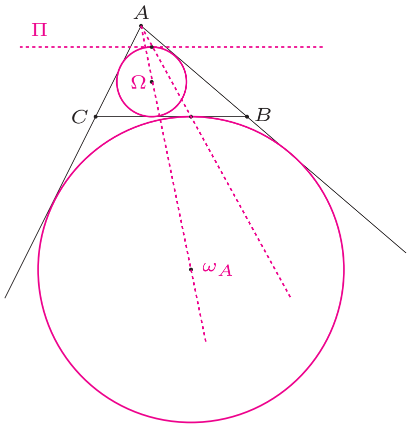
Konstrukcja sfer dopisanych do czworościanu

*Łukasz ŁOPACKI**

*Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Dopisanie sfer do czworościanu okazuje się trudniejsze niż dopisanie okręgów do trójkąta. Żeby zobaczyć dlaczego, spójrzmy najpierw na ten drugi przypadek. Mając dany okrąg wpisany w trójkąt, trzy okręgi dopisane można skonstruować przy użyciu jednokładności. I są to jedyne okręgi styczne jednocześnie do wszystkich trzech prostych wyznaczających boki trójkąta – w pozostałych trzech obszarach (tych przy wierzchołkach) takich okręgów znaleźć się nie da.



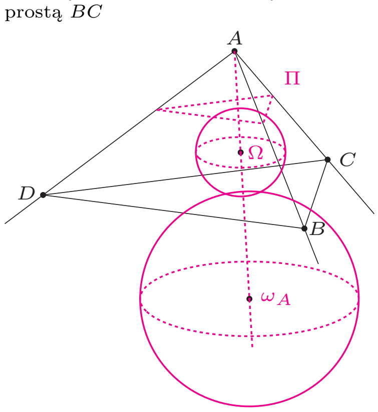
Okrąg wpisany Ω oraz dopisany do boku BC ω_A w trójkącie ABC. Zauważmy, że mamy jednokładność o środku w A, która przeprowadza Ω na ω_A oraz prostą Π styczną do Ω i na równoległą do BC prostą BC

W przypadku czworościanu możliwości jest więcej. Płaszczyzny ścian dzielą przestrzeń na piętnaście części: wnętrze czworościanu, cztery części przy wierzchołkach, cztery przy ścianach i sześć przy krawędziach. Sfery styczne do wszystkich czterech z tych płaszczyzn możemy sklasyfikować na podstawie tego, w której z tych części się znajdują:

– sfera wpisana (której istnienie przyjmiemy za znany fakt),
– sfery dopisane przy ścianach (które skonstruujemy),
– sfery dopisane przy krawędziach (których istnienie zbadamy).

Tak jak dla trójkąta, tak i tutaj obszary przy wierzchołkach nie zawierają sfer dopisanych. Co jednak może zaskakiwać, sfery dopisane przy krawędziach mogą istnieć lub nie. W niniejszym artykule znajdziemy prosty warunek stwierdzający, kiedy istnieją.

Sfery dopisane przy ścianach



Jednokładność przekształcająca Ω na ω_A

Weźmy dowolny czworościan $ABCD$, oznaczmy jego objętość przez V, a pole ścian BCD, ACD, ABD i ABC odpowiednio jako S_A, S_B, S_C i S_D. Sferę wpisaną w czworościan, czyli sferę znajdującą się w jego wnętrzu, będziemy oznaczać przez Ω.

Skonstruujemy sferę dopisaną przy ścianie BCD, dalej nazywaną ω_A. W tym celu oznaczmy płaszczyznę styczną do Ω, równoległą do płaszczyzny BCD i różną od niej jako Π. Rozważmy jednokładność o środku A i skali dodatniej, przekształcającą Π na płaszczyznę BCD. Obraz Ω w tej jednokładności będzie sferą dopisaną przy BCD.

Istnienie opisanej wyżej jednokładności uzasadnimy teraz w sposób, który okaże się przydatny w dalszej części artykułu. Taka jednokładność istnieje wtedy i tylko wtedy, kiedy Π i płaszczyzna BCD znajdują się po tej samej stronie płaszczyzny równoległej do nich obu, zawierającej punkt A. A ponieważ punkt A i Π znajdują się po tej samej stronie płaszczyzny BCD, więc jest to równoważne warunkowi:

$$d(A, BCD) > d(\Pi, BCD), \quad \text{gdzie } d(X, Y) \text{ oznacza odległość między } X \text{ i } Y.$$

Lewa strona nierówności to wysokość czworościanu $ABCD$ wychodząca z A, a prawa to średnica sfery Ω. Ta obserwacja pozwala wyrazić obie strony nierówności poprzez objętość czworościanu i pola jego ścian (zob. margines):

Wzory na objętość czworościanu:
$V = \frac{1}{3}h \cdot S_A$,
$V = \frac{1}{3}r \cdot (S_A + S_B + S_C + S_D)$,
gdzie h to wysokość z A, a r to promień sfery wpisanej. Drugi wzór otrzymuje się z pierwszego, dzieląc czworościan na cztery mniejsze czworościany o wysokości r.

$$\frac{3V}{S_A} > \frac{6V}{S_A + S_B + S_C + S_D},$$

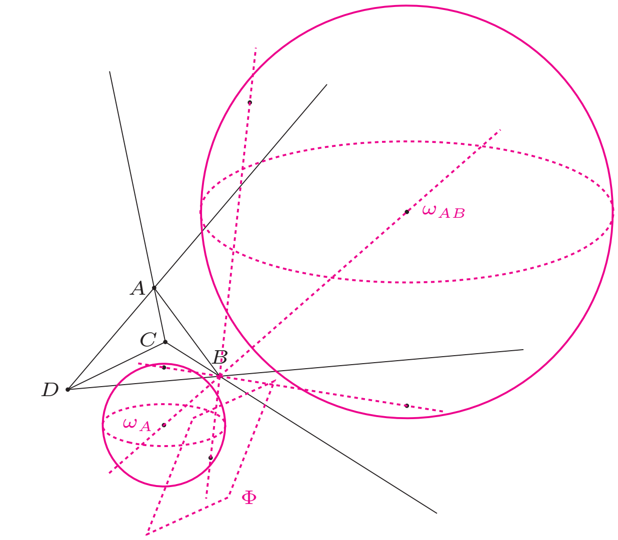
czyli po prostych przekształceniach

$$S_B + S_C + S_D > S_A.$$

O prawdziwości powyższej nierówności można się przekonać, porównując pola ścian z polami ich rzutów na płaszczyznę BCD. Sfera dopisana przy ścianie zawsze więc istnieje. Możemy też obliczyć skalę k szukanej jednokładności:

$$k = \frac{d(A, BCD)}{d(A, \Pi)} = \frac{\dfrac{3V}{S_A}}{\dfrac{3V}{S_A} - \dfrac{6V}{S_A + S_B + S_C + S_D}} = \frac{S_A + S_B + S_C + S_D}{S_B + S_C + S_D - S_A},$$

skąd odczytujemy, że długość promienia ω_A wynosi $\dfrac{3V}{S_B + S_C + S_D - S_A}$.



Jednokładność przekształcająca ω_A na ω_{AB}

Sfery dopisane przy krawędziach

Przejdziemy teraz do konstrukcji sfery dopisanej przy krawędzi. Bardziej konkretnie, będziemy chcieli skonstruować sferę – oznaczaną odtąd przez ω_{AB} – znajdującą się w tej części przestrzeni, która leży przy krawędzi AB.

Oznaczmy płaszczyznę styczną do ω_A równoległą do płaszczyzny ACD i rożną od niej jako Φ. Podobnie do poprzedniego przypadku, możemy stwierdzić, że istnienie ω_{AB} jest równoważne istnieniu jednokładności o środku w B, przekształcającej Φ na płaszczyznę ACD, tym razem jednak o skali ujemnej. Istotnie, jeśli szukana sfera ω_{AB} istnieje, to ω_{AB} i ω_A znajdują się w kątach trójściennych wierzchołkowych przy B, więc jednokładność o pewnej ujemnej skali przeprowadza jedną na drugą.

Taka jednokładność istnieje wtedy i tylko wtedy, kiedy Φ i płaszczyzna ACD znajdują się po przeciwnych stronach płaszczyzny równoległej do nich obu, zawierającej punkt B. A ponieważ punkt B i Φ znajdują się po tej samej stronie płaszczyzny ACD, więc istnienie szukanej jednokładności jest równoważne warunkowi:

$$d(B, ACD) < d(\Phi, ACD).$$

Tym razem lewa strona to wysokość $ABCD$ wychodząca z B, a prawa to średnica ω_A, więc – tak jak poprzednio – obie strony nierówności możemy wyrazić poprzez objętość czworościanu i pola jego ścian. Opierając się na wyznaczonym wcześniej promieniu ω_A, otrzymujemy więc równoważną formę nierówności:

$$\frac{3V}{S_B} < \frac{6V}{S_B + S_C + S_D - S_A}, \quad \text{czyli} \quad S_C + S_D < S_A + S_B.$$

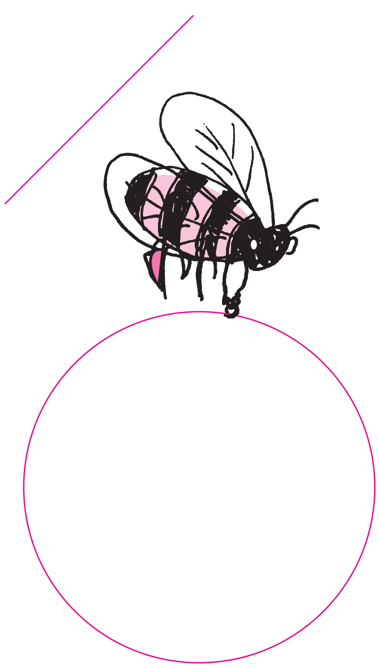
Jest to warunek konieczny i wystarczający dla istnienia ω_{AB}. Analogicznie do konstrukcji ω_A, wyliczamy skalę k otrzymanej jednokładności oraz promień r_{AB} sfery ω_{AB}:

$$k = \frac{S_B + S_C + S_D - S_A}{S_C + S_D - S_A - S_B}, \quad r_{AB} = \frac{3V}{S_A + S_B - S_C - S_D}.$$

Co się dzieje, gdy sfery dopisanej nie ma?

Przekonaliśmy się, że w przypadku $S_C + S_D > S_A + S_B$ sfera dopisana przy krawędzi AB nie istnieje. Jednak wykorzystywana w jej konstrukcji jednokładność J_B^α o środku w B i skali $\alpha = \dfrac{S_B + S_C + S_D - S_A}{S_C + S_D - S_A - S_B}$ nadal jest dobrze określona. Czym więc jest obraz $J_B^\alpha(\omega_A)$ sfery ω_A?

Możemy w tym przypadku zauważyć, że jednokładność ta ma skalę dodatnią oraz że Φ i płaszczyzna ACD leżą po tej samej stronie płaszczyzny równoległej do nich obu, zawierającej punkt B. Ponadto skala α jest tak dobrana, że $J_B^\alpha(\Phi) = ACD$; oznacza to, że sfera $J_B^\alpha(\omega_A)$ jest styczna do wszystkich czterech płaszczyzn zawierających ściany czworościanu. Znajduje się ponadto w części przestrzeni przy krawędzi CD, więc jest to nic innego, jak sfera ω_{CD} dopisana przy krawędzi CD.



Na zakończenie możemy więc sformułować ogólny wniosek:

$$J_B^\alpha(\omega_A) = \begin{cases} \omega_{AB} & \text{jeśli } S_A + S_B > S_C + S_D, \\ \omega_{CD} & \text{jeśli } S_A + S_B < S_C + S_D. \end{cases}$$

W pominiętym wyżej przypadku $S_A + S_B = S_C + S_D$ skala jednokładności α nie jest dobrze określona; jak już zauważyliśmy, żadna ze sfer ω_{AB}, ω_{CD} wówczas nie istnieje. Analogicznie możemy skonstruować pozostałe sfery dopisane i przekonać się, że sfery dopisane przy przeciwległych krawędziach wzajemnie się wykluczają.