch względny gwiazd opisywany jest przez wektor \vec{R} łączący środki gwiazd, $|\vec{R}| = r_1 + r_2$. Wektor \vec{R} porusza się jak wektor wodzący masy próbnej przyciąganej przez nieruchome centrum siły ciężkości o masie $m_1 + m_2$. Na podstawie III prawa Keplera mamy:

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{G(m_1 + m_2)}{4\pi^2}.$$

G oznacza tu stałą grawitacji. Mamy też:

$$v_1 = \omega r_1$$

$$v_2 = \omega r_2$$

Po prostych przekształceniach otrzymujemy:

$$R = \frac{(v_1 + v_2)T}{2\pi}; \quad m_1 + m_2 = \frac{(v_1 + v_2)^3 T}{2\pi G}$$

i ostatecznie:

$$m_1 = \frac{v_2(v_1 + v_2)^2 T}{2\pi G};$$

$$m_2 = \frac{v_1(v_1 + v_2)^2 T}{2\pi G}.$$

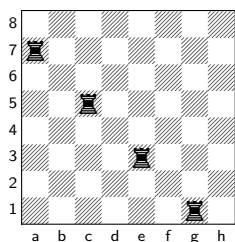
Miłosne wyznania to niełatwa sztuka, obarczona dużym emocjonalnym ryzykiem. Wspaniale, jeśli uczucie okazuje się odwzajemnione, jednak na szali stawiamy naszą dotychczasową dobrą relację z potencjalną drugą połówką. Jeśli bowiem dla tej drugiej osoby *to była tylko przyjaźń*, to kontynuacja znajomości może być niekomfortowa dla obu stron – zarówno wzdychającej (z oczywistych powodów), jak i wzdychanej (niezręcznie jest wiedzieć o swoim kumplu/kumpeli, że się w nas podkochuje). Czy można tak zdradzić swoje uczucia, aby w razie miłosnego zawodu wycofać się rakiem ze swojej deklaracji i dalej pielęgnować *tylko przyjaźń* (jak również nadzieję na to, że kiedyś ten stan rzeczy ulegnie zmianie)? Można, i o tym będzie niniejszy artykuł.



Na początek przedstawmy kilka niemądrych rozwiązań, tak aby należycie docenić problem. Na potrzeby naszych rozważań wprowadźmy na scenę dwoje bohaterów, Piotrusia i Wendy, przy czym Piotruś darzy Wendy sympatią, a Wendy darzy Piotrusia czymś więcej. Gdyby któregoś dnia Wendy zakrzyknęła: *Piotrusiu, Kocham Cię!*, a Piotruś odrzekł rycersko: *Yyy... no tego... wiesz, jakby to powiedzieć...*, to samo stwierdzenie Wendy: *Spokojnie Piotrusiu, ja tylko chciałam zobaczyć Twoją minę, możemy bawić się dalej*, mogłoby nie przekonać Piotrusia. Chcąc uniknąć wypowiedziania uczuć na głos, Wendy mogłaby zaproponować Piotrusiowi zabawę polegającą na wrzuceniu do pudełka kartki z odpowiedzią na pytanie, czy kocha się tę drugą osobę. Nie polepsza to jednak specjalnie sytuacji – o ile Wendy mogłaby się wypierać przed koleżankami, twierdząc, że to Piotruś wrzucił kartkę z odpowiedzią TAK i najwyraźniej to on jest w niej zakochany, to Piotruś wiedziałby doskonale, że jest inaczej. Wspomnijmy jeszcze o rozwiązaniu najgorszym: poprosić koleżankę, np. Dzwoneczka, by służyła jako powiernik miłosnych sekretów. Dzwoneczek w tajemnicy pyta Wendy o jej uczucia względem Piotrusia, potem pyta Piotrusia o jego uczucia wobec Wendy, a na końcu przekazuje obojemu informację (TAK/NIE), czy obie strony są zainteresowane tzw. *chodzeniem ze sobą*. W ten sposób w naszej sytuacji Wendy dowiedziałaby się, że Piotruś nie wykazuje zainteresowania, jednak Piotruś nie dowiedziałby się niczego o Wendy. Niby wszystko się zgadza, jednak pozostaje słaby punkt: Dzwoneczek. Czy aby na pewno dochowa sekretu? A może sama podkochuje się w Piotrusiu, a jeśli ten poinformuje go o miłości do Wendy, to wiedziony zazdrością Dzwoneczek wbrew prawdzie oznajmi obojemu negatywną odpowiedź, na zawsze grzebiąc szanse na szczęśliwe zakończenie? Ryzyko jest zbyt duże, i aby go uniknąć, możemy wykorzystać... karty



Rozwiązanie zadania M 1726.
Wieża na czarnym kwadracie atakuje dokładnie 8 białych pól. Wieża na białym polu atakuje dokładnie 7 białych pól. Ponieważ łącznie mamy 32 białe pola do zaatakowania, potrzebujemy co najmniej czterech wież. Jest to również wystarczająca liczba, co można wywnioskować z poniższej ilustracji.



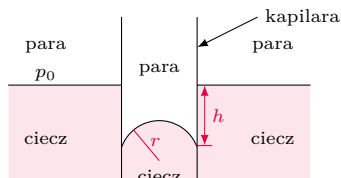
Potrzebujemy tylko 5 kart, ale niestety nie byle jakich – muszą być dwóch kolorów (powiedzmy, kiery i piki), przy czym w ramach jednego koloru muszą być nierozróżnialne. Ponieważ potrzebujemy trzech kart kier (♥) oraz dwóch kart pik (♠), ze względu na postulowaną nierozróżnialność musimy zubożyć aż trzy identyczne talie kart – cóż, miłość wymaga poświęceń. Kiedy już zdobyliśmy trzy identyczne kiery oraz dwa identyczne piki, Wendy rozdaje po dwie różnokolorowe karty sobie oraz Piotrusiowi, zaś pozostałą kartę (siłą rzeczy kiera) odkłada gdzieś z boku. Następnie...

1. Wendy kładzie na środku stołu swoje karty (koszulką do góry), jedna nad drugą, przy czym jeśli kocha Piotrusia, powinna umieścić **kiera na wierzchu**.
2. Na ten stosik dokładana jest odłożona wcześniej na bok „piąta karta”, po czym...
3. ...swoje karty dokłada Piotruś – jeśli kocha, to (w odróżnieniu od Wendy) powinien umieścić **pika na wierzchu**.
4. Na tak uzyskanym stosie 5 kart oboje na przemian wykonują operację „przełożenia” – dzielą stos w losowo wybranym miejscu i zamieniają miejscami część górną i dolną. Robią tak do czasu, aż każde z nich uzna, że to drugie musiało już stracić rachubę i na pewno nie jest w stanie stwierdzić, która karta stosu była na jego wierzchu na początku.



Rozwiązanie zadania F 1060.

Skorzystamy ze wskazówki – patrz rysunek – i przeanalizujemy warunki równowagi ciśnień w sytuacji, gdyby w układzie znajdowała się tylko analizowana ciecz i jej para nasycona.



W nieściślej cieczy o gęstości ρ_l na głębokości h panuje ciśnienie $p(h) = p_0 + \rho_l gh$, przy czym p_0 oznacza ciśnienie pary nasyconej nad płaską powierzchnią cieczy. Gdy układ jest w równowadze, ciśnienie to jest równe sumie ciśnienia $p_v(h)$ pary nasyconej nad meniskiem i nadwyżki ciśnienia związanego ze sferycznym meniskiem o promieniu r :

$$p_0 + \rho_l gh = p_v(h) + \frac{2\gamma}{r}.$$

Wartość $p_v(h)$ różni się od p_0 o ciśnienie słupa pary nasyconej o wysokości h . Para jest jednak ściślijm gazem – przyjmujemy, że z dobrym przybliżeniem spełnia równanie stanu gazu doskonałego. Gęstość pary, ρ_v , zależy więc od ciśnienia:

$$\rho_v = \frac{\mu p_v}{RT}.$$

Ciśnienie pary zmienia się z głębokością h pod płaską powierzchnią:

$$\frac{dp_v}{dh} = g\rho_v = g \frac{\mu p_v}{RT}.$$

Równanie to spełnia funkcja:

$$p_v(h) = p_0 \exp\left(\frac{\mu gh}{RT}\right).$$

Mamy też:

$$\rho_l gh = p_v(h) - p_0 + \frac{2\gamma}{r}.$$

Po prawej stronie ostatniego równania $p_v(h) - p_0 \ll 2\gamma/r$, czyli

$$h \approx \frac{2\gamma}{\rho_l gr}$$

Ostatecznie (przypominamy, że $p_v(h)$ oznaczało ciśnienie pary nasyconej tuż nad meniskiem wypukłym) ciśnienie p_v pary nasyconej nad zakrzywioną powierzchnią cieczy wynosi:

$$p_v = p_0 \exp\left(\frac{2\mu\gamma}{\rho_l r RT}\right).$$

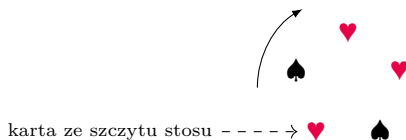
Otrzymany związek, tak zwane równanie Kelvina (w formie Ostwalda i Freundlicha), jest przydatny np. przy analizie tworzenia kropeł deszczu.

Przedstawione w rozwiązaniu rozumowanie pochodzi z pracy K. P. Galvina, *Chemical Engineering Science* **60**, 4659 (2005).

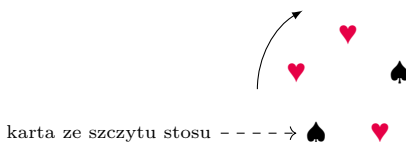
† Tutaj warto napisać nawet więcej: z punktu widzenia Piotrusia, przy założeniu, że Wendy go kocha, prawdopodobieństwo uzyskania przedstawionego układu kart jest takie samo, jak przy założeniu, że Wendy go nie kocha (w obu przypadkach równo 20%). Uzyskany układ kart nie przekazuje zatem Piotrusiowi żadnej informacji o uczuciach Wendy, tzn. nie zmienia jego oceny prawdopodobieństwa miłości Wendy.

5. Na koniec karty są układane w kółko i odkrywane. Jeśli obok siebie wystąpią 3 kery (♥♥♥), oznaczać to będzie wzajemną miłość, w przeciwnym wypadku co najmniej jedno z nich nie wykazuje uczuciowego zainteresowania tym drugim.

Zobaczmy, jak będzie przebiegać ta procedura w naszej sytuacji. Ponieważ Wendy ciepło myśli o Piotrusiu, układa na środku stołu koszulką do góry najpierw pika, a potem kiera (punkt 1.). Dokładana jest na to „piąta karta”, czyli kier (punkt 2.), po czym pora na ruch Piotrusia, który – niezainteresowany Wendy – również kładzie najpierw pika, a na wierzchu kiera (punkt 3.; podkreślmy, że taka kolejność ma inną interpretację u Wendy, a inną u Piotrusia). Gdybyśmy już w tym momencie przeszli do punktu 5. i ułożyli karty ze stosu „w kółko”, zgodnie z ruchem wskazówek zegara, moglibyśmy po odkryciu kart ujrzeć coś takiego:



Jak widać, brakuje tu trzech kierów ułożonych obok siebie, więc zgodnie z naszym algorytmem otrzymujemy negatywną odpowiedź na pytanie o wzajemną miłość naszych bohaterów (co jest zgodne z prawdą). Jednak bez wykonania na talii dodatkowych czynności Piotruś uzyskuje informację, że Wendy położyła kiera na pika, czyli darzy go (nieodwzajemnionym) uczuciem – jest to zbędna niezręczność, której pragnęliśmy uniknąć. Gdyby nasze karty były umieszczone w kółku na okrągłej, obrotowej tacce do sera, to moglibyśmy zakręcić tacką niczym ruletką, tak aby nie można było stwierdzić, która karta pochodziła ze szczytu stosu. Najpewniej jednak nie mamy do dyspozycji wspomnianej tacki, lecz jej działanie symulowane jest przez punkt 4. naszego protokołu. Każda operacja „przełożenia” odpowiada pewnemu obrotowi kółka z kartami. Gdy tych przełożeń jest wystarczająco wiele, możemy przyjąć, że nikt nie jest w stanie rozstrzygnąć, która karta była na szczycie stosu na samym początku. Powiedzmy zatem, że po wykonaniu 5. kroku protokołu oczom bohaterów ukazał się taki obrazek:



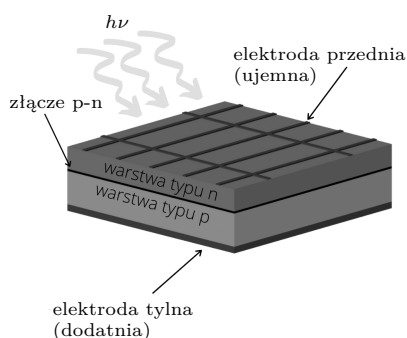
Rzecz jasna, niezmiennie brakuje nam trzech kierów ułożonych pod rząd – siłą rzeczy Wendy dowiaduje się o braku wzajemności swoich uczuć. Zastanówmy się jednak, czego Piotruś dowiedział się o Wendy. Nie wie on, który z wyłożonych pików należał do niego – mógł to być pik ze szczytu stosu lub nie. Pierwszy przypadek implikowałby, że Wendy położyła ♥ na ♠ (czyli kocha), a drugi – że ♠ na ♥ (czyli nie kocha). Nie jest on zatem w stanie stwierdzić, co Wendy myśli o ich relacji[†]. Nietrudno przekonać się, że dla dowolnej innej konfiguracji kocha/nie kocha procedura zachowuje się zgodnie z oczekiwaniami: przy wzajemnej miłości bohaterów zaobserwujemy układ ♥♥♥, natomiast gdyby żadne z nich nie kochało tego drugiego, otrzymalibyśmy rysunek taki jak wyżej (z dokładnością do obrotu), na podstawie którego żadne z nich nie będzie w stanie powiedzieć nic o uczuciach drugiej strony.

Przedstawiony przykład to chyba najprostszy przypadek problemu, który w literaturze kryptograficznej nosi nazwę *multiparty computation* – należy tak obliczyć wartość funkcji zależnej od wkładu każdego z (potencjalnie więcej niż dwojga) zainteresowanych, by nikt nie dowiedział się o wkładzie pozostałych więcej niż to, co można wywnioskować z uzyskanego wyniku. Jednym z ogólnych rozwiązań tego problemu jest tzw. *protokół Yao*, który opisywaliśmy w Δ_{03}^{19} . Więcej zaś o przedstawionym „karcianym” podejściu do tematu można próbować wyszukać samodzielnie pod hasłem *five cards trick in cryptography*.

Nowa generacja perowskitowych ogniw słonecznych

*Radboud University Nijmegen

Tłumaczenie: Olga DUDA

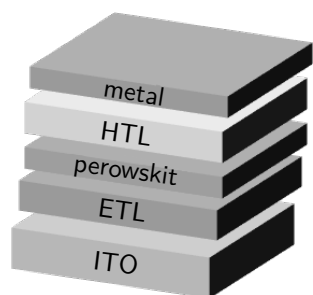


Rys. 1. Schemat przedstawiający ogniw słonecznych pierwszej generacji. Warstwy półprzewodników typu n oraz p zbudowane są z krzemu zawierającego odpowiednie domieszki innych pierwiastków

Ogniwa drugiej generacji występują w różnych odmianach. Do ich budowy wykorzystuje się materiały takie, jak: tellurek kadmu (CdTe), diselenek miedziowo-indowo-galowy (CIGS), uwodorniony krzem amorficzny.

Ogniwo barwnikowe składa się ze szkła fluorowanego jako podłoża, półprzewodnika typu n, takiego jak ZnO, TiO_2 , Fe_2O_3 itp., cząsteczek barwnika do pochłaniania światła, elektrolitu do regeneracji i przeciwelektrody do gromadzenia ładunków.

Organiczne ogniw słoneczne zawiera fotoaktywne warstwy składające się z polimeru półprzewodnikowego, pochodnej fulereny i metalowych elektrod do zbierania nośników ładunku.



Rys. 2. Schemat perowskitowego ogniw słonecznego: ITO – tlenek cyny domieszkowany indem, ETL – warstwa transportująca elektrony, HTL – warstwa transportująca dziury. ETL i HTL wykonane są z polimerów organicznych

O perowskitach w Δ_{15} pisali Michał Dusza, Magdalena Woźniak i Olga Malinkiewicz.

Waqas PERVEZ*

W obliczu trwającego kryzysu klimatycznego coraz więcej ludzi na całym świecie szuka sposobów na walkę z globalnym ociepleniem. Część mieszkańców Ziemi stara się minimalizować swój negatywny wpływ na środowisko poprzez zmniejszenie spożycia mięsa, ograniczenie zużycia tworzyw sztucznych i paliw kopalnych i, co najważniejsze, wprowadzenie w życie filozofii *zero-waste*. W dzisiejszej erze cyfrowej mogłoby się wydawać, że zużycie prądu odgrywa równie ważną rolę. W rzeczy samej, prąd elektryczny okazuje się „gwiazdą wśród paliw”, jeśli spojrzeć na raport Międzynarodowej Agencji Energetycznej z 2018 roku. Wynika z niego, że konsumpcja elektryczności stanowi 20% całkowitego zużycia energii na świecie [1]. Wśród dostępnych zasobów, które są obfite, czyste i zrównoważone, elektrownie wodne, energia wiatrowa i fotowoltaika jako źródła energii odnawialnej są najlepszym wyborem do wytwarzania zielonej energii elektrycznej.

Chociaż aktualnie elektrownie wodne dostarczają najwięcej energii na świecie spośród źródeł odnawialnych, to rozwój tej dziedziny energetyki jest mocno ograniczony przez takie czynniki, jak: odpowiednia lokalizacja elektrowni, dostępność wody, wysokie koszty, podatność na susze i ryzyko powodzi. Energia wiatrowa jest źródłem dobrze przystosowanym do produkcji na dużą skalę, ale też ma swoje ograniczenia, takie jak nierównomierny przepływ powietrza. Trudno jest też zainstalować turbiny wiatrowe na podwórku przy domu. Ale już ogniwa słoneczne mogą być powszechnie rozmieszczane na dachach domów. Energia słoneczna jest uważana za najbardziej odpowiedni wybór ekologicznej i czystej technologii wytwarzania energii elektrycznej na małą skalę.

Ogniwo słoneczne to urządzenie, które zamienia energię światła na nadającą się do wykorzystania energię elektryczną. Takie ogniw jest złączem p-n, czyli składa się z dwóch warstw różnego typu półprzewodników. Półprzewodnik typu p to taki, w którym nośnikami prądu są dziury, a półprzewodnik typu n to taki, w którym nośnikami prądu są elektrony. Kiedy światło pada na złącze p-n, na styku warstw generowane są pary elektron-dziura, które przemieszczają się do zewnętrznego obwodu przez metalowe elektrody. Wyróżnia się trzy generacje ogniw słonecznych.

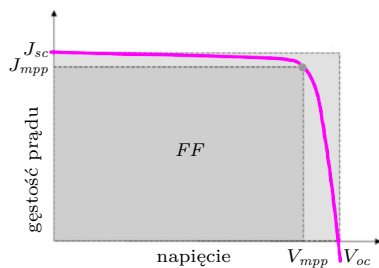
Ogniwa pierwszej generacji (rys. 1) wytwarzane są z kryształów krzemu lub arsenku galu. Druga generacja znana jest jako cienkowarstwowa i ma bardziej skomplikowaną strukturę warstwową (więcej na marginesie). Ogniw barwnikowe (zwane też ogniwem uczulonym barwnikiem), organiczne ogniw słoneczne i wreszcie ogniw perowskitowe (którego schemat budowy przedstawia rysunek 2) zaliczane są do trzeciej generacji ogniw słonecznych. Warstwą aktywną pochłaniającą światło w tym ostatnim jest związek o strukturze perowskitu (jodek metyloamonowo-ołowiowy). Kiedy ogniw jest wystawione na działanie światła słonecznego, to w wyniku pochłonięcia fotonu przez warstwę perowskitu powstaje tzw. ekscyton, czyli para elektron-dziura. Ze względu na małą energię wiązania ekscytonu, w temperaturze pokojowej ulega on łatwo rozpadowi i w konsekwencji elektron i dziura poruszają się dalej jako swobodne nośniki ładunku. Elektrony przepływają do półprzewodnika typu n, a dziury do półprzewodnika typu p, a następnie do metalowych elektrod, pomiędzy którymi w konsekwencji pojawia się napięcie.

Pomimo iż obecnie rynek ogniw fotowoltaicznych jest zdominowany przez krzem – ze względu na jego długą historię zastosowania w panelach słonecznych, jak również wydajność, z jaką w owych zastosowaniach się sprawdza – bez wątpliwości można stwierdzić, że istnieją nisze rynkowe, w których rozwijające się technologie, jak ogniwa organiczne czy perowskitowe, mogłyby zaistnieć. Czyniąc technologię słoneczną dostępną dla wszystkich, należy pamiętać, że wykorzystujące tę technologię ogniwa powinny być opłacalne, łatwe w obsłudze i możliwe do produkowania na dużą skalę. Produkowane z tańszych materiałów,



taniami metodami organiczne i perowskitowe ogniwa słoneczne mogą stać się tańsze od ogniw opartych na krzemie. Ponieważ składają się z cieńszych warstw pochłaniających (o grubości kilku nm), są elastyczne i lżejsze niż ogniwa krzemowe. Ponadto dostępne są w różnych kolorach, co wnosi walor estetyczny, dodatkowo poszerzając wachlarz możliwych zastosowań.

Organiczne ogniwa słoneczne są starsze niż ich perowskitowy odpowiednik i, pomimo mniejszej mocy wyjściowej, były już z powodzeniem stosowane w praktyce, czego przykładami są: drzewa solarne firmy OPVIUS umieszczone przy wejściu do siedziby Merck w Niemczech [2], elastyczne, organiczne ogniwo słoneczne Heliatak zainstalowane na zadaszeniu w Stade Roland Garros we Francji [3] oraz folia organiczna „ASCA” firmy ARMOR zastosowana w szklarniach ogrodnich [4]. Organiczne ogniwa słoneczne mają wiele zalet, jednak osiągające wyższą wydajność ogniwa perowskitowe wydają się najlepszym materiałem z punktu widzenia rynku. Niektóre firmy, takie jak Oxford PV i Saule Technologies, rozpoczęły produkcję perowskitowych ogniw słonecznych, przenosząc raczkującą technologię z laboratorium do przemysłu. W roku 2016 firma Oxford PV zainicjowała komercjalizację perowskitowych ogniw słonecznych, przyłączając się do przejęcia byłego zakładu produkcyjnego niemieckiej firmy Bosch Solar CIS Tech wyposażonego w 17 000 m² powierzchni [5]. W lipcu 2019 roku zdobyła dotację w wysokości 65 mln funtów na dalsze usprawnienie produkcji ogniw perowskitowych przy użyciu metody osadzania próżniowego [6]. W grudniu 2018 roku polska firma Saule Technologies rozpoczęła projektowanie i produkcję niskotemperaturowych perowskitowych ogniw słonecznych metodą druku strumieniowego (*ink-jet*). Procesy niskotemperaturowe są niezbędne przy wytwarzaniu elastycznych perowskitowych ogniw słonecznych w procesie druku strumieniowego, ponieważ elastyczne podłoża nie mogą być obrabiane w temperaturze powyżej 150°C [7]. W metodzie druku strumieniowego element piezoelektryczny kieruje osadzaniem atramentu na wcześniej określonych obszarach. Pomiędzy składnikami atramentu dochodzi do reakcji chemicznej, w rezultacie której powstają ciemne kryształy perowskitu. W ten sposób w ciągu kilku sekund powstaje fotoaktywna warstwa o wzorze plastra miodu. W najbliższych latach produkcja perowskitowych ogniw słonecznych będzie musiała zmierzyć się z wieloma wyzwaniami, jak lepsza konwersja energii (bliżej teoretycznej granicy 31%), przejście ze skali laboratoryjnej na skalę masowej produkcji oraz zwiększona stabilność i niezawodność.



Rys. 3. Charakterystyka prądowo-napięciowa ogniwa słonecznego

Podstawowym narzędziem do sprawdzania wydajności ogniwa słonecznego jest charakterystyka prądowo-napięciowa, którą teraz w skrócie omówimy. Jest to zależność gęstości prądu (czyli natężenia przypadającego na jednostkę przekroju poprzecznego) od napięcia, którą najwygodniej przedstawić w postaci wykresu (rys. 3). Sprawność ogniwa jest dana wzorem:

$$\eta = \frac{J_{sc} V_{oc}}{p_{in}} \cdot FF,$$

gdzie J_{sc} jest gęstością prądu zwarcia (*short circuit*), V_{oc} jest napięciem obwodu otwartego (*open circuit*), p_{in} jest natężeniem promieniowania padającego na ogniwo (moc na jednostkę powierzchni), a FF jest tzw. współczynnikiem wypełnienia (*fill factor*). Gęstość prądu zwarcia oznacza maksymalny prąd na jednostkę powierzchni, jaki może przepłynąć przez ogniwo. Współczynnik wypełnienia odpowiada największemu polu prostokąta, jaki można zmieścić pod krzywą na wykresie charakterystyki prądowo-napięciowej, i jest on dany wzorem:

$$FF = \frac{J_{mpp} V_{mpp}}{J_{sc} V_{oc}},$$

gdzie J_{mpp} i V_{mpp} opisują wspomniany prostokąt o największym polu, którego wierzchołek odpowiada tzw. punktowi maksymalnej mocy (*maximum power point*).

Najwyższa do tej pory zarejestrowana wydajność ogniw perowskitowych wynosi 25,2% (wynik certyfikowany przez National Renewable Energy Lab, NREL). Wydajność ta jest lepsza niż dla ogniw starszych technologii, jak



Źródła

- [1] International Energy Agency 2018
World Energy Outlook report
- [2] Merckgroup.com
- [3] Heliatek.com
- [4] Asca.com
- [5] OxfordPV.com/news 14 Nov. 2016
- [6] OxfordPV.com/news 3rd July 2019
- [7] Sauletech.com

ogniwa drugiej generacji (cienki film) oparte na CIGS (sprawność 23,4%) i CdTe (sprawność 22,1%), a nawet pierwszej generacji ogniwo krzemowe (sprawność 22,8%).

Dokładniejsza analiza działania ogniwa perowskitowego (wykraczająca poza ramy tego artykułu) wymaga rozróżnienia pewnych obszarów w warstwie perowskitu: rdzenia i interfejsu. Ten ostatni to obszar styku z sąsiednią warstwą, w którym, jak się okazuje, zachodzą kluczowe dla działania ogniwa procesy, mające istotny wpływ na sprawność. Ich dokładniejsze zrozumienie może jeszcze tę sprawność poprawić. Jest to więc ciągle przedmiot badań, podobnie jak eksperymentowanie z innymi materiałami, takimi jak węgiel i azot, zamiast ołowiu i jodku (które są toksyczne). Syntetyzowanie perowskitów o różnych składach, badanie ich własności i postęp w zrozumieniu budowy tego materiału w nanoskali mogą przyczynić się do opracowania jeszcze wydajniejszych, trwalszych i tańszych ogniw, które będzie można efektywnie wykorzystywać na coraz większą skalę.



Tyrania większości: Jak budżet partycypacyjny w Polsce dyskryminuje mniejszości

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Grzegorz PIERCZYŃSKI*, Piotr SKOWRON*

karta wyborcza	
a (koszt 120)	<input type="radio"/>
b (koszt 200)	<input checked="" type="radio"/>
c (koszt 500)	<input type="radio"/>
d (koszt 600)	<input type="radio"/>
e (koszt 500)	<input checked="" type="radio"/>
f (koszt 180)	<input type="radio"/>
g (koszt 1000)	<input checked="" type="radio"/>
h (koszt 110)	<input type="radio"/>

Karta do głosowania przez aprobaty. Wyborca, nazwijmy go i , zagłosował na projekty b , e oraz g . Zakładając, że jego zadowolenie to liczba pieniędzy przeznaczona na projekty, na które zagłosował, mamy $u_i(b) = 200$, $u_i(e) = 500$, $u_i(g) = 1000$ oraz $u_i(p) = 0$ dla $p \notin \{b, e, g\}$

Co gorsza, tyrania większości jest tak naprawdę **tyranią największej mniejszości**. Okazuje się, że nawet mała grupa wyborców może zdecydować o całym budżecie gminy; dzieje się tak, gdy głosy oddane przez pozostałych wyborców są rozproszone na różne projekty. Przykładowo, gdyby w Krakowie w 2020 roku 3586 wyborców (8,5% wszystkich wyborców) umówiło się, że chcą zagłosować na ten sam kosztowny projekt, to mogliby wykorzystać cały budżet przeznaczony na projekty ogólnomiejskie (6,4 mln zł). Byłoby to bardzo niesprawiedliwe.

Budżet partycypacyjny to proces, w którym mieszkańcy gminy decydują o tym, jak rozdysponować część środków z jej budżetu. W pierwszej fazie zgłaszane są propozycje projektów – aby zgłosić projekt, należy m.in. przygotować jego opis oraz podać koszt realizacji. Kolejnym krokiem jest głosowanie, na podstawie którego podejmowana jest decyzja, które z projektów zostaną zrealizowane. Pytanie brzmi: w jaki sposób sprawiedliwie rozdysponować środki z budżetu?

Przykładowo, w Warszawie w 2021 roku pośród wybranych pomysłów znalazły się trzy kosztowne projekty dotyczące budowy infrastruktury dla rowerów. Projekty te sumarycznie kosztowały aż 11,5 mln złotych, co stanowiło około 46% dostępnych środków. Na projekty te zagłosowało 39% wyborców. Oznacza to, że wyborcy ci zdecydowali o proporcjonalnie większej kwocie, niż wynikałoby to z ich liczby. Z drugiej strony, projekt modernizacji bieżni przy Szkole Podstawowej nr 222 nie otrzymał finansowania. Projekt ten kosztowałby tylko 3,2% przeznaczonych dla dzielnicy środków, a zagłosowało na niego aż 4,5% wyborców z tej dzielnicy. Co więcej, żaden z projektów, na który zagłosowali ci wyborcy, nie został wybrany – ich głosy zostały zignorowane. Patrząc ogólniej, gdyby zrezygnować z połowy projektów rowerowych, na które oddano 32 tysiące głosów, można by zrealizować inne, które otrzymały w sumie ponad 200 tysięcy głosów!

Przykład ten pokazuje, że metoda głosowania stosowana w Warszawie dyskryminuje pewne grupy wyborców. Przyjrzyjmy się jej bliżej.

Reguła 1 (reguła zachłanna). *Wyborcy głosują przez aprobaty: każdy wyborca może zagłosować na kilka projektów. Następnie wybieramy projekty w kolejności liczby otrzymanych głosów, dopóki pozwalają na to dostępne środki.*

Żałujemy, że mamy 20 projektów: 10 niebieskich i 10 czerwonych. Możemy zrealizować tylko 10 z nich. Żałujemy, że 51% wyborców głosuje na wszystkie niebieskie, a 49% na czerwone. Reguła zachłanna wybrałaby 10 projektów niebieskich. To zjawisko jest nazywane **tyranią większości**. Bardziej sprawiedliwe byłoby zrealizowanie 6 projektów niebieskich i 4 czerwonych, lub nawet 5 niebieskich i 5 czerwonych.

karta wyborcza	
a (koszt 120)	0
b (koszt 200)	30
c (koszt 500)	0
d (koszt 600)	0
e (koszt 500)	10
f (koszt 180)	0
g (koszt 1000)	10
h (koszt 110)	0

Przykładowa karta do głosowania w skali. Mamy 8 projektów, a, b, \dots, h , których koszty są zaznaczone w nawiasach. Wartość zadowolenia wyborcy z realizacji projektu jest podana explicite w postaci wartości punktowych. Wyborca i przypisał 30 punktów do projektu b i po dziesięć punktów do projektów e i g . Zatem $u_i(b) = 30$, $u_i(e) = u_i(g) = 10$ oraz $u_i(p) = 0$ dla $p \notin \{b, e, g\}$.

†D. Peters, G. Pierczyński, and P. Skowron. Proportional participatory budgeting with additive utilities. In *Proceedings of the 35th Conference on Neural Information Processing Systems (NeurIPS-2021)*, pages 12726–12737, 2021.

Zwróćmy uwagę, że projekt 2-opłacalny jest bardziej opłacalny niż 3-opłacalny, bo w jego przypadku wszyscy płacą mniej (nie więcej niż 2 złote) za jednostkę zadowolenia.



Czy możemy zatem zaprojektować metodę głosowania, która byłaby sprawiedliwa? Otóż tak! Aby ją opisać, zacznijmy od wprowadzenia pomocnej notacji matematycznej. Niech $P = \{p_1, p_2, \dots, p_m\}$ i $N = \{1, 2, \dots, n\}$ oznaczają odpowiednio zbiór projektów, które zostały zgłoszone, oraz zbiór wyborców. Niech $\text{koszt}(p)$ oznacza koszt projektu $p \in P$; przez k natomiast oznaczymy wielkość dostępnego budżetu.

Istnieje wiele formatów głosowania. Jednym z prostszych jest głosowanie przez aprobaty: każdy wyborca wskazuje projekty, które popiera. Alternatywą, która pozwala wyborcom lepiej wyrazić swoje preferencje, jest głosowanie w skali, czyli przypisanie każdemu projektowi pewnej liczby punktów (np. od 0 do 100). Na podstawie głosu wyborcy i definiujemy jego *zadowolenie* z projektu p , oznaczane $u_i(p)$. W przypadku głosowania w skali zadowolenie definiujemy jako liczbę punktów podaną przez wyborcę, a dla głosowania przez aprobaty odpowiada ono kwocie wydanej na popierane przez niego projekty, czyli $u_i(p) = \text{koszt}(p)$, jeżeli i głosuje na p , i $u_i(p) = 0$ w przeciwnym przypadku.

Spróbujmy teraz matematycznie zdefiniować, czym jest sprawiedliwość, czyli co to znaczy, że metoda wyborcza nie dyskryminuje wyborców. Powiemy, że grupa wyborców $S \subseteq N$ *zasługuje na zadowolenie* β , jeżeli wyborcy z S mając do dyspozycji proporcjonalną część budżetu (czyli $|S| \cdot k/n$), byłiby w stanie zakupić taki zbiór projektów T , który dawałby im w sumie zadowolenie większe bądź równe β . Zadowolenie grupy S z jednego projektu definiujemy jako zadowolenie najmniej zadowolonego wyborcy ($\sum_{p \in T} \min_{i \in S} u_i(p) \geq \beta$).

Definicja 1. *Zbiór projektów $W \subseteq P$ dyskryminuje grupę wyborców S , jeżeli grupa S zasługuje na zadowolenie β , ale zadowolenie ze zbioru W każdego wyborcy z S jest mniejsze niż β . Zbiór W jest proporcjonalny, jeżeli nie dyskryminuje żadnej grupy wyborców.*

Wspomniana na początku artykułu grupa 4,5% wyborców zasługiwała na zadowolenie, jakie otrzymałaby z modernizacji bieżni. Nie otrzymała jednak nic – zgodnie z naszą definicją grupa ta została zdyskryminowana.

Zasada proporcjonalności jest naturalnym kryterium. Co więcej, zbiór projektów, który ją spełnia, zawsze istnieje! Niestety jego znalezienie jest wyzwaniem nawet dla współczesnych komputerów. Pokażemy jednak, że istnieje reguła, która spełnia odrobinę słabszy warunek i którą można efektywnie obliczać[†].

Definicja 2. *Wybrany zbiór projektów $W \subseteq P$ jest proporcjonalny z dokładnością do jednego projektu, jeżeli dla każdej grupy wyborców $S \subseteq N$ istnieje jeden projekt, po którego sfinansowaniu grupa S nie będzie dyskryminowana.*

Zdefiniujemy metodę, która spełnia tę zasadę. Początkowo pieniądze z budżetu dzielimy po równo między wyborców. Potem, w kolejnych krokach, szukamy projektów, na które jakaś grupa wyborców może się zrzucić, i spośród nich wybieramy ten, który daje największe zadowolenie za każdą wydaną złotówkę.

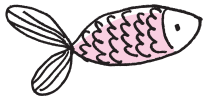
Aby opisać metodę formalnie, wprowadźmy dodatkowe oznaczenia. Niech k_i oznacza ilość pieniędzy, którymi dysponuje wyborca i w danej chwili. Powiemy, że projekt $p \in P$ jest λ -opłacalny, jeżeli wyborcy mogą go kupić tak, aby każdy z nich wydał λ złotych za jednostkę zadowolenia (lub całą posiadaną kwotę, jeżeli nie ma wystarczających środków):

$$\sum_{i \in N} \min(k_i, \lambda \cdot u_i(p)) = \text{koszt}(p).$$

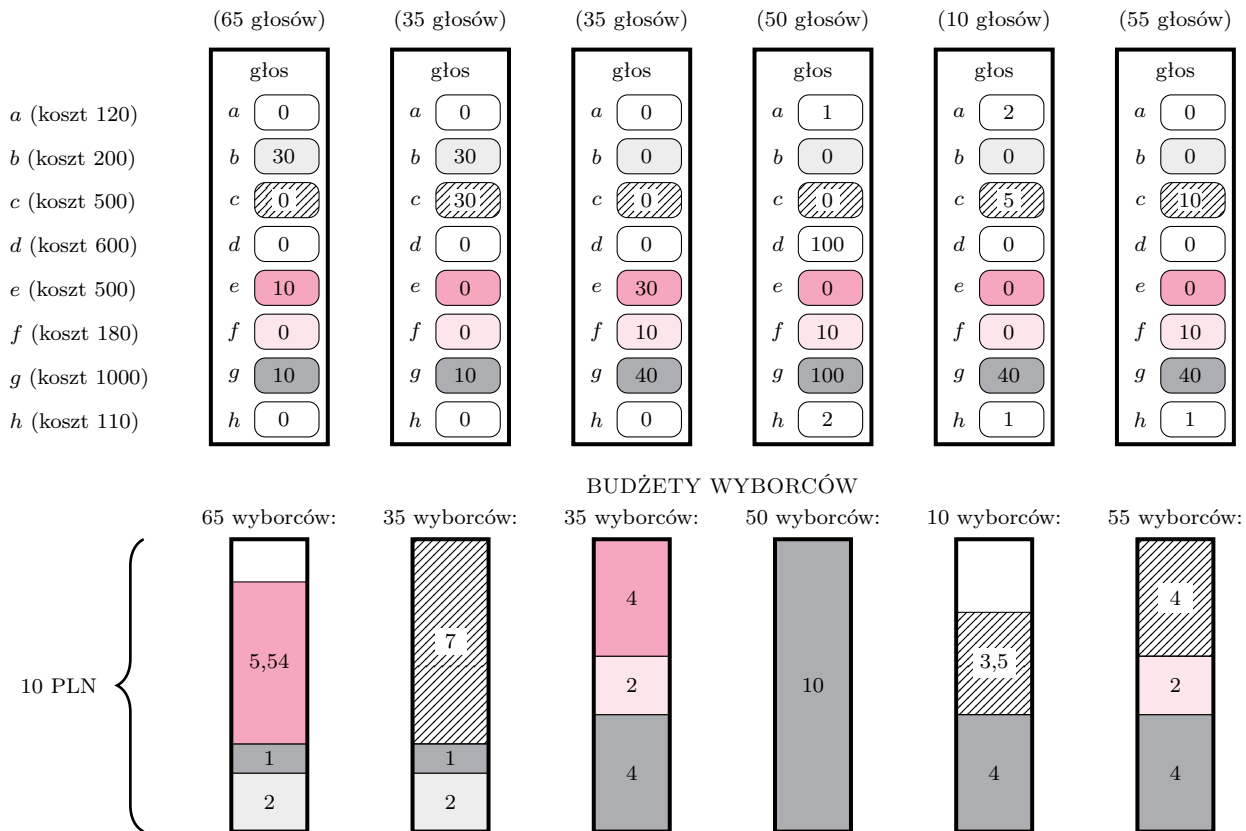
Reguła 2 (metoda równych udziałów). *Początkowo każdy wyborca $i \in N$ dostaje $k_i := k/n$ złotych. Zaczynamy od pustego zbioru projektów $W = \emptyset$ i wykonujemy w pętli:*

Wybieramy projekt $p \notin W$, który jest λ -opłacalny dla najniższej wartości λ , i dodajemy go do zbioru: $W := W \cup \{p\}$. Następnie aktualizujemy budżety wyborców: dla każdego $i \in N$ ustalamy $k_i := k_i - \min(k_i, \lambda \cdot u_i(p))$.

Kończymy, kiedy wyborcy nie mają pieniędzy, aby kupić dodatkowy projekt, na który zgłoszowali (czyli jeżeli dla każdego $p \notin W$ mamy $\sum_{i \in N: u_i(p) > 0} k_i < \text{koszt}(p)$).



Zilustrujemy działanie metody na przykładzie. Przypuśćmy, że mamy 250 wyborców, a dostępny budżet wynosi $k = 2500$. Mamy 8 projektów, a, \dots, h . Wartości przypisane przez wyborców do projektów są przedstawione na poniższym diagramie. Przykładowo, pierwszych 65 wyborców przypisuje 30 punktów dla projektu b , 10 punktów dla projektów e oraz g oraz 0 punktów dla pozostałych projektów.



Początkowo budżet dzielimy po równo między wyborców, więc każdy dostaje 10 złotych. Reguła w pierwszym kroku wybiera projekt b , który jest $1/15$ -opłacalny: aby go sfinansować, wszyscy wyborcy z pierwszych dwóch grup płacą po 2 zł (płatności są również zilustrowane na diagramie) i otrzymują 30 jednostek zadowolenia. Łatwo sprawdzić, że inne projekty są mniej opłacalne. Przykładowo, projekt g uzyskał sumarycznie 10 000 punktów i jego koszt wynosi 1000 złotych. Możemy rozłożyć jego koszt tak, aby każdy wyborca zapłacił $1/10$ zł za jednostkę zadowolenia: wyborcy z pierwszej i drugiej grupy powinni zapłacić po 1 zł, ci z czwartej grupy płacą po 10 zł, a pozostali po 4 zł. Jest on zatem $1/10$ -opłacalny, czyli mniej opłacalny niż projekt b . W drugim kroku to właśnie g zostanie wybrany. Następnie reguła wybiera projekt f . Zwróćmy uwagę, że wyborcy z czwartej grupy nie mają już dostępnych środków, zatem koszt projektu f musi zostać pokryty przez wyborców z trzeciej i szóstej grupy. Wyborcy ci płacą po 2 zł, czyli $\lambda = 1/5$ za jednostkę zadowolenia. W następnych dwóch krokach reguła wybiera projekty e i c . W tym momencie reguła kończy działanie i zwraca jako wynik $\{b, c, e, f, g\}$.

Twierdzenie 1. *Metoda równych udziałów jest proporcjonalna z dokładnością do jednego projektu.*

Dowód. Rozważmy grupę wyborców S i zbiór projektów $T \subseteq P$ taki, że $\sum_{p \in T} \text{koszt}(p) \leq k/n \cdot |S|$ oraz $\sum_{p \in T} \min_{i \in S} u_i(p) = \beta$. Pokażemy, że zbiór projektów zwrócony przez metodę równych udziałów po powiększeniu o jeden projekt daje przynajmniej jednemu z wyborców z S zadowolenie przynajmniej β .

Zastanówmy się, jak zadziałałaby metoda równych udziałów, gdybyśmy wyborcom z S początkowo przypisali nieskończoną ilość pieniędzy: $k_i = \infty$ dla każdego $i \in S$. Rozważmy pierwszy moment, w którym któryś z wyborców z S ,

Zauważmy, że budżet pozwoliłby dodatkowo sfinansować projekt a i h , natomiast wyborcy, którzy zagłosowali na te projekty, nie mają już wystarczających środków. Pokazuje to, że metoda równych udziałów może wybrać zbiór projektów, których sumaryczny koszt jest znacznie niższy niż dostępny budżet. Aby otrzymać regułę, która efektywnie wykorzystuje dostępne środki, możemy użyć jednej z kilku technik:

1. *Dopełnianie:* możemy uzupełnić wynik zwrócony przez metodę równych udziałów w inny sposób, np. zgodnie z metodą zachłanną.
2. *Skalowanie początkowego budżetu:* początkowo przypisujemy wyborcom nieco więcej pieniędzy niż równa część budżetu. Przypisujemy im taką kwotę, aby sumaryczny koszt projektów zwróconych przez metodę równych udziałów nie przekraczał oryginalnego budżetu k .

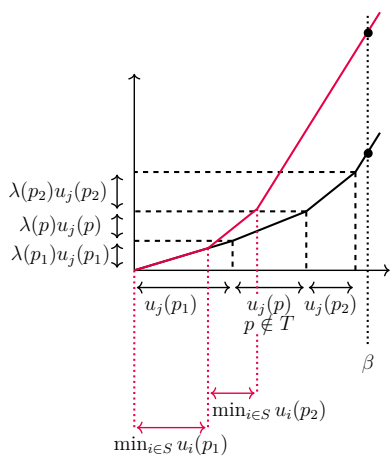
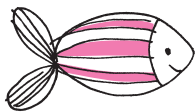


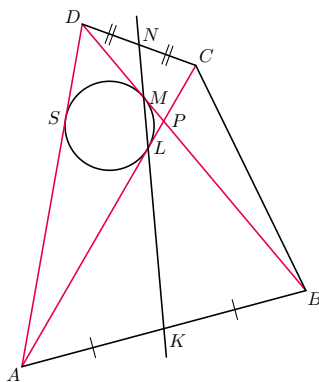
Diagram ilustrujący funkcję f z dowodu twierdzenia 1. Wykres kolorowy składa się z podzbioru kawałków o takim samym nachyleniu, jak kawałki wykresu czarnego. Aby otrzymać wykres kolorowy, pomijamy lub skraccamy (zachowując ich nachylenie) niektóre kawałki czarnego



Rozwiązanie zadania M 1727. Niech S będzie punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt APD z bokiem AD . Korzystając z równości odcinków stycznych i zależności danej w zadaniu, dostajemy $BM = AS = AL$ oraz $PL = PM$. Wobec tego

$$\frac{BK}{KA} \cdot \frac{AL}{LP} \cdot \frac{PM}{MB} = 1.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Menelaosa, zastosowanego do trójkąta APB , otrzymujemy więc współliniowość punktów K, L, M . Analogicznie dowodzimy, że na prostej LM leży punkt N , skąd teza.



nazwijmy go j , użył więcej niż k/n złotych ze swojego początkowego budżetu. Załóżmy, że stało się to podczas kupowania projektu p' . Do tego momentu metoda działała tak samo, jak gdyby wyborcy z S mieli k/n złotych. Wystarczy więc pokazać, że dotychczasowo wybrany zbiór powiększony o projekt p' da wyborcy j zadowolenie co najmniej β .

W tym celu zdefiniujemy funkcję kosztu zadowolenia f : niech $f(x)$ oznacza cenę, którą wyborca j zapłacił za pierwszych x jednostek zadowolenia. Zakładamy tu, że projekty są podzielne: na przykład, jeżeli wyborca zapłacił x złotych za pierwszy projekt i otrzymał w zamian zadowolenie równe y , to $f(\gamma y) = \gamma x$ dla każdego $\gamma \in [0, 1]$. Funkcja f jest zilustrowana na rysunku obok (czarny wykres).

Zakładając nieskończony budżet wyborców z S , każdy projekt p popierany przez przynajmniej jednego z nich zostanie w którymś momencie wybrany; przyjmijmy, że jest wtedy $\lambda(p)$ -opłacalny. Skoro metoda równych udziałów wybiera projekty, które minimalizują cenę za jednostkę zadowolenia, to funkcja f jest wypukła. Jest to też funkcja kawałkami liniowa. Zastanówmy się, jak oszacować z góry jej wartość w pewnym punkcie. Na pewno możemy to zrobić, biorąc wartość funkcji poskładanej z podzbioru „krótszych” kawałków o tym samym nachyleniu (funkcja oznaczona kolorem na rysunku obok). Możemy więc $f(\beta)$ oszacować przez:

$$f(\beta) = f\left(\sum_{p \in T} \min_{i \in S} u_i(p)\right) \leq \sum_{p \in T} \min_{i \in S} u_i(p) \lambda(p).$$

Z faktu, że $\sum_{i \in S} u_i(p) \lambda(p) \leq \text{koszt}(p)$, dostajemy oszacowanie:

$$\sum_{p \in T} \min_{i \in S} u_i(p) \lambda(p) \leq \sum_{p \in T} \min_{i \in S} u_i(p) \frac{\text{koszt}(p)}{\sum_{i \in S} u_i(p)} \leq \frac{\sum_{p \in T} \text{koszt}(p)}{|S|} \leq \frac{k}{n}.$$

Otrzymujemy, że $f(\beta) \leq k/n$. Oznacza to, że po wydaniu k/n złotych w wersji z nieograniczonym budżetem, czyli po kupieniu projektu p' , wyborca j musi mieć zadowolenie co najmniej β . Przy ograniczonym budżecie wybrany zbiór projektów powiększony o p' też daje mu zatem takie zadowolenie. \square

A jak wygląda to w praktyce? Wiele gmin próbuje różnymi sposobami równoważyć brak proporcjonalności metody zachłannej. Za priorytet uważane jest to, aby wśród realizowanych projektów znalazły się projekty z wszystkich dzielnic. W tym celu początkowy budżet dzielony jest między dzielnice (proporcjonalnie do liczby mieszkańców), a następnie reguła zachłanna uruchamiana jest w każdej dzielnicy oddzielnie. Ponadto z góry ustalona kwota przeznaczana jest na projekty ogólnomiejskie, które również są wybierane niezależnie od pozostałych.

Podejście to ma jednak sporo wad. Po pierwsze, wcale nie rozwiązuje ono problemu proporcjonalności! Podział budżetu między dzielnice wymusza proporcjonalność tylko dla grup wyborców zdefiniowanych geograficznie, a nie rozwiązuje problemu dla innych grup. Na przykład, jeżeli w każdej dzielnicy 51% wyborców będzie głosować tylko na projekty rowerowe, pozostali zostaną z niczym. Ponadto taki podział jest często sztuczny, ponieważ wyborcy mogą przecież korzystać z projektów z różnych dzielnic. Sztuczna jest też klasyfikacja projektów na dzielnicowe i ogólnomiejskie oraz podział środków między te dwie kategorie.

Jakie problemy rodzi podział na projekty ogólnomiejskie i dzielnicowe, pokazuje przykład dwóch projektów zgłoszonych w Warszawie w 2021 roku, które miały być realizowane na tej samej ulicy – ulicy Modlińskiej. Pierwszy projekt dotyczący nasadzeń zieleni był projektem ogólnomiejskim. Kosztował 435 tys. zł i uzyskał 12 tys. głosów, z czego 4 tys. od mieszkańców Białoleki. Nie uzyskał on jednak finansowania. Drugi projekt dotyczył naprawy chodnika i był projektem dzielnicowym. Kosztował on więcej (630 tys. zł) i uzyskał dużo mniej głosów (niecałe 2 tys.). Paradoksalnie, to ten drugi projekt uzyskał finansowanie, bo konkurencja między projektami w tej dzielnicy była dużo mniejsza.

Czy można było wybrać projekty lepiej? Sprawdźmy! Dzięki temu, że wyniki głosowania w niektórych miastach w Polsce są dostępne publicznie (na stronie pabulib.org), możemy przeprowadzić symulację: co by było, gdyby zamiast metody zachłannej miasta wykorzystywały metodę równych udziałów?

Porównamy tutaj dane łącznie z 17 instancji budżetu partycypacyjnego w 6 różnych miastach: Częstochowie (2020), Gdańsku (2020), Krakowie (2018–2021), Warszawie (2017–2021), Wrocławiu (2015–2018) i Zabrzu (2020–2021). W naszym zestawieniu znalazły się miasta różnej wielkości – od kilkunastu tysięcy głosujących w Zabrzu i Częstochowie do ponad 100 tysięcy w Warszawie. W Częstochowie, Gdańsku i Krakowie wyborcy przypisują projektom wartości punktowe; w Warszawie, Wrocławiu i Zabrzu głosowanie jest przeprowadzane przez aprobaty. Porównywać będziemy metodę równych udziałów (wersję ze skalowaniem budżetu) uruchamianą bezpośrednio w całym mieście, z regułą zachłanną uruchamianą osobno w dzielnicach, zgodnie z regulaminem danego miasta.

Przypuśćmy, że dla pewnego miasta reguła zachłanna zwróciła nam zbiór projektów W_Z , a metoda równych udziałów W_{RU} . Jak ocenić, który z nich jest lepszy? Najprostszym pomysłem wydaje się zmierzenie średniego poziomu zadowolenia wyborcy z wyników – czyli porównanie liczby

$$AVG(W_Z) = \sum_{i \in N} u_i(W_Z)/n \quad \text{ i } \quad AVG(W_{RU}) = \sum_{i \in N} u_i(W_{RU})/n.$$

Możemy również sprawdzić, ile procent wyborców uzyskuje lepsze zadowolenie z W_Z niż z W_{RU} ($\#(Z > RU)$) i odwrotnie.

	miasto	AVG(W_Z)	AVG(W_{RU})	$\#(Z > RU)$	$\#(RU > Z)$
głosow. w skali	Częstochowa	6,60	10,00	15%	48%
	Gdańsk	2,51	3,41	14%	44%
	Kraków	5,39	7,59	16%	70%
głosow. aprobaty	Warszawa	2 668 600	3 334 588	19%	58%
	Wrocław	866 909	1 007 896	14%	35%
	Zabrze	102 077	391 790	10%	42%

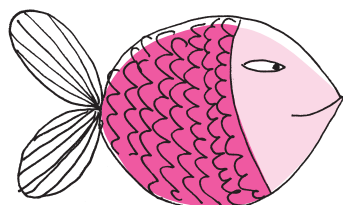
Jak widać, pomijając kwestię sprawiedliwości, metoda równych udziałów wydaje ten sam budżet efektywniej niż metoda zachłanna. To, że znacznie większy odsetek wyborców woli W_{RU} niż W_Z (od 3 do prawie 5 razy większy!), pokazuje, że zadowolenie wyborców jest jednocześnie równomierniej rozłożone.

Podobne wyniki zaobserwujemy, gdy będziemy mierzyć zadowolenie wyborcy jako liczbę zrealizowanych projektów, na które wyborca ten zagłosował. Wówczas wyniki będą się prezentować następująco:

miasto	AVG(W_Z)	AVG(W_{RU})	$\#(Z > RU)$	$\#(RU > Z)$
Częstochowa	1,00	1,57	14%	49%
Gdańsk	1,06	1,52	12%	43%
Kraków	2,61	3,82	10%	69%
Warszawa	6,21	8,10	11%	61%
Wrocław	1,34	1,65	10%	33%
Zabrze	0,79	1,08	9%	37%

Widzimy, że niezależnie od metryki wyborcy byłiby bardziej zadowoleni, gdyby do wyboru projektów zastosowano metodę równych udziałów. Łatwo sprawdzić, że metoda ta jest także sprawiedliwa wobec dzielnic (po tę analizę odsyłamy do dodatku, który zamieściliśmy na naszej stronie: www.deltami.edu.pl). Co więcej, metoda równych udziałów będzie się oczywiście zachowywać proporcjonalnie względem wszystkich spójnych grup wyborców – nie tylko tych wyznaczonych przez dzielnice, ale również np. rowerzystów, rodziców czy miłośników przyrody. Takich grup nie trzeba definiować a priori, ponieważ metoda potrafi je „wynioskować” ze struktury głosów wyborców. Nie powinno nas także dziwić, że dla danych z Warszawy z 2021 roku metoda równych udziałów pozwoliłaby sfinansować wspomnianą wcześniej modernizację biegni. Może już czas poddać pod głosowanie nie tylko projekty, ale także metodę, jaką są one wybierane?

Dla wygody zaprezentujemy tutaj uśrednione wyniki dla każdego miasta, jednak wnioski z naszej analizy będą prawdziwe również dla każdej edycji osobno.



Rozwiązanie zadania M 1728.
Oznaczmy $x = a - b$, $y = b - c$ i bez straty ogólności założmy, że $x, y \geq 0$. Założenie zadania można zapisać jako

$$x^2 + y^2 + (x + y)^2 \geq 2$$

lub równoważnie

$$x^2 + xy + y^2 \geq 1.$$

Teza zaś jest równoważna nierówności

$$x + y + x + y \geq 2,$$

czyli $x + y \geq 1$. Jednakże

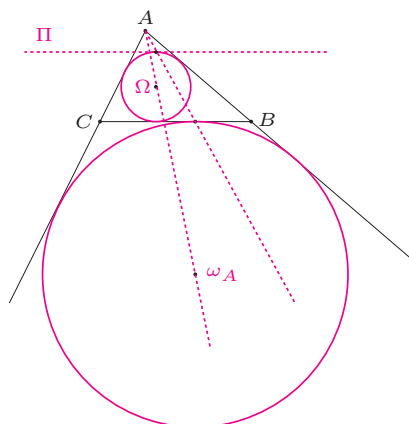
$$(x + y)^2 = x^2 + xy + y^2 + xy \geq x^2 + xy + y^2 \geq 1,$$

co kończy dowód.

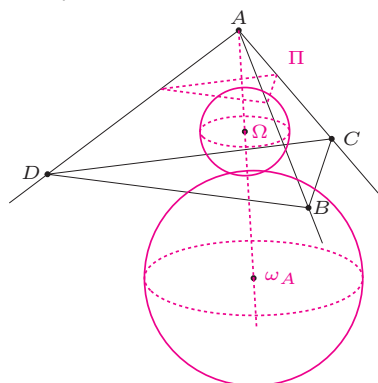
Konstrukcja sfer dopisanych do czworościanu

* Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Łukasz ŁOPACKI*



Okrąg wpisany Ω oraz dopisany do boku BC ω_A w trójkącie ABC . Zauważmy, że mamy jednokładność o środku w A , która przeprowadza Ω na ω_A oraz prostą Π styczną do Ω i na równoległą do BC prostą Π .



Jednokładność przekształcająca Ω na ω_A

Dopisanie sfer do czworościanu okazuje się trudniejsze niż dopisanie okręgów do trójkąta. Żeby zobaczyć dlaczego, spójrzmy najpierw na ten drugi przypadek. Mając dany okrąg wpisany w trójkąt, trzy okręgi dopisane można skonstruować przy użyciu jednokładności. I są to jedyne okręgi styczne jednocześnie do wszystkich trzech prostych wyznaczających boki trójkąta – w pozostałych trzech obszarach (tych przy wierzchołkach) takich okręgów znaleźć się nie da.

W przypadku czworościanu możliwości jest więcej. Płaszczyzny ścian dzielą przestrzeń na piętnaście części: wewnątrz czworościanu, cztery części przy wierzchołkach, cztery przy ścianach i sześć przy krawędziach. Sfery styczne do wszystkich czterech z tych płaszczyzn możemy sklasyfikować na podstawie tego, w której z tych części się znajdują:

- sfera wpisana (której istnienie przyjmujemy za znany fakt),
- sfery dopisane przy ścianach (które skonstruujemy),
- sfery dopisane przy krawędziach (których istnienie zbadamy).

Tak jak dla trójkąta, tak i tutaj obszary przy wierzchołkach nie zawierają sfer dopisanych. Co jednak może zaskakiwać, sfery dopisane przy krawędziach mogą istnieć lub nie. W niniejszym artykule znajdziemy prosty warunek stwierdzający, kiedy istnieją.

Sfery dopisane przy ścianach

Weźmy dowolny czworościan $ABCD$, oznaczmy jego objętość przez V , a pole ścian BCD , ACD , ABD i ABC odpowiednio jako S_A , S_B , S_C i S_D . Sferę wpisaną w czworościan, czyli sferę znajdującą się w jego wnętrzu, będziemy oznaczać przez Ω .

Skonstruujemy sferę dopisaną przy ścianie BCD , dalej nazywaną ω_A . W tym celu oznaczmy płaszczyznę styczną do Ω , równoległą do płaszczyzny BCD i różną od niej jako Π . Rozważmy jednokładność o środku A i skali dodatniej, przekształcającą Π na płaszczyznę BCD . Obraz Ω w tej jednokładności będzie sferą dopisaną przy BCD .

Istnienie opisanej wyżej jednokładności uzasadnimy teraz w sposób, który okaże się przydatny w dalszej części artykułu. Taka jednokładność istnieje wtedy i tylko wtedy, kiedy Π i płaszczyzna BCD znajdują się po tej samej stronie płaszczyzny równoległej do nich obu, zawierającej punkt A . A ponieważ punkt A i Π znajdują się po tej samej stronie płaszczyzny BCD , więc jest to równoważne warunkowi:

$$d(A, BCD) > d(\Pi, BCD), \quad \text{gdzie } d(X, Y) \text{ oznacza odległość między } X \text{ i } Y.$$

Lewa strona nierówności to wysokość czworościanu $ABCD$ wychodząca z A , a prawa to średnica sfery Ω . Ta obserwacja pozwala wyrazić obie strony nierówności poprzez objętość czworościanu i pola jego ścian (zob. margines):

$$\frac{3V}{S_A} > \frac{6V}{S_A + S_B + S_C + S_D},$$

czyli po prostych przekształceniach

$$S_B + S_C + S_D > S_A.$$

O prawdziwości powyższej nierówności można się przekonać, porównując pola ścian z polami ich rzutów na płaszczyznę BCD . Sfera dopisana przy ścianie zawsze więc istnieje. Możemy też obliczyć skalę k szukanej jednokładności:

$$k = \frac{d(A, BCD)}{d(A, \Pi)} = \frac{\frac{3V}{S_A}}{\frac{3V}{S_A} - \frac{6V}{S_A + S_B + S_C + S_D}} = \frac{S_A + S_B + S_C + S_D}{S_B + S_C + S_D - S_A},$$

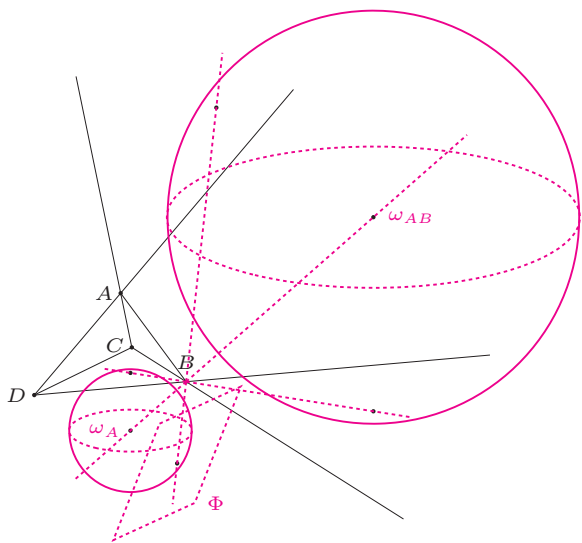
skąd odczytujemy, że długość promienia ω_A wynosi $\frac{3V}{S_B + S_C + S_D - S_A}$.

Wzory na objętość czworościanu:

$$V = \frac{1}{3}h \cdot S_A,$$

$$V = \frac{1}{3}r \cdot (S_A + S_B + S_C + S_D),$$

gdzie h to wysokość z A , a r to promień sfery wpisanej. Drugi wzór otrzymuje się z pierwszego, dzieląc czworościan na cztery mniejsze czworościany o wysokości r .



Jednokładność przekształcająca ω_A na ω_{AB}

Sfery dopisane przy krawędziach

Przejdziemy teraz do konstrukcji sfery dopisanej przy krawędzi. Bardziej konkretnie, będziemy chcieli skonstruować sferę – oznaczaną odtąd przez ω_{AB} – znajdującą się w tej części przestrzeni, która leży przy krawędzi AB .

Oznaczmy płaszczyznę styczną do ω_A równoległą do płaszczyzny ACD i różną od niej jako Φ . Podobnie do poprzedniego przypadku, możemy stwierdzić, że istnienie ω_{AB} jest równoważne istnieniu jednokładności o środku w B , przekształcającej Φ na płaszczyznę ACD , tym razem jednak o skali ujemnej. Istotnie, jeśli szukana sfera ω_{AB} istnieje, to ω_{AB} i ω_A znajdują się w kątach trójściennych wierzchołkowych przy B , więc jednokładność o pewnej ujemnej skali przeprowadza jedną na drugą.

Taka jednokładność istnieje wtedy i tylko wtedy, kiedy Φ i płaszczyzna ACD znajdują się po przeciwnych stronach płaszczyzny równoległej do nich obu, zawierającej punkt B . A ponieważ punkt B i Φ znajdują się po tej samej stronie płaszczyzny ACD , więc istnienie szukanej jednokładności jest równoważne warunkowi:

$$d(B, ACD) < d(\Phi, ACD).$$

Tym razem lewa strona to wysokość $ABCD$ wychodząca z B , a prawa to średnica ω_A , więc – tak jak poprzednio – obie strony nierówności możemy wyrazić poprzez objętość czworościanu i pola jego ścian. Opierając się na wyznaczonym wcześniej promieniu ω_A , otrzymujemy więc równoważną formę nierówności:

$$\frac{3V}{S_B} < \frac{6V}{S_B + S_C + S_D - S_A}, \quad \text{czyli} \quad S_C + S_D < S_A + S_B.$$

Jest to warunek konieczny i wystarczający dla istnienia ω_{AB} . Analogicznie do konstrukcji ω_A , wyliczamy skalę k otrzymanej jednokładności oraz promień r_{AB} sfery ω_{AB} :

$$k = \frac{S_B + S_C + S_D - S_A}{S_C + S_D - S_A - S_B}, \quad r_{AB} = \frac{3V}{S_A + S_B - S_C - S_D}.$$

Co się dzieje, gdy sfery dopisanej nie ma?

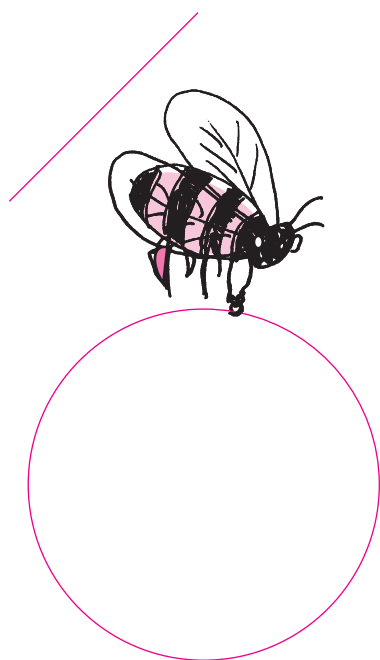
Przekonaaliśmy się, że w przypadku $S_C + S_D > S_A + S_B$ sfera dopisana przy krawędzi AB nie istnieje. Jednak wykorzystywana w jej konstrukcji jednokładność J_B^α o środku w B i skali $\alpha = \frac{S_B + S_C + S_D - S_A}{S_C + S_D - S_A - S_B}$ nadal jest dobrze określona. Czym więc jest obraz $J_B^\alpha(\omega_A)$ sfery ω_A ?

Możemy w tym przypadku zauważyć, że jednokładność ta ma skalę dodatnią oraz że Φ i płaszczyzna ACD leżą po tej samej stronie płaszczyzny równoległej do nich obu, zawierającej punkt B . Ponadto skala α jest tak dobrana, że $J_B^\alpha(\Phi) = ACD$; oznacza to, że sfera $J_B^\alpha(\omega_A)$ jest styczna do wszystkich czterech płaszczyzn zawierających ściany czworościanu. Znajduje się ponadto w części przestrzeni przy krawędzi CD , więc jest to nic innego, jak sfera ω_{CD} dopisana przy krawędzi CD .

Na zakończenie możemy więc sformułować ogólny wniosek:

$$J_B^\alpha(\omega_A) = \begin{cases} \omega_{AB} & \text{jeśli } S_A + S_B > S_C + S_D, \\ \omega_{CD} & \text{jeśli } S_A + S_B < S_C + S_D. \end{cases}$$

W pominiętym wyżej przypadku $S_A + S_B = S_C + S_D$ skala jednokładności α nie jest dobrze określona; jak już zauważyliśmy, żadna ze sfer ω_{AB} , ω_{CD} wówczas nie istnieje. Analogicznie możemy skonstruować pozostałe sfery dopisane i przekonać się, że sfery dopisane przy przeciwległych krawędziach wzajemnie się wykluczają.



Nawijanie miodu

Jan TURCZYNOWICZ*, Radost WASZKIEWICZ**

* Klub Naukowy Fenix, Warszawa

** Instytut Fizyki Teoretycznej, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

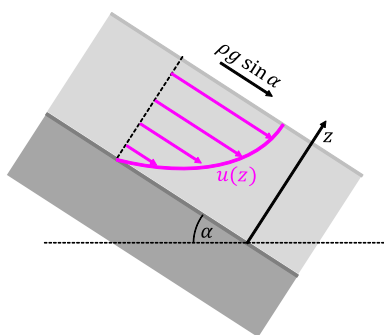
Narzędzie, które nie ma nazwy



Rys. 1. Miodownik, na którym utrzymana jest znaczna ilość miodu

Медоносець po ukraińsku, *honey dipper* po angielsku – zgodnie z nazwą narzędzie (sztuciec?) do nakładania miodu, które w języku polskim (wedle wiedzy autora) nie ma dokładnego tłumaczenia. Kandydatem jest ewentualnie miodownik, chociaż miodownik to jednak przede wszystkim rodzaj ciasta. W naszym artykule będzie to sztuciec o nietypowej symetrii, której, w kuchennej szufladzie autora, dorównuje jedynie wałek do ciasta; nie przydaje się jednak ona do toczenia, tylko do utrzymywania miodu na miodowniku przy użyciu jego lepkości. Jak to możliwe, że miód pozostaje na miodowniku? Przecież z jednej strony miodownika popychamy miód w dół, a z drugiej pociągamy go do góry – czy te efekty nie powinny się znosić?

Rzeki z miodu i tarcie wewnętrzne cieczy



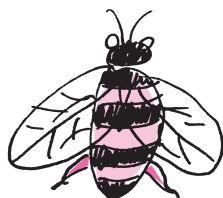
Rys. 2. Siły działające na miód na równi pochyłej

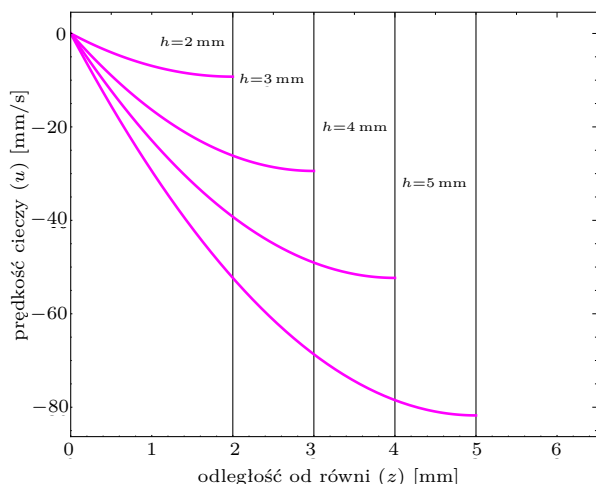
Żeby zrozumieć, w jaki sposób miód zachowuje się na obracającym się miodowniku, rozważmy prostszą sytuację: nieskończoną równię pochyłą pod kątem α , po której spływa warstwa miodu o grubości h . Skoro prędkość cieczy jest stała, to siły działające na nią muszą się równoważyć. Wiemy, że grawitacja ciągnie ciecz do dołu (z gęstością siły proporcjonalną do gęstości miodu ρ i przyspieszenia grawitacyjnego g), a więc musi działać jakaś dodatkowa równoważąca siła, działająca w górę równi. Składową siły grawitacji prostopadłą do równi równoważy gradient ciśnienia (taki sam jak w hydrostatyce: $p = \rho g z \cos \alpha$). Z racji symetrii ciśnienie nie zmienia się w kierunku równoległym do równi, nie może w takim razie zrównoważyć tej składowej siły grawitacji. Składowa siły grawitacji równoległa do równi jest równoważona przez *tarcie wewnętrzne cieczy*. Warstwy miodu bliżej wierzchu poruszają się szybciej niż te w pobliżu równi, a siła przeciwdziałająca tej różnicy prędkości to lepkość. Różnica sił pochodzących od warstwy poniżej i powyżej będzie wypadkową siłą od tarcia wewnętrznego działającą na warstwę pośrodku – ta siła zależy wobec tego od „różnicy różnic” prędkości. W rzeczywistości prędkość cieczy u zmienia się w sposób ciągły wraz ze wzrostem odległości z od równi, i gęstość siły wynikającej z lepkości możemy wyrazić jako $\mu \frac{d^2}{dz^2} u(z)$, gdzie μ jest stałą materiałową określającą „niechęć” cieczy do różnic prędkości, nazywaną lepkością dynamiczną. Stałą μ (oznaczaną czasem też η) można zmierzyć na przykład metodą zaproponowaną w artykule Stanisława Bednarka *Wyznaczamy współczynnik lepkości cieczy w Δ_{08}^8* . Balans sił działających na ciecz w ogólnym przypadku wyraża równanie Naviera–Stokesa (o tym można przeczytać np. w artykule Witolda Sadowskiego *Równanie Naviera–Stokesa w Δ_{14}^{14}*). W naszym szczególnym przypadku, w którym u zależy wyłącznie od współrzędnej z , balans sił w kierunku równoległym do równi można zapisać wyjątkowo prosto jako

$$(1) \quad \mu \frac{d^2}{dz^2} u(z) = \rho g \sin \alpha.$$

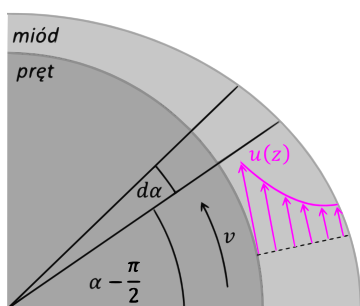
Wprawny Czytelnik zauważy bez trudu analogię w równaniu (1) do równania ruchu jednostajnie przyspieszonego. Tym razem jednak, zamiast położenia w czasie, badamy prędkość w zależności od odległości od równi. Można zatem wywnioskować, że musi ona zależeć kwadratowo od współrzędnej z i pozostaje nam ustalić dwie stałe. Dwa brakujące warunki opisują zachowanie cieczy na dnie i na powierzchni. Na dnie ciecz nie porusza się względem ścianki: $u(0) = 0$, z kolei na powierzchni znajdziemy warstwę cieczy, na którą lepkość działa tylko z jednej strony, więc żeby siły pozostały w równowadze, siła lepkości działająca na warstwę musi być zerowa: $\frac{d}{dz} u(h) = 0$. Otrzymujemy następujące równanie na prędkość w zależności od wysokości:

$$(2) \quad u(z) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\mu} z(z - 2h).$$





Rys. 3. Typowe rozkłady prędkości dla różnych grubości warstwy miodu na pochylonej równi. Krzywe narysowano dla lepkości kinematycznej μ/ρ równej $3,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, przy przechyleniu ścianki wynoszącym $\alpha = 45^\circ$. Grube warstwy odpowiadają dużemu gradientowi prędkości w okolicy dna, a więc też dużej sile działającej na miód



Rys. 4. Wycinek pręta o szerokości α . Można zauważyć, że wycinek wygląda jak równia pochyła analizowana w poprzednim akapicie

Miodociąg taśmowy

Korzystając z równania (2), możemy znaleźć rozkład prędkości dookoła obracającego się pręta, podobnie jak w artykule [2]. Mały wycinek α takiego pręta wygląda przecież jak pochylony płaski taśmociąg (poruszający się ze stałą prędkością v równą iloczynowi promienia pręta a i prędkości kątowej pręta ω , rys. 4). W takim razie rozkład prędkości względnej w zależności od odległości od ścianki będzie dany przez równanie (2).

Naturalnym pytaniem w tej sytuacji jest: jaką objętość miodu można przetransportować takim miodociągiem taśmowym? Strumień objętości Q podróżujący do góry miodociągiem o szerokości w będzie więc całką rozkładu prędkości (2):

$$(3) \quad Q = \int_0^h u(z) dz = wh \left(v - \frac{\rho g h^2 \sin \alpha}{3\mu} \right).$$

Jeśli chcemy uzyskać stabilny rozkład miodu dookoła naszego obracającego się miodownika, to dla każdego takiego małego taśmociągu o długości α ilość miodu wpływającego na niego i wypływającego z niego musi być identyczna. W takim razie $Q(\alpha) = Q_0$, co w połączeniu z równaniem (3) daje nam rozkład grubości w zależności od kąta. Rysując kontur $Q(\alpha, h) = Q_0$ dla kilku wartości Q_0 (rys. 5), można zauważyć dwa rodzaje konturów – zamknięte, dające fizyczne

rozwiązania, i otwarte, które dążą do nieskończoności dla pewnych α i nie mają fizycznej interpretacji. Druga obserwacja jest taka, że dla fizycznych rozwiązań grubość warstwy rośnie wraz z Q_0 (istotnie, dla na przykład $\alpha = 0$ funkcja $Q(h)$ jest monotoniczna, bo jest wielomianem o dodatnich współczynnikach).

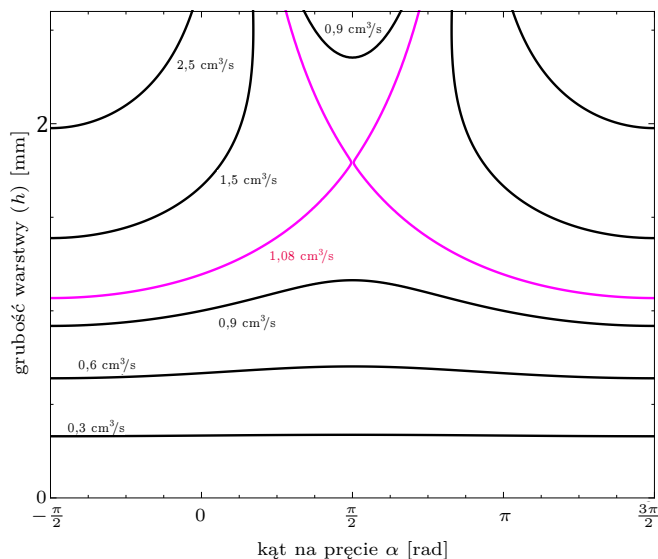
Znalezienie największej objętości miodu, dla której istnieje stabilny rozkład dookoła pręta, okazuje się zatem równoważne ze znalezieniem największego Q_0 , dla którego istnieje zamknięty kontur $Q(h, \alpha) = Q_0$. Warunkiem koniecznym dla istnienia takiego konturu jest istnienie h , dla którego $Q = Q_0$ dla każdego α . Dla ustalonego α możemy znaleźć $h = h_{\text{crit}}$, dla którego $Q(h, \alpha)$ jest największe. Różniczkując równanie (3) ze względu na h przy stałym α , otrzymujemy warunek na h_{crit} :

$$(4) \quad 0 = w \left(v - \frac{h_{\text{crit}}^2 \rho g \sin \alpha}{\mu} \right).$$

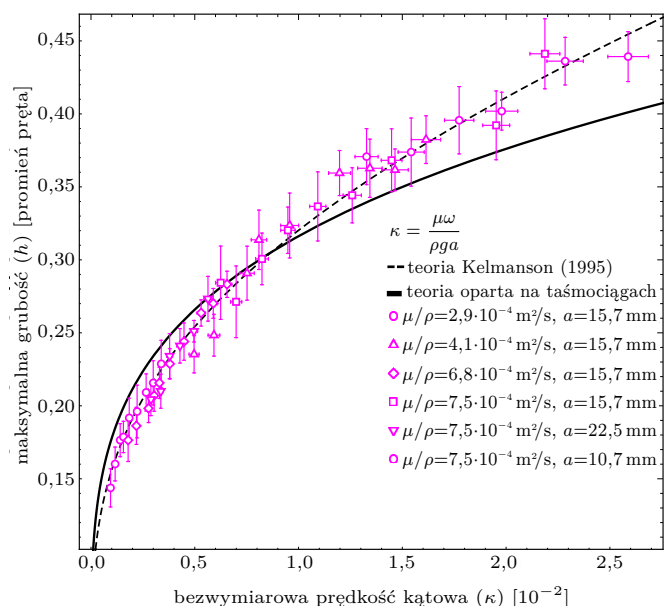
Jeśli $\sin \alpha > 0$, możemy rozwiązać równanie (4) na h_{crit} i wstawiając do (3), otrzymujemy maksymalną wartość $Q = Q_{\text{crit}}$ dla ustalonego α (dla $\sin \alpha < 0$ wszystkie wartości Q są osiągalne):

$$(5) \quad Q_{\text{crit}} = \frac{2}{3} v w \sqrt{\frac{\mu v}{\rho g \sin \alpha}}.$$

Q_{crit} osiąga najmniejszą wartość dla $\alpha = \pi/2$, kiedy $\sin \alpha = 1$. Wynika stąd, że maksymalna wartość Q_0 , dla której istnieje zamknięty kontur $Q(h, \alpha) = Q_0$, wynosi co najwyżej $Q_{\text{max}} = \frac{2}{3} v w \sqrt{\frac{\mu v}{\rho g}}$. Okazuje się, że $Q_0 = Q_{\text{max}}$ rzeczywiście daje szukany kontur (co wynika z ciągłości $Q(h, \alpha)$), zaznaczyliśmy go kolorem na wykresie 5. Zaskakujące jest to, że dla tego konturu pojawia się dzióbek (ang. *cusp*) dla $\alpha = \pi/2$, co jest bardzo rzadką sytuacją w mechanice płynów. W naszym przypadku osobliwość ta znika, gdy uwzględnimy napięcie powierzchniowe (co niestety znacznie komplikuje obliczenia).



Rys. 5. Kontury dla $Q_0 = \{1,5, 2,5, 3, 3,4, 3,8, 4,7\} \text{ cm}^3/\text{s}$, część daje fizyczne rozwiązania, część dąży do nieskończoności. Przyjęliśmy $\mu/\rho = 3,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$, $w = 1 \text{ cm}$, $v = 9 \text{ cm/s}$



Rys. 6. Wyniki naszych pomiarów maksymalnej grubości warstwy wyrażonej w wielokrotnościach promienia pręta. Punkty pomiarowe są rezultatem zmiany wszystkich trzech istotnych parametrów układu

Chwila na analizę wymiarową

Wracając do równania (1), widzimy, że dla naszego problemu istotna jest wielkość $\rho g/\mu$ i, o ile utrzymamy ją stałą, możemy zmieniać ρ, g, μ bez zmiany rozkładu prędkości cieczy. Popularną techniką w hydrodynamice jest wyrażanie równań we współrzędnych bezwymiarowych: jeśli będziemy wyrażać prędkość cieczy jako wielokrotność q prędkości pręta v , a odległość od powierzchni pręta jako wielokrotność s promienia pręta a , to równanie (1) przyjmie postać

$$(6) \quad \frac{\mu v}{\rho g a^2} \frac{d^2 q(s)}{ds^2} = \sin \alpha.$$

Dodatkowo, korzystając z warunku $v = \omega a$, dochodzimy do wniosku, że maksymalna możliwa grubość cieczy utrzymująca się na miodowniku, mierzona w wielokrotnościach grubości pręta, zależy tylko od jednego parametru $\kappa = \mu\omega/(\rho g a)$, który możemy interpretować jako bezwymiarową prędkość kątową.

Sprawdzamy nasze przewidywania

Na ile przybliżenie walca przez wiele krótkich równi pochyłych ma sens? Czy napięcie powierzchniowe istotnie zaburza nasze obserwacje? Możemy to sprawdzić eksperymentalnie, badając zachowanie lepkiej cieczy (mieszaniny gliceryny z wodą o lepkości $\mu/\rho \in (3 \cdot 10^{-4}, 7,5 \cdot 10^{-4}) \text{ m}^2/\text{s}$) na obracającym się walcu (zobacz rysunek A na okładce). Pręt jest obracany za pomocą silnika prądu stałego z przekładnią, co umożliwia łatwą zmianę prędkości kątowej pręta ω . W układzie można wymieniać pręty w celu zmiany promienia pręta a oraz używać cieczy o różnej lepkości μ i gęstości ρ . W pomiarach wyznaczano maksymalny możliwy promień konturu na pionowym fragmencie pręta dla danej wartości κ .

Okazuje się, że nasza teoria oparta na taśmociągach działa całkiem nieźle (rys. 6), ale wciąż można ją znacznie poprawić. Przyjrzyjmy się jeszcze raz prętowi z miodem (rys. 4). Warstwy cieczy bliżej środka pręta mają na rysunku mniejszy obwód niż te dalej od pręta, co wpływa na wartość siły lepkości. Analizę uwzględniającą wpływ krzywizny pręta zaprezentował M. Kelmanson w artykule [1]. Zwiększa to znacznie poziom skomplikowania rozwiązania, jednak zapewnia jeszcze lepsze wyniki (przerwana czarna linia). Tak jak można by się spodziewać, wpływ krzywizny staje się bardziej istotny dla małych promieni obracającego się pręta (małe a), czyli dla dużych wartości κ .

Na okładce (rys. B) można zobaczyć kontur utworzony przez miód nałożony na nasz układ doświadczalny.

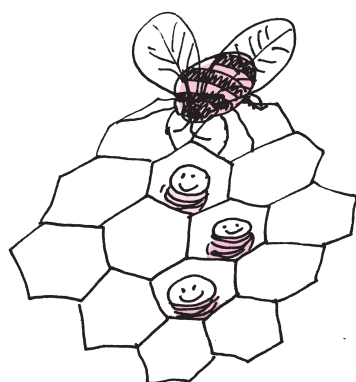
Podziękowania

Powyższe badania są wynikiem prac prowadzonych przez drużynę reprezentacji Polski nad zadaniem *Saving Honey*, które jest częścią Międzynarodowego Turnieju Młodych Fizyków 2022. Drużyna w składzie: Jan Turczynowicz (kapitan), Rafał Bryl, Mikołaj Czarnecki, Igor Kumela, Maciej Dąbkowski, Radost Waszkiewicz (opiekun), dr Łukasz Gładczuk (opiekun), prowadziła swoje prace w Klubie Naukowym Fenix w Warszawie.

Autorzy dziękują organizatorom programu Ochota na Naukę (grant w sesji wiosennej 2022), opiekunom warsztatu na wydziale Fizyki UW (a w szczególności Piotrowi Zbinkowskiemu) oraz dr. hab. Maciejowi Lisickiemu za komentarze do pracy.

Bibliografia

- [1] Kelmanson, Mark A.: *Theoretical and experimental analyses of the maximum-sustainable fluid load on a rotating cylinder*, "Journal of Engineering Mathematics" 29 (1995), S. 271–285.
- [2] Moffatt, H. K.: *Behaviour of a viscous film on the outer surface of rotating cylinder*, "Journal de Mecanique" 16 (1977).



Bez komórek jajowych i plemników

W dziedzinie genetyki stosowanej najbardziej pasjonującym obiektem badań pozostaje Człowiek. Wszystkie doniesienia o postępach tej nauki zawsze kończą się pytaniem: do czego to nam się przyda?

Od lat nauka idzie w tym kierunku. Zaczęło się od poznania komórek macierzystych (1960) oraz klonowania (owca Dolly, 1986). Rozpaliły wyobraźnię doniesienia o możliwości terapii genowej, o lekach nowej generacji tworzonych przez inżynierów genetycznych (rekombinowana insulina ludzka, pierwszy w historii światowej medycyny lek stworzony metodami inżynierii genetycznej zatwierdzony do stosowania u ludzi, 1982), o reprogramowaniu komórki somatycznej ssaków do macierzystej (*induced pluripotent stem cells*, iPSC, 2006), o zapłodnieniu *in vitro* (1978).

Ta ostatnia technika jest obecnie najczęściej stosowaną techniką rozrodu wspomaganego medycznie oraz metodą leczenia niepłodności. W procesie zapłodnienia *in vitro* u ssaków (a więc także ludzi) możliwy jest rozwój zygoty poza organizmem do stadium 6–8 komórek (ok. 5 dni od zapłodnienia), po czym implantuje się ją do macicy. W doświadczonych zespołach uzyskuje się 30–40% urodzeń, co zgodnie z obecną wiedzą jest bliskie stosunkowi narodzin do poczęć na drodze „tradycyjnej”. W tym etapie podziałów komórki zygoty możliwe jest pobranie pojedynczej komórki i zbadanie jej pod kątem prawidłowości rozwojowych (liczba chromosomów, łatwo identyfikowalne letalne mutacje). Taki etap, nie w każdym kraju prawnie dozwolony, nazywany jest diagnostyką preimplantacyjną.

Kontynuowane są próby, bez znacznych postępów, terapii genowej chorób genetycznych przez wprowadzenie „zdrowego” genu wektorami oraz drogą przyżyciowej korekty i modyfikacji genomów (CRISPR, 2005). Podjęto próby tworzenia żywych trójwymiarowych elementów tkankowych: organoidów (2009) i pierwszych żywych robotów (xenobotów), dzielących się, ruchomych mikroelementów tkankowych, nieznanymi w świecie żywych organizmów, projektowanych metodami informatycznymi (sztuczna inteligencja).

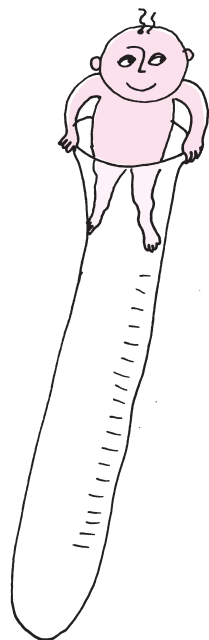
Ostatnio dwa światowe zespoły, izraelski (Instytut Weissmana) i brytyjski (Uniwersytet w Cambridge), opisały powołanie do życia i hodowanie *in vitro* syntetycznego zarodka mysiego z wykorzystaniem wstępnych technologii wypracowanych w Chinach.

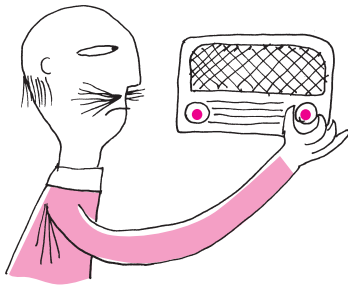
Oba wspomniane zespoły naukowe prowadzą prace badawcze w tym kierunku już kilka lat. Trochę po omacku szuka się elementów, które należy zorganizować „wokół” zygoty, aby się rozwijała do zarodka bez matki.

Droga wybrana w Cambridge i Tel Awiwie rozpoczyna się od utworzenia totipotentnej komórki macierzystej z wybranej tkanki samicy. Następnie w kolejnych procedurach dołączane są 4 różne naturalnie występujące komórki macierzyste tego samego gatunku. Rozwija się „coś”, co według autorów prac w pełni przypomina rozwijający się zarodek myszy. Doświadczenie przerwano po 11 dniach (ciąża myszy trwa 21–23 dni). W „zarodku” wyróżniono zaczątki układu nerwowego, oddechowego i krwionośnego (bijące serce) oraz pokarmowego.

To jest moment, kiedy poznanie szczegółów procedury nie jest dla zwykłego czytelnika aż tak istotne. Cały czas myśli on o przeniesieniu takich zabiegów na sytuację ludzką. Jeżeli są możliwe dla myszy, to prędzej czy później stanie się to faktem medycznym. Czy to jest wstęp do hodowli ludzi? Czy raczej uzyskamy nieograniczony dostęp do produkcji zastępczych tkanek i narządów? A może nim to zrobimy, to Ziemia spłonie w katastrofie klimatycznej – wywołanej przez ten sam gatunek? Znajdujemy się na czerwonej linii i pozostaje nam albo zachwył potęgą ludzkiego umysłu, albo przerażenie.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)





PUL PUL NULL NULL NULL PUL PUL NULL

Prosto z nieba: Pozdrowienia z cmentarza

Pulsar radiowy to bardzo gęsta i obdarzona polem magnetycznym *gwiazda neutronowa*, o zwartości $2GM/(Rc^2) \approx 0,33$ dla gwiazdy o masie $1,4 M_{\odot}$ i promieniu 12 km. Populacja pulsarów radiowych zawiera obiekty o okresach obrotu wokół osi P od milisekund – co oznacza częstotliwość rotacji równą wiele setek razy na sekundę! – do ponad dwudziestu sekund, w przypadku tzw. magnetarów, czyli gwiazd neutronowych o znacząco dużym polu magnetycznym.

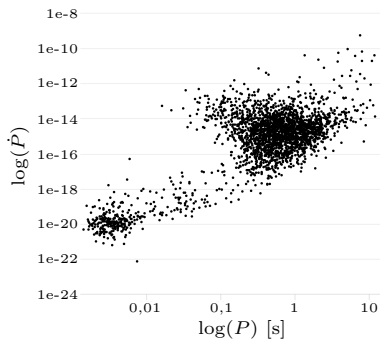


Diagram $P - \dot{P}$ można własnoręcznie stworzyć na stronie Australijskiego Katalogu Pulsarów: <https://www.atnf.csiro.au/research/pulsar/psrcat>.

Z tego, co przez ponad 50 lat od odkrycia pulsarów radiowych (przez Jocelyn Bell w 1967 roku) udało się zrozumieć na temat mechanizmu ich działania, wynika, że w miarę ewolucji i coraz wolniejszej rotacji ich emisja radiowa w pewnym momencie zanika. Dzieje się tak dlatego, że każdy obiekt traci energię kinetyczną rotacji z powodu emisji pulsów promieniowania elektromagnetycznego.

Pulsar charakteryzuje się przede wszystkim okresem pulsacji P , a także zmianą okresu w czasie, $dP/dt \equiv \dot{P}$, czasami nawet \ddot{P} . Pozycja pulsara na *diagramie* $P - \dot{P}$ umożliwia między innymi oszacowanie wielkości jego pola magnetycznego, które w pierwszym przybliżeniu można uważać za dipol. Mierząc P i \dot{P} , czyli obserwując, jak szybko pulsar traci energię rotacyjną, otrzymamy $B \propto \sqrt{PP\dot{P}}$.

Dostatecznie szybka rotacja gwiazdy neutronowej, w połączeniu z jej bardzo silnym polem magnetycznym ($B > 10^8$ Gs $\equiv 10^4$ T w przypadku młodych pulsarów $B \approx 10^8$ T, a w przypadku magnetarów nawet $B > 10^{10}$ T), prowadzi do powstania potężnej różnicy potencjału pola elektrycznego, które wyrwa z powierzchni gwiazdy i przyspiesza cząstki naładowane do bardzo wysokich energii. Te „pierwotne” cząstki emitują promieniowanie γ , którego fotony następnie zamieniają się we „wtórne” pary e^+e^- , a emisja radiowa jest powodowana przez ruch tych cząstek w polu magnetycznym. Kłopot polega na tym, że choć w ogólności panuje zgoda co do tego, że pulsarowa emisja radiowa jest wywoływana jakimś mechanizmem emisji z udziałem relatywistycznych cząstek, to nie ma zgody co do tego, jaki w szczególności jest ów konkretny mechanizm. Okazuje się, że mimo dziesiątek lat i niezliczonych obserwacji magnetosfera pulsarów pozostaje tajemnicą; na pewno nie jest po prostu próżnią z polem magnetycznym, wokół którego poruszają się nieliczne cząstki, tylko raczej skomplikowaną i zapewne zmienną w czasie konfiguracją linii pola magnetycznego i różnorodako naładowanej plazmy.

Kwestia, gdzie dokładnie przebiega *linia śmierci* oddzielająca obszar aktywnych pulsarów od cmentarza, jest wciąż przedmiotem dyskusji i zależy od (nieznanego) mechanizmu odpowiedzialnego za puls; jednym z przybliżeń jest np. $\log \dot{P} \approx 3,3 \log P - 16,5$.

Z diagramu $P - \dot{P}$ widzimy, że w prawej dolnej ćwiartce wykresu pulsarów radiowych nie obserwuje się. Jest to tzw. *cmentarz*, w którym znajdują się gwiazdy neutronowe rotujące zbyt wolno, by dać o sobie znać w postaci pulsów.

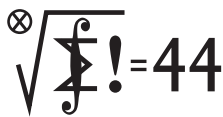
Z wielką radością przyjęto zatem odkrycie pulsara radiowego PSR J0901-4046 o niezwykle długim okresie: aż $P \approx 76$ s i $\dot{P} \approx 2 \cdot 10^{-13}$ s/s. Taki dziwoląg stawia pod znakiem zapytania wiele dotychczasowych teorii tłumaczących mechanizm powstawania pulsów. Obserwacje poszczególnych pulsów ujawniają skomplikowaną ich morfologię, wielość pików pobocznych, a czasem nawet kwazi-periodyczne oscylacje wewnątrz pulsu, co jeszcze bardziej konsternuje teoretyków, którzy, jak to zwykle bywa w takich sytuacjach, przywołują na pomoc hipotezy alternatywne, np. o drganiach skorupy gwiazdy neutronowej będących przyczyną emisji, bądź zastępują gwiazdę neutronową białym karłem (co tłumaczyłoby obserwowany okres, ale niestety jak na razie nie znajduje potwierdzenia w obserwacjach w innych długościach fal).

Discovery of a radio-emitting neutron star with an ultra-long spin period of 76 s, M. Caleb i in., Nat Astron (2022)

Michał BEJGER

Narodowe Centrum Badań Jądrowych, Istituto Nazionale di Fisica Nucleare (INFN), Sezione di Ferrara, Włochy

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 I 2023

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań
zadań 839 ($WT = 1,46$) i 840 ($WT = 1,96$)
z numeru 4/2022

Michał Adamaszek	Kopenhaga	45,18
Kacper Morawski	Warszawa	45,02
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Jerzy Cisło	Wrocław	40,47
Stanisław Bednarek	Łódź	38,92
Paweł Najman	Kraków	38,88
Tomasz Wietecha	Tarnów	37,36
Marcin Kasperski	Warszawa	36,80
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Radosław Kujawa	Wrocław	33,74

Dwukrotny Weteran, pan Michał Adamaszek, nie spoczął – właśnie zalicza siódme przekroczenie linii 44p.; zaś pan Kacper Morawski – to nowa postać w Klubie 44; witamy!

Klub 44 F



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.

Niebo w listopadzie

W przedostatnim miesiącu roku Słońce wyhamowuje swoją szybką wędrówkę na południe. Góruje ono coraz niżej, zbliżając się do grudniowego przesilenia zimowego, ale tempo tych zmian jest mniejsze niż w poprzednich miesiącach. Słońce 21 listopada przekroczy równoleżnik -20° deklinacji, rozpoczynając dwumiesięczny okres najkrótszych dni i najdłuższych nocy w ciągu roku. Do końca miesiąca długość dnia skróci się do nieco ponad 8 godzin.

W listopadzie planety wewnętrzne przebywają blisko Słońca i są niewidoczne. Nadal natomiast dostrzec można wszystkie planety zewnętrzne oraz planetoidę (4) Westa. Ich warunki obserwacyjne w większości przypadków zmieniają się niewiele. Co prawda

wszystkie przesuwają się na zachód i wędrują po nieboskłonie coraz wcześniej, ale ich wcześniejszy zachód kompensowany jest coraz szybciej zapadającym zmierzchem. W rezultacie planety utrzymują stałe położenie względem widnokregu o tej samej porze po zachodzie Słońca.

Pierwsza połowa miesiąca upłynie w silnym blasku Srebrnego Globu. Księżyc przejdzie przez I kwadrę 1 listopada rano i spotka się z **Saturnem** oraz **Westą**. Wieczorem Księżyc zbliży się na nieco ponad 6° do Saturna, Westy zaś należy szukać 11° na wschód od niego. W trakcie miesiąca Saturn oddali się od gwiazdy ι Aqr na odległość prawie 2° . Westa w tym czasie przesunie się o ponad 7° na północny wschód, zbliżając

Zadania z matematyki nr 849, 850

Redaguje Marcin E. KUCZMA

849. Rozwiązać równanie $4^x + 4^y + 1 = z^4$ w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z .

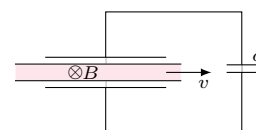
850. W trójkącie ostrokątnym ABC punkt M jest środkiem boku BC . Punkt P leży na odcinku AM . Proste BP i CP przecinają boki AC i AB odpowiednio w punktach D i E . Te same proste przecinają okrąg opisany na trójkącie ABC odpowiednio w punktach X i Y , różnych od B i C . Udowodnić, że okręgi opisane na trójkątach AXD i $A YE$ przecinają się w punkcie różnym od A , leżącym na odcinku AM .

Zadanie 850 zaproponował pan Paweł Kubitz z Krakowa.

Zadania z fizyki nr 746, 747

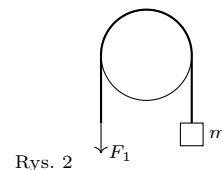
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

746. Między okładkami kondensatora płaskiego odległymi o d , których powierzchnia wynosi S , porusza się z prędkością v płaskorównoległa, przewodząca płyta o grubości $d/2$. Wektor v jest równoległy do okładek kondensatora, rozmiary płyty są dużo większe od rozmiarów okładek. Równoległe do powierzchni płyty i prostopadłe do v działa stałe pole magnetyczne o indukcji B (rys. 1). Znaleźć napięcie na kondensatorze o pojemności c połączonym z okładkami pierwszego kondensatora jak na rysunku.



Rys. 1

747. Przez nieruchomą, poziomą belkę przerzucony jest sznurek (rys. 2). Aby utrzymać ciężar o masie $m = 6$ kg zawieszony na końcu sznurka, trzeba ciągnąć drugi koniec minimalną siłą $F_1 = 40$ N (rys. 2). Jaką minimalną siłą F_2 trzeba ciągnąć sznurek, aby ciężar zaczął się podnosić?



Rys. 2

się na 6° do gwiazdy Skat (δ Aqr). Po drodze minie w odległości 3° mgławicę planetarną Ślimak (NGC 7293). Do końca listopada Saturn zmniejszy blask do $+0,8^m$ i średnicę tarczy do $16''$. Jasność Westy w tym samym czasie spadnie do $+8^m$, stanie się zatem słabsza od odległego o 26° **Neptuna**.

Ostatnia z planet tworzy parę o rozpiętości 6° z jasnym **Jowiszem**. Obie planety górują około godziny 20 na wysokości przekraczającej 30° . W listopadzie Neptun porusza się ruchem wstecznym na tle gwiazdozbioru Wodnika. Jowisz natomiast przebywa w granicach sąsiednich Ryb i przez większość miesiąca także przesuwają się ze wschodu na zachód tuż na północ od charakterystycznego układu gwiazd 5. i 6. wielkości przypominających miniaturowy Mały Wóz, na który składają się gwiazdy 20, 24, 27, 29, 30 i 33 Psc, ale 24 dnia miesiąca zmienia kierunek ruchu na prosty. Neptun przez cały miesiąc utrzyma jasność $+7,9^m$, podczas gdy Jowisz zmniejszy jasność do $-2,6^m$ i średnicę tarczy do $44''$. Księżyc w fazie 86% odwiedzi obie planety 4 listopada.

Cztery dni później w południe naszego czasu Księżyc przejdzie przez pełnię i dwa tygodnie po zaćmieniu Słońca wejdzie w cień naszej planety, co oznacza jego zaćmienie. Tym razem dojdzie do trwającego 85 minut zaćmienia całkowitego. Niestety południe w Europie sprawia, że zjawisko da się dostrzec jedynie w basenie Oceanu Spokojnego oraz z pograżonej w nocy polarnej Arktyki.

Jakieś 20 godzin po zaćmieniu Księżyca planeta **Uran** znajdzie się w opozycji względem Słońca. Oznacza to, że listopad jest okresem jej najlepszej widoczności w tym roku. Planeta przebywa na tle gwiazdozbioru Barana i przecina południk lokalny przed północą na wysokości ponad 55° , świecąc z jasnością około $+5,7^m$.

Pełnia Księżyca i opozycja planety oznacza ich bliskie spotkanie. Do lutego przyszłego roku trwa sezon zakryć Urana przez Księżyc i dojdzie do niego również tym razem. A możliwość obserwacji zjawiska stanie się udziałem mieszkańców północno-wschodniej Azji, Alaski, północno-zachodniej Kanady i Arktyki. Pechowo podczas fazy całkowitej zaćmienia Księżyc i Urana przedzieli dystans kilkudziesięciu minut kątowych, a do zakrycia planety dojdzie już po wyjściu Srebrnego Globu z cienia Ziemi, podczas fazy półcieniowej zjawiska. Do końca sezonu dojdzie jeszcze do czterech takich zakryć. Grudniowe i styczniowe zjawiska da się dostrzec z Polski, o czym napiszę więcej w kolejnych numerach.

Kilka godzin po pełni Merkury przejdzie przez koniunkcję górną ze Słońcem. Tego dnia 5 ciał Układu Słonecznego: Merkury, Słońce, Ziemia, Księżyc i Uran, znajdzie się prawie na jednej linii. Niestety nikomu nie uda się dostrzec tej konfiguracji, bo nawet przebywając w pobliżu Merkurego czy Urana, pozostałe ciała znajdują się bardzo blisko Słońca albo wręcz za nim lub przed nim. Jedyną szansę na zobaczenie tego zjawiska miałyby ktoś przebywający daleko nad lub pod ekliptyką.

Planeta **Mars** szybko zbliża się do grudniowej opozycji względem Słońca. Od początku listopada porusza się ona ruchem wstecznym i pokona w ten sposób prawie 7° na tle gwiazdozbioru Byka, zaczynając miesiąc niewiele ponad 2° od Mgławicy Kraba i kończąc 1° od gwiazdy 103 Tauri. Do końca listopada Czerwona Planeta zwiększy blask do $-1,8^m$ i średnicę tarczy do $17''$. Najlepiej obserwować ją po godzinie 1, gdy góruje na wysokości ponad 60° . Księżyc spotka się z Marsem w nocy z 11 na 12 listopada. Wieczorem Srebrny Glob wszędzie oddalony od niego o 3° .

W kolejnych dniach Księżyc odwiedzi gwiazdozbiór Bliźniąt. I tak 12 listopada w fazie 82% przejdzie mniej niż 2° od Meksutu, gwiazdy 3. wielkości, oznaczanej na mapach nieba grecką literą ϵ . Dobę później w fazie zmniejszonej do 73% przetnie prawie w połowie linię łączącą Polluksa, najjaśniejszą gwiazdę Bliźniąt, z gwiazdą κ Gem.

W nocy z 14 na 15 listopada Księżyc przejdzie 4° od gromady otwartej gwiazd M44 w Raku, 1,5 doby później zaś minie ostatnią kwadrę w Lwie. Srebrny Glob odwiedzi Regulusa 17 listopada, mijając go w odległości także 4° , a potem podąży ku nowiu, który przypada 23 listopada i również tym razem stanie się ozdobą porannego nieba, prezentując tarczę w fazie cienkiego sierpa. Już następnej nocy Księżyc przejdzie 11° od Deneboli, mając tarczę oświetloną w 34%. Regulus i Deneboli to dwie najjaśniejsze gwiazdy Lwa.

Księżyc w fazie 16% 20 listopada przejdzie blisko Porrimy w Pannie. Mieszkańcy południowo-zachodniej Europy i północno-zachodniej Afryki mogą stać się świadkami jej zakrycia przez Księżyc. Dobę później sierp Księżyca w fazie 9% minie Spikę, najjaśniejszą gwiazdę Panny, w odległości 3° . Natomiast jakieś 28 godzin przed nowiem, 22 listopada rano, Księżyc w fazie 4% pokaże się na wysokości 7° , a zatem nadal da się go łatwo dostrzec gołym okiem.

Po nowiu Księżyc przeniesie się na południe od niekorzystnie nachylonej ekliptyki. Stąd do końca miesiąca nie wzniesie się wyżej niż 25° . Warto tutaj odnotować jedynie jego spotkanie z **Saturnem** 29 listopada w fazie 39% i I kwadrę następnego dnia.

W listopadzie promieniują dwa słynne roje meteorów: Tauridy Północne, z maksimum aktywności 12 listopada, i Leonidy z maksimum 5 dni później. Radiant Taurydów Północnych znajduje się tuż pod Plejadami. Nie jest to rój obfity, zdarza się tylko kilka zjawisk na godzinę, ale często są to bardzo jasne bolidy. W przypadku Leonidów, których radiant jest wewnątrz sierpa Lwa, można liczyć na kilkadziesiąt zjawisk na godzinę. Oba roje różnią się też prędkością. Pierwszy rój należy do tych powolnych. Wpada w naszą atmosferę z prędkością 30 km/s. Drugi jest natomiast bardzo szybki, zderza się z Ziemią z prędkością ponad 70 km/s. Niestety w obserwacjach obu rojów przeszkodzi w tym roku Księżyc: najpierw bliski pełni, a potem w ostatniej kwadrze.

Ariel MAJCHER

Kiedy chłód za oknem

Każdemu zdarza się marznąć o tej porze roku. Widziane okiem fizyka zjawisko, którego wtedy doświadczamy, polega na przepływie pewnego rodzaju energii od ciała „ciepłego” – naszego ciała! – do ciała „zimnego”, w tym przypadku naszego otoczenia. Jeżeli odczekamy dostatecznie długo, nie przeciwdziałając marznieniu, to zacznie ziszczać się reguła, która ma postać zasady fizycznej. Jeśli dwa układy oddzielone przegrodą nieprzepuszczalną dla materii, ale pozwalającą na przepływ energii, pozostawić na dostatecznie długi czas, to przepływ energii między tymi układami ustanie – układy będą w *równowadze termodynamicznej*.

Możemy zatem mówić o relacji pozostawiania w równowadze termodynamicznej. Fakt, że jest to relacja zwrotna, symetryczna i przechodnia, pozwala na określenie tzw. klas abstrakcji tej relacji, czyli zbiorów układów fizycznych pozostających w równowadze termodynamicznej. Wyróżnik takiej klasy abstrakcji możemy nazywać *temperaturą*.

Taka definicja temperatury jest jeszcze dalece niepraktyczna. Wiemy bowiem, że kiedy między ciałami o różnych temperaturach przepływa energia (niebędąca zresztą makroskopową energią mechaniczną, dlatego mamy dla niej specjalną nazwę – „ciepło”), to przepływ ten jest ukierunkowany. Dobrze byłoby więc wprowadzić skalę temperatury, która pozwalałaby na określenie tego kierunku, tzn. ciepło „płynęłoby” od ciała o wyższej temperaturze do ciała charakteryzującego się niższą temperaturą. Żądamy zatem, aby temperaturę dało się wyrazić w taki sam sposób jak długość. Kiedy mówimy, że samochód ma długość pięciu metrów, podajemy wielkość liczbową wraz z jednostką. Chcielibyśmy mieć taką możliwość także w przypadku temperatury.

Systematyczne omówienie sposobu na określenie skali temperatury nie zmieściłoby się w tym numerze *Delty*. Możemy jednak podać główne pomysły, które to umożliwiają.

Punktem wyjścia jest tzw. silnik cieplny, czyli urządzenie stykające się z dwoma bardzo dużymi układami fizycznymi, które nie zmieniają swojej temperatury. Silnik taki pobiera pewne ciepło Q_c z jednego układu (zwanego grzejnikiem) i zamienia je na pewną użyteczną pracę mechaniczną W , a pozostałą ilość ciepła Q_z oddaje do drugiego układu (zwanego chłodnicą). Możemy określić *sprawność* takiego silnika jako stosunek pracy użytecznej do pobranego ciepła:

$$(1) \quad \eta = \frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{Q_z}{Q_c}.$$

W drugiej z tych równości skorzystaliśmy z zasady zachowania energii, która przecież nie może ginać w takim silniku. Z drugiej zasady termodynamiki płynnie wniosek, zwany twierdzeniem Carnota, że wszystkie silniki cieplne, w których zachodzą procesy odwracalne, mają tę samą sprawność. Nietrudne, ale nieco żmudne rozważania prowadzą do wniosku, że zależność (1) można zapisać jako:

$$(2) \quad \eta = 1 - \frac{T_z}{T_c},$$

gdzie T_c i T_z są temperaturami, odpowiednio, grzejnika i chłodnicy. Stosunek temperatur został zatem powiązany z wielkościami potencjalnie mierzalnymi – choć w schemacie wyidealizowanym, to jednak możliwym do zrealizowania w praktyce z rozsądnym przybliżeniem.

Aby wprowadzić skalę temperatury, musimy teraz tylko określić jedną temperaturę odniesienia, a wszystkie pozostałe odczytamy z relacji (2). To rozumowanie, zaproponowane w 1848 roku przez Williama Thomsona (lorda Kelvina), zostało w 1954 roku usankcjonowane przez Generalną Konferencję Miar i Wag, która zdecydowała, że temperatura punktu potrójnego wody (stanu, w którym współistnieją fazy stała, ciekła i gazowa) wynosi 273,16 K, gdzie K jest jednostką temperatury noszącą miano kelwina. Trzy lata temu to samo zgromadzenie wywróciło definicję do góry nogami i, choć we wszystkich praktycznych zastosowaniach wartości liczbowe pozostały niezmienione, to teraz punkt odniesienia definiowany jest zupełnie inaczej. To jednak jest temat na zupełnie inną – długą! – opowieść.

Kiedy zatem w jesienny czy zimowy poranek psioczymy z cicha, widząc wskazania termometru, możemy się choć trochę pocieszać, myśląc o tym, że za działaniem tego urządzenia stoi kawałek fascynującej fizyki i pouczającej historii.

Krzysztof TURZYŃSKI

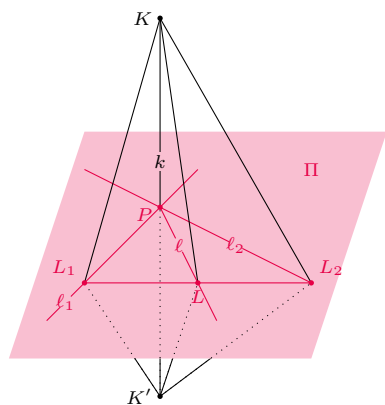


Prostopadłość prostych w przestrzeni

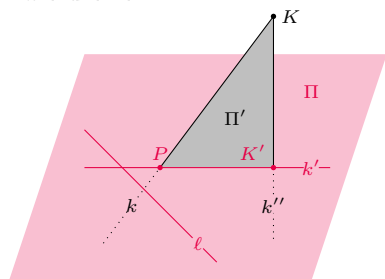
Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Zacniemy skromnie – od kąta między prostymi na płaszczyźnie. Jeśli proste ℓ_1 i ℓ_2 przecinają się, to dzielą płaszczyznę na cztery kąty: dwa o mierze $\varphi \in (0, \pi/2]$ i pozostałe dwa o mierze $\pi - \varphi \in [\pi/2, \pi)$. Na ogół przyjmujemy się $|\sphericalangle(\ell_1, \ell_2)| = \varphi$, chociaż druga możliwość też jest dopuszczalna. Kąt między prostymi równoległymi umownie ma miarę 0. Proste ℓ_1 i ℓ_2 są prostopadłe, gdy $\varphi = \pi - \varphi = \pi/2$.



Twierdzenie 1



Twierdzenie 2

W przestrzeni, jeżeli proste ℓ_1 i ℓ_2 leżą na wspólnej płaszczyźnie (co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy przecinają się lub są równoległe), to kąt między nimi definiujemy jak wyżej. W przeciwnym razie nazywamy je prostymi *skośnymi*. Zauważmy, że na płaszczyźnie przesunięcie równoległe prostych ℓ_1 i ℓ_2 nie zmienia kąta między nimi. To motywuje do wprowadzenia definicji miary kąta pomiędzy prostymi skośnymi – przesuwamy jedną z nich równoległe, tak by przecięła drugą, i postępujemy jak wyżej.

Dalsze rozważania rozpoczniemy od następującego, bardzo mocnego, twierdzenia. Jeśli opisany w nim przypadek ma miejsce, to mówimy, że prosta k i płaszczyzna Π są prostopadłe.

Twierdzenie 1. Jeśli prosta k jest prostopadła do pewnych dwóch nierównoległych prostych ℓ_1, ℓ_2 leżących na płaszczyźnie Π , to prosta k jest prostopadła do każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie.

Dowód. Wybierzmy na płaszczyźnie Π dowolną prostą ℓ i przesuwmy ją równoległe, tak by przechodziła przez punkt P przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_2 . Niech $L \neq P$ leży na prostej ℓ . Punkty L_1 i L_2 na prostych, odpowiednio, ℓ_1 i ℓ_2 dobieramy tak, by punkt L był środkiem odcinka L_1L_2 (można nawet skonstruować te punkty za pomocą cyrkla i linijki, czego nietrudny dowód pozostawiam Czytelnikowi). Wybieramy punkty K i K' leżące na prostej k , tak by punkt P był środkiem odcinka KK' . Punkty K i K' są symetryczne względem prostych ℓ_1 i ℓ_2 , bo $k \perp \ell_1, \ell_2$. Z tego wynikają równości $|KL_1| = |K'L_1|$ i $|KL_2| = |K'L_2|$, a zatem trójkąty L_1L_2K i L_1L_2K' są przystające. Wobec tego $|LK| = |LK'|$, gdyż są to środkowe odpowiednich boków tych trójkątów. Z tego wynika, że trójkąty LPK i LPK' są przystające, więc $|\sphericalangle KPL| = |\sphericalangle K'PL| = \pi/2$. \square

Kącik o takim tytule nie może obyć się bez bodaj najsłynniejszego twierdzenia o prostopadłości w przestrzeni:

Twierdzenie 2 (o trzech prostopadłych). Prosta ℓ leżąca na płaszczyźnie Π jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do rzutu k' prostej k na płaszczyznę Π .

Dowód. Jeśli $k \parallel k'$, to nie ma czego dowodzić. W przeciwnym razie proste k i k' przecinają się w jednym punkcie P na płaszczyźnie Π . Wybierzmy punkt $K \neq P$ na prostej k i niech K' będzie jego rzutem na płaszczyznę Π . Przez Π' oznaczmy płaszczyznę PKK' , a przez k'' – prostą KK' . Z prostopadłości $k'' \perp \Pi$ wynika, że $k'' \perp \ell$, gdyż $\ell \subset \Pi$.

Jeśli $\ell \perp k$ lub $\ell \perp k'$, to prosta ℓ jest prostopadła do dwóch spośród prostych: k, k', k'' . Wobec twierdzenia 1 jest ona również prostopadła do trzeciej spośród tych prostych. \square

Wskazówki do zadań

1. Rzut prostych AD, BD i CD na płaszczyznę ABC zawierają wysokości trójkąta ABC . Należy skorzystać z twierdzenia 2, aby wykazać, że w tym czworoboku każde dwie przeciwległe krawędzie są prostopadłe.

Ciekawostka. Powyższy warunek jest równoważny temu, że wysokość czworoboku przecina się w jednym punkcie. Takie czworoboki nazywamy ortocentrycznymi.

2. Niech T będzie punktem styczności ortocentrum T będzie punktem styczności sfery z płaszczyzną ABD . Mamy stałą $ST \perp ABD$. Należy zauważyć, że $|AT| = |AO| = |BO| = |BT|$, a dalej rachunek kątów pokazuje, że $|\sphericalangle DAT| = \pi/2$.

3. Z prostopadłości $AB \perp CD$ wynika, że istnieje płaszczyzna prostopadła do prostych AB, CD . Leżą na niej punkty K i L .

Zadania

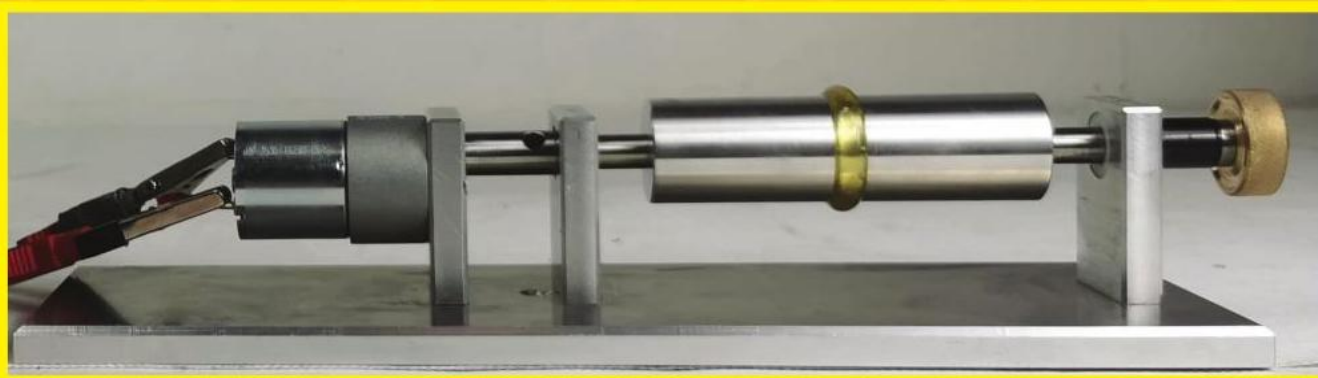
- Ściana ABC czworoboku $ABCD$ ma tę własność, że jej ortocentrum jest spodkiem wysokości tego czworoboku, opuszczonej na tę ścianę. Udowodnić, że wszystkie ściany tego czworoboku mają tę własność.
- Dany jest czworobok $ABCD$, w którym $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BAD|$, a sfera o środku S , dopisana

- do tego czworoboku, jest styczna do ściany ABC w środku O okręgu opisanego na tej ścianie. Udowodnić, że $|\sphericalangle DAS| = \pi/2$.
- Wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B czworoboku $ABCD$ mają wspólny spodek S na krawędzi CD . Punkty K i L są rzutami punktu S na ściany ABC i ABD . Dowiedź, że okrąg opisany na KLS przecina odcinek AB .

Nawijanie miodu (str. 17)

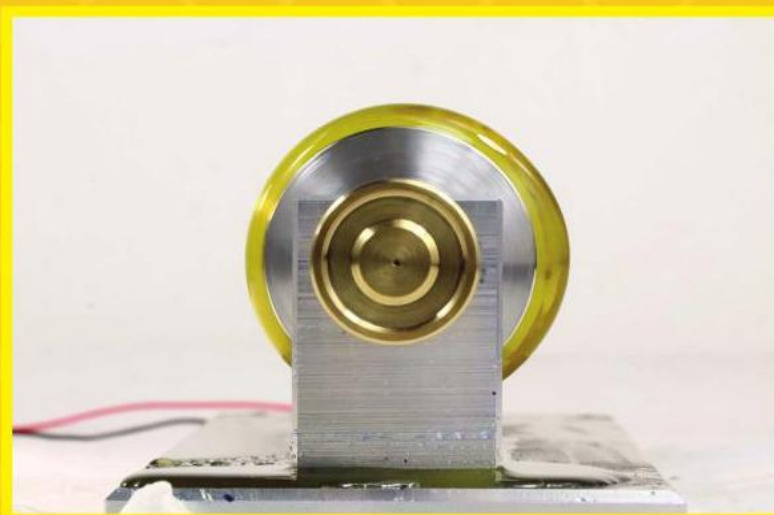
Na stronach 17-18 niniejszego numeru *Delty* autorzy zastanawiają się nad... nakładaniem miodu przy pomocy drewnianego urządzenia nazwanego „miodownikiem”. Jak to możliwe, że miód pozostaje na miodowniku?

Poniżej zamieszczamy zdjęcia urządzenia, które skonstruowano specjalnie do eksperymentu przeprowadzonego w ramach prac drużyny reprezentacji Polski nad zadaniem „Saving Honey”. Zadanie to było częścią Międzynarodowego Turnieju Młodych Fizyków 2022.



Ryc. A.

Układ doświadczalny do obracania prętem z lepką cieczą. Pręt obracany jest silnikiem prądu stałego z przekładnią, co umożliwia łatwą zmianę prędkości kątowej pręta ω . W układzie można wymieniać pręty w celu zmiany promienia pręta oraz używać cieczy o różnej lepkości μ i gęstości ρ .



Ryc. B.

Kontur utworzony przez miód nałożony na układ doświadczalny.