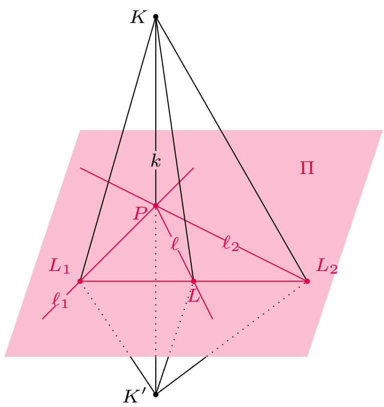
Prostopadłość prostych w przestrzeni

Bartłomiej BZDĘGA Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

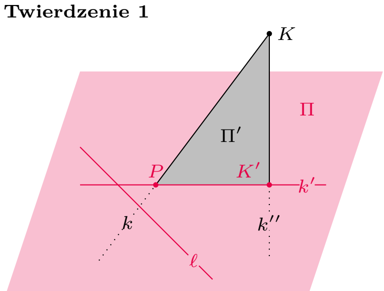
Zaczniemy skromnie – od kąta między prostymi na płaszczyźnie. Jeśli proste ℓ_1 i ℓ_2 przecinają się, to dzielą płaszczyznę na cztery kąty: dwa o mierze $\varphi \in (0, \pi/2]$ i pozostałe dwa o mierze $\pi - \varphi \in [\pi/2, \pi)$. Na ogół przyjmuje się $|\sphericalangle(\ell_1, \ell_2)| = \varphi$, chociaż druga możliwość też jest dopuszczalna. Kąt między prostymi równoległymi umownie ma miarę 0. Proste ℓ_1 i ℓ_2 są prostopadłe, gdy $\varphi = \pi - \varphi = \pi/2$.

W przestrzeni, jeżeli proste ℓ_1 i ℓ_2 leżą na wspólnej płaszczyźnie (co ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy przecinają się lub są równoległe), to kąt między nimi definiujemy jak wyżej. W przeciwnym razie nazywamy je prostymi *skośnymi*. Zauważmy, że na płaszczyźnie przesunięcie równoległe prostych ℓ_1 i ℓ_2 nie zmienia kąta między nimi. To motywuje do wprowadzenia definicji miary kąta pomiędzy prostymi skośnymi – przesuwamy jedną z nich równolegle, tak by przecięła drugą, i postępujemy jak wyżej.

Dalsze rozważania rozpoczniemy od następującego, bardzo mocnego, twierdzenia. Jeśli opisany w nim przypadek ma miejsce, to mówimy, że prosta k i płaszczyzna Π są prostopadłe.



Twierdzenie 1



Twierdzenie 2

Twierdzenie 1. Jeśli prosta k jest prostopadła do pewnych dwóch nierównoległych prostych ℓ_1, ℓ_2 leżących na płaszczyźnie Π, to prosta k jest prostopadła do każdej prostej leżącej na tej płaszczyźnie.

Dowód. Wybierzmy na płaszczyźnie Π dowolną prostą ℓ i przesuńmy ją równolegle, tak by przechodziła przez punkt P przecięcia prostych ℓ_1 i ℓ_2. Niech $L \neq P$ leży na prostej ℓ. Punkty L_1 i L_2 na prostych, odpowiednio, ℓ_1 i ℓ_2 dobieramy tak, by punkt L był środkiem odcinka L_1L_2 (można nawet skonstruować te punkty za pomocą cyrkla i liniału, czego nietrudny dowód pozostawiam Czytelnikowi). Wybieramy punkty K i K' leżące na prostej k, tak by punkt P był środkiem odcinka KK'. Punkty K i K' są symetryczne względem prostych ℓ_1 i ℓ_2, bo $k \perp \ell_1, \ell_2$. Z tego wynikają równości $|KL_1| = |K'L_1|$ i $|KL_2| = |K'L_2|$, a zatem trójkąty L_1L_2K i L_1L_2K' są przystające. Wobec tego $|LK| = |LK'|$, gdyż są to środkowe odpowiednich boków tych trójkątów. Z tego wynika, że trójkąty LPK i LPK' są przystające, więc $|\sphericalangle KPL| = |\sphericalangle K'PL| = \pi/2$. □

Kącik o takim tytule nie może obyć się bez bodaj najsłynniejszego twierdzenia o prostopadłości w przestrzeni:

Twierdzenie 2 (o trzech prostopadłych). Prosta ℓ leżąca na płaszczyźnie Π jest prostopadła do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do rzutu k' prostej k na płaszczyznę Π.

Dowód. Jeśli $k \parallel k'$, to nie ma czego dowodzić. W przeciwnym razie proste k i k' przecinają się w jednym punkcie P na płaszczyźnie Π. Wybierzmy punkt $K \neq P$ na prostej k i niech K' będzie jego rzutem na płaszczyznę Π. Przez Π' oznaczmy płaszczyznę PKK', a przez k'' – prostą KK'. Z prostopadłości $k'' \perp \Pi$ wynika, że $k'' \perp \ell$, gdyż $\ell \subset \Pi$.
Jeśli $\ell \perp k$ lub $\ell \perp k'$, to prosta ℓ jest prostopadła do dwóch spośród prostych: k, k', k''. Wobec twierdzenia 1 jest ona również prostopadła do trzeciej spośród tych prostych. □

Wskazówki do zadań

1. Rzuty prostych AD, BD i CD na płaszczyznę ABC zawierają wysokości trójkąta ABC. Należy skorzystać z twierdzenia 2, aby wykazać, że w tym czworościanie każde dwie przeciwległe krawędzie są prostopadłe.

Ciekawostka. Powyższy warunek jest równoważny temu, że wysokości czworościanu przecinają się w jednym punkcie. Taki czworościan nazywamy *ortocentrycznym*.

2. Niech T będzie punktem styczności sfery z zadania do płaszczyzny ABD. Mamy stąd $ST \perp ABD$. Należy zauważyć, że $|AT| = |AO| = |BO| = |BT|$, a dalej rachunek kątów pokazuje, że $|\sphericalangle DAT| = \pi/2$.

3. Z prostopadłości $AB \perp CD$ wynika, że istnieje płaszczyzna prostopadła do prostej AB, zawierająca prostą CD. Leżą na niej punkty K i L.

Zadania

1. Ściana ABC czworościanu $ABCD$ ma tę własność, że jej ortocentrum jest spodkiem wysokości tego czworościanu, opuszczonej na tę ścianę. Udowodnić, że wszystkie ściany tego czworościanu mają tę własność.
2. Dany jest czworościan $ABCD$, w którym $|\sphericalangle BCA| = |\sphericalangle BAD|$, a sfera o środku S, dopisana do tego czworościanu, jest styczna do ściany ABC w środku O okręgu opisanego na tej ścianie. Udowodnić, że $|\sphericalangle DAS| = \pi/2$.
3. Wysokości poprowadzone z wierzchołków A i B czworościanu $ABCD$ mają wspólny spodek S na krawędzi CD. Punkty K i L są rzutami punktu S na ściany ABC i ABD. Dowieść, że okrąg opisany na KLS przecina odcinek AB.