* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Kocha, nie kocha...

*Łukasz RAJKOWSKI**

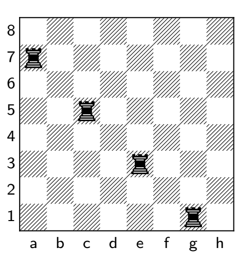
Miłosne wyznania to niełatwa sztuka, obarczona dużym emocjonalnym ryzykiem. Wspaniale, jeśli uczucie okazuje się odwzajemnione, jednak na szali stawiamy naszą dotychczasową dobrą relację z potencjalną drugą połówką. Jeśli bowiem dla tej drugiej osoby *to była tylko przyjaźń*, to kontynuacja znajomości może być niekomfortowa dla obu stron – zarówno wzdychającej (z oczywistych powodów), jak i wzdychanej (niezręcznie jest wiedzieć o swoim kumplu/kumpeli, że się w nas podkochuje). Czy można tak zdradzić swoje uczucia, aby w razie miłosnego zawodu wycofać się rakiem ze swojej deklaracji i dalej pielęgnować *tylko przyjaźń* (jak również nadzieję na to, że kiedyś ten stan rzeczy ulegnie zmianie)? Można, i o tym będzie niniejszy artykuł.

Na początek przedstawmy kilka niemądrych rozwiązań, tak aby należycie docenić problem. Na potrzeby naszych rozważań wprowadźmy na scenę dwoje bohaterów, Piotrusia i Wendy, przy czym Piotruś darzy Wendy sympatią, a Wendy darzy Piotrusia czymś więcej. Gdyby któregoś dnia Wendy zakrzyknęła: *Piotrusiu, kocham Cię!*, a Piotruś odrzekł rycersko: *Yyy... no tego... wiesz, jakby to powiedzieć...*, to samo stwierdzenie Wendy: *Spokojnie Piotrusiu, ja tylko chciałam zobaczyć Twoją minę, możemy bawić się dalej*, mogłoby nie przekonać Piotrusia. Chcąc uniknąć wypowiadania uczuć na głos, Wendy mogłaby zaproponować Piotrusiowi zabawę polegającą na wrzuceniu do pudełka kartki z odpowiedzią na pytanie, czy kocha się tę drugą osobę. Nie polepsza to jednak specjalnie sytuacji – o ile Wendy mogłaby się wypierać przed koleżankami, twierdząc, że to Piotruś wrzucił kartkę z odpowiedzią Tak i najwyraźniej to on jest w niej zakochany, to Piotruś wiedziałby doskonale, że jest inaczej. Wspomnijmy jeszcze o rozwiązaniu najgorszym: poprosić koleżankę, np. Dzwoneczka, by służyła jako powiernik miłosnych sekretów. Dzwoneczek w tajemnicy pyta Wendy o jej uczucia względem Piotrusia, potem pyta Piotrusia o jego uczucia wobec Wendy, a na końcu przekazuje obojgu informację (Tak/Nie), czy obie strony są zainteresowane tzw. *chodzeniem ze sobą*. W ten sposób w naszej sytuacji Wendy dowiedziałaby się, że Piotruś nie wykazuje zainteresowania, jednak Piotruś nie dowiedziałby się niczego o Wendy. Niby wszystko się zgadza, jednak pozostaje słaby punkt: Dzwoneczek. Czy aby na pewno dochowa sekretu? A może sama podkochuje się w Piotrusiu, a jeśli ten poinformuje go o miłości do Wendy, to wiedziony zazdrością Dzwoneczek wbrew prawdzie oznajmi obojgu negatywną odpowiedź, na zawsze grzebiąc szanse na szczęśliwe zakończenie? Ryzyko jest zbyt duże, i aby go uniknąć, możemy wykorzystać... karty

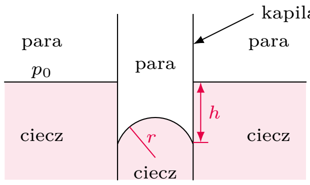
Potrzebujemy tylko 5 kart, ale niestety nie byle jakich – muszą być dwóch kolorów (powiedzmy, kiery i piki), przy czym w ramach jednego koloru muszą być nierozróżnialne. Ponieważ potrzebujemy trzech kart kier (♥) oraz dwóch kart pik (♠), ze względu na postulowaną nierozróżnialność musimy zubożyć aż trzy identyczne talie kart – cóż, miłość wymaga poświęceń. Kiedy już zdobyliśmy trzy identyczne kiery oraz dwa identyczne piki, Wendy rozdaje po dwie różnokolorowe karty sobie oraz Piotrusiowi, zaś pozostałą kartę (siłą rzeczy kiera) odkłada gdzieś z boku. Następnie...

1. Wendy kładzie na środku stołu swoje karty (koszulką do góry), jedna nad drugą, przy czym jeśli kocha Piotrusia, powinna umieścić **kiera na wierzchu**.
2. Na ten stosik dokładana jest odłożona wcześniej na bok „piąta karta”, po czym...
3. ...swoje karty dokłada Piotruś – jeśli kocha, to (w odróżnieniu od Wendy) powinien umieścić **pika na wierzchu**.
4. Na tak uzyskanym stosie 5 kart oboje na przemian wykonują operację „przełożenia” – dzielą stos w losowo wybranym miejscu i zamieniają miejscami część górną i dolną. Robią tak do czasu, aż każde z nich uzna, że to drugie musiało już stracić rachubę i na pewno nie jest w stanie stwierdzić, która karta stosu była na jego wierzchu na początku.

Rozwiązanie zadania M 1726.
Wieża na czarnym kwadracie atakuje dokładnie 8 białych pól. Wieża na białym polu atakuje dokładnie 7 białych pól. Ponieważ łącznie mamy 32 białe pola do zaatakowania, potrzebujemy co najmniej czterech wież. Jest to również wystarczająca liczba, co można wywnioskować z poniższej ilustracji.



Rozwiązanie zadania F 1060.
Skorzystamy ze wskazówki – patrz rysunek – i przeanalizujemy warunki równowagi ciśnień w sytuacji, gdyby w układzie znajdowała się tylko analizowana ciecz i jej para nasycona.



W nieściśliwej cieczy o gęstości ρ_l na głębokości h panuje ciśnienie $p(h) = p_0 + \rho_l gh$, przy czym p_0 oznacza ciśnienie pary nasyconej nad płaską powierzchnią cieczy. Gdy układ jest w równowadze, ciśnienie to jest równe sumie ciśnienia $p_v(h)$ pary nasyconej nad meniskiem i nadwyżki ciśnienia związanego ze sferycznym meniskiem o promieniu r:

$$p_0 + \rho_l gh = p_v(h) + \frac{2\gamma}{r}.$$

Wartość $p_v(h)$ różni się od p_0 o ciśnienie słupa pary nasyconej o wysokości h. Para jest jednak ściśliwym gazem – przyjmiemy, że z dobrym przybliżeniem spełnia równanie stanu gazu doskonałego. Gęstość pary, ρ_v, zależy więc od ciśnienia:

$$\rho_v = \frac{\mu p_v}{RT}.$$

Ciśnienie pary zmienia się z głębokością h pod płaską powierzchnią:

$$\frac{dp_v}{dh} = g\rho_v = g\frac{\mu p_v}{RT}.$$

Równanie to spełnia funkcja:

$$p_v(h) = p_0 \exp\left(\frac{\mu gh}{RT}\right).$$

Mamy też:

$$\rho_l gh = p_v(h) - p_0 + \frac{2\gamma}{r}.$$

Po prawej stronie ostatniego równania $p_v(h) - p_0 << 2\gamma/r$, czyli

$$h \approx \frac{2\gamma}{\rho_l gr}$$

Ostatecznie (przypominamy, że $p_v(h)$ oznaczało ciśnienie pary nasyconej tuż nad meniskiem wypukłym) ciśnienie p_v pary nasyconej nad zakrzywioną powierzchnią cieczy wynosi:

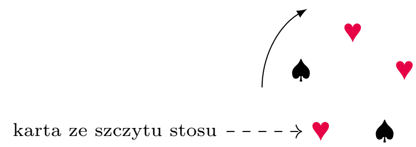
$$p_v = p_0 \exp\left(\frac{2\mu\gamma}{\rho_l rRT}\right).$$

Otrzymany związek, tak zwane równanie Kelvina (w formie Ostwalda i Freundlicha), jest przydatny np. przy analizie tworzenia kropel deszczu.

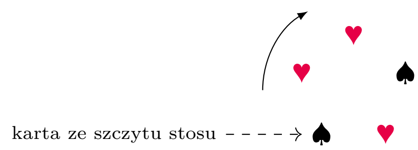
Przedstawione w rozwiązaniu rozumowanie pochodzi z pracy K. P. Galvina, *Chemical Engineering Science* **60**, 4659 (2005).

5. Na koniec karty są układane w kółko i odkrywane. Jeśli obok siebie wystąpią 3 kiery (♥♥♥), oznaczać to będzie wzajemną miłość, w przeciwnym wypadku co najmniej jedno z nich nie wykazuje uczuciowego zainteresowania tym drugim.

Zobaczmy, jak będzie przebiegać ta procedura w naszej sytuacji. Ponieważ Wendy ciepło myśli o Piotrusiu, układa na środku stołu koszulką do góry najpierw pika, a potem kiera (punkt 1.). Dokładana jest na to „piąta karta", czyli kier (punkt 2.), po czym pora na ruch Piotrusia, który – niezainteresowany Wendy – również kładzie najpierw pika, a na wierzchu kiera (punkt 3.; podkreślmy, że taka kolejność ma inną interpretację u Wendy, a inną u Piotrusia). Gdybyśmy już w tym momencie przeszli do punktu 5. i ułożyli karty ze stosu „w kółku", zgodnie z ruchem wskazówek zegara, moglibyśmy po odkryciu kart ujrzeć coś takiego:



Jak widać, brakuje tu trzech kierów ułożonych obok siebie, więc zgodnie z naszym algorytmem otrzymujemy negatywną odpowiedź na pytanie o wzajemną miłość naszych bohaterów (co jest zgodne z prawdą). Jednak bez wykonania na talii dodatkowych czynności Piotruś uzyskuje informację, że Wendy położyła kiera na pika, czyli darzy go (nieodwzajemnionym) uczuciem – jest to zbędna niezręczność, której pragnęliśmy uniknąć. Gdyby nasze karty były umieszczone w kółku na okrągłej, obrotowej tacce do sera, to moglibyśmy zakręcić tacką niczym ruletką, tak aby nie można było stwierdzić, która karta pochodziła ze szczytu stosu. Najpewniej jednak nie mamy do dyspozycji wspomnianej tacki, lecz jej działanie symulowane jest przez punkt 4. naszego protokołu. Każda operacja „przełożenia" odpowiada pewnemu obrotowi kółka z kartami. Gdy tych przełożeń jest wystarczająco wiele, możemy przyjąć, że nikt nie jest w stanie rozstrzygnąć, która karta była na szczycie stosu na samym początku. Powiedzmy zatem, że po wykonaniu 5. kroku protokołu oczom bohaterów ukazał się taki obrazek:



Rzecz jasna, niezmiennie brakuje nam trzech kierów ułożonych pod rząd – siłą rzeczy Wendy dowiaduje się o braku wzajemności swoich uczuć. Zastanówmy się jednak, czego Piotruś dowiedział się o Wendy. Nie wie on, który z wyłożonych pików należał do niego – mógł to być pik ze szczytu stosu lub nie. Pierwszy przypadek implikowałby, że Wendy położyła ♥ na ♠ (czyli kocha), a drugi – że ♠ na ♥ (czyli nie kocha). Nie jest on zatem w stanie stwierdzić, co Wendy myśli o ich relacji†. Nietrudno przekonać się, że dla dowolnej innej konfiguracji kocha/nie kocha procedura zachowuje się zgodnie z oczekiwaniami: przy wzajemnej miłości bohaterów zaobserwujemy układ ♥♥♥, natomiast gdyby żadne z nich nie kochało tego drugiego, otrzymalibyśmy rysunek taki jak wyżej (z dokładnością do obrotu), na podstawie którego żadne z nich nie będzie w stanie powiedzieć nic o uczuciach drugiej strony.

Przedstawiony przykład to chyba najprostszy przypadek problemu, który w literaturze kryptograficznej nosi nazwę *multiparty computation* – należy tak obliczyć wartość funkcji zależnej od wkładu każdego z (potencjalnie więcej niż dwojga) zainteresowanych, by nikt nie dowiedział się o wkładzie pozostałych więcej niż to, co można wywnioskować z uzyskanego wyniku. Jednym z ogólnych rozwiązań tego problemu jest tzw. *protokół Yao*, który opisywaliśmy w Δ^{19}_{03}. Więcej zaś o przedstawionym „karcianym" podejściu do tematu można próbować wyszukać samodzielnie pod hasłem *five cards trick in cryptography*.

†Tutaj warto napisać nawet więcej: z punktu widzenia Piotrusia, przy założeniu, że Wendy go kocha, prawdopodobieństwo uzyskania przedstawionego układu kart jest takie samo, jak przy założeniu, że Wendy go nie kocha (w obu przypadkach równe 20%). Uzyskany układ kart nie przekazuje zatem Piotrusiowi żadnej informacji o uczuciach Wendy, tzn. nie zmienia jego oceny prawdopodobieństwa miłości Wendy.