

# deleto

ISSN 663-10-34 p. 3,141592...

NR 10 (581) 2022  
CENA 6 ZŁ + VAT 8%  
PL ISSN 0137-3005 | NR-IND 33-550 X  
MIESIĘCZNIK

[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

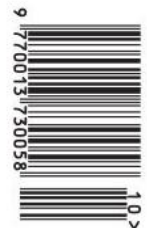
MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

**Narodziny  
Ziemi**  
str. 10

*flappy*






*Birthday*

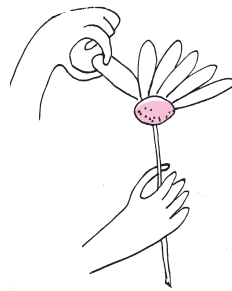


Nakład: 3500 egz.

## SPIS TREŚCI NUMERU 10 (581)

Poznajmy topologię przez dotyk <i>Michał Miśkiewicz</i>	str. 1
O książce <i>Matematyka z różnych stron widziana</i> <i>Paweł Strzelecki</i>	str. 3
Czy inni mają więcej rodzeństwa? <i>Wojciech Czerwiński</i>	str. 6
 Zadania	str. 7
Flatlandia <i>Grzegorz Łukaszewicz</i>	str. 8
Narodziny Ziemi <i>Lech Falandysz</i>	str. 10
 O pochodzeniu... <i>Magdalena Fikus</i>	str. 12
Środek ciężkości czy masy? <i>Wojciech Kopczyński</i>	str. 13
Тихіше ідеш, далі будеш <i>Michał Bejger</i>	str. 16
Klasy permutacji II: twierdzenie Marcusa–Tardosa <i>Wojciech Przybyszewski</i>	str. 17
Niebo w październiku	str. 19
Prosto z nieba: Idąc przez galaktyczną dolinę śmierci	str. 21
Klub 44	str. 22
Aktualności Fizyka kontra zmarszczki	str. 24
 Wzory Viète'a <i>Bartłomiej Bzdęga</i>	str. 25

W następnym numerze:



**Kocha,  
nie kocha...**

**Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka** jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wymolek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Lukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Deltty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# Poznajmy topologię przez dotyk

Michał MIŚKIEWICZ\*

\* Wydział Matematyki, Informatyki  
i Mechaniki UW;  
Instytut Matematyczny PAN

## Aksjomaty topologii:

- (T1) Zbiory  $\emptyset$  i  $X$  są otwarte.
- (T2) Suma dowolnej rodziny zbiorów otwartych jest otwarta.
- (T3) Przecięcie dwóch zbiorów otwartych jest otwarte.

## Literatura:

Kazimierz Kuratowski, *Sur l'opération  $\bar{A}$  de l'Analyse Situs* (1922)  
bibliotekanauki.pl/articles/1385860

A.W. Arhangielskij, W.W. Fedorczyk,  
*General Topology I. Basic Concepts and  
Constructions* (1990)  
(zwłaszcza rozdziały 1.3, 1.4, 3.1)

David R. MacIver, *Different ways of  
defining topologies* (2013)  
drmaciver.com/2013/02/  
different-ways-of-defining-topologies/

Trudno jest *dotknąć* topologii. Łatwo jest ją za to zdefiniować: standardowo topologię na zbiorze  $X$  opisuje się jako rodzinę podzbiorów  $X$  (zwanymi otwartymi) spełniającą aksjomaty podane na marginesie. Definicja funkcji ciągłej  $f: X \rightarrow Y$  również nie sprawia problemu: jest to funkcja, dla której przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego  $U \subseteq Y$  jest zbiorem otwartym  $f^{-1}(U) \subseteq X$ .

Sporą trudność może jednak sprawić zrozumienie, w jaki sposób powyższa definicja odpowiada intuicji „rysowania wykresu funkcji bez odrywania ołówka”. Związek pojęcia zbioru otwartego ze strukturą, którą staramy się w ten sposób opisać, nie jest oczywisty. Bez wątplenia odpowiedni trening matematyczny pozwala wyrobić odpowiednie intuicje oraz docenić piękno i głębię topologii; postaram się jednak przekonać Czytelnika, że podstawy topologii można zbliżyć do intuicji. Posłuży do tego idea pochodząca od Kazimierza Kuratowskiego, odpowiednio przeformułowana w celach dydaktycznych przez późniejszych autorów; po dalsze szczegóły warto sięgnąć do pozycji podanych na marginesie.

## Relacja dotykania

Zacznijmy od opisu topologii liczb rzeczywistych. Powiemy, że liczba  $x$  *dotyka* zbioru  $A \subseteq \mathbb{R}$ , jeśli dla dowolnego naturalnego  $n$  istnieje liczba  $y \in A$  spełniająca  $|x - y| < \frac{1}{n}$ . W ten sposób odcinka otwartego  $(0, 1)$  dotykają na przykład liczby  $\frac{1}{2}$  oraz  $1$ , ale już nie  $\frac{3}{2}$ . Czytelnik może sprawdzić, że wprowadzona tu relacja spełnia warunki podane niżej. Okaze się później, że do mówienia o ciągłości nie trzeba nic więcej.

**Definicja.** Przestrzenią topologiczną nazwiemy zbiór  $X$  wraz z relacją *dotykania* spełniającą następujące aksjomaty:

- (D1) Żaden punkt nie dotyka zbioru pustego  $\emptyset$ .
- (D2) Jeśli  $x \in A$ , to  $x$  dotyka  $A$ .
- (D3) Punkt  $x$  dotyka  $A \cup B$  wtedy i tylko wtedy, gdy dotyka któregoś ze zbiorów  $A$  lub  $B$ .
- (D4) Jeśli punkt  $x$  dotyka  $A$ , a każdy punkt  $A$  dotyka  $B$ , to  $x$  dotyka też  $B$ .

Intuicyjnie można myśleć, że punkt  $x$  dotyka zbioru  $A$ , jeśli zbiór ten posiada punkty dowolnie blisko  $x$  – co zresztą odpowiada relacji wprowadzonej na  $\mathbb{R}$ . Powinno to wystarczyć, by nieco uwiarygodnić powyższe warunki.

Jeśli dane są dwie przestrzenie topologiczne  $X, Y$  (czyli dwa zbiory, każdy ze swoją relacją dotykania), to możemy już mówić o ciągłości funkcji  $f: X \rightarrow Y$ . Intuicyjnie rzecz biorąc, funkcja ciągła to taka, która nie rozrywa obiektów stykających się, co zresztą łatwo uchwycić w definicji:

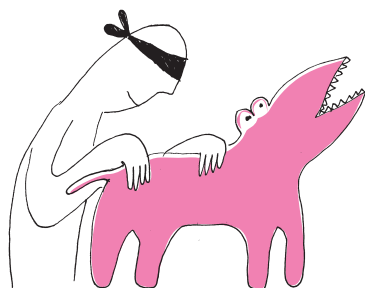
**Ciągłość.** Funkcja ciągła  $f: X \rightarrow Y$  to funkcja spełniająca następujący warunek: jeśli punkt  $x \in X$  dotyka zbioru  $A \subseteq X$ , to obraz punktu  $f(x)$  dotyka obrazu zbioru  $f(A)$ .

## Subiektywny przegląd pojęć topologicznych

Wszystkie pojęcia podane niżej posiadają prostą charakteryzację (choć niekoniecznie *konstrukcję*) opartą na definicji ciągłości. Nic jednak nie szkodzi, by podać ich definicje w terminach relacji dotykania.

**Spójność.** Przestrzeń topologiczną  $X$  nazwiemy niespójną, jeśli można ją przedstawić jako sumę dwóch niepustych zbiorów  $X = A \cup B$  w taki sposób, że żaden punkt  $A$  nie dotyka  $B$  i vice versa. W przeciwnym przypadku mówimy, że  $X$  jest spójna.

**Podprzestrzeń.** Jeśli  $X'$  jest podzbiorem przestrzeni topologicznej  $X$ , to relację dotykania na  $X$  można ograniczyć do punktów  $X'$  i podzbiorów  $X'$ , w ten sposób nadając  $X'$  charakter (pod)przestrzeni topologicznej.



**Iloraz.** Załóżmy, że na przestrzeni topologicznej  $X$  dana jest relacja równoważności  $\sim$ , którą będziemy interpretować jako przepis na sklejanie: punkty  $x, y \in X$  sklejamy, jeśli  $x \sim y$ . Definiujemy wtedy zbiór  $X/\sim$ , którego elementami są klasy abstrakcji  $[x]$  punktów  $X$  (zob. kolorowy tekst poniżej), wraz z funkcją  $q: X \rightarrow X/\sim$  zadaną wzorem  $q(x) = [x]$ . Przyjmijmy, że jeśli  $x$  dotyka  $A$ , to  $q(x)$  dotyka  $q(A)$ ; przyjmijmy też, że nie zachodzą dotknięcia inne niż wynikające z tej zasady. Wówczas  $X/\sim$  jest przestrzenią topologiczną (tzw. *przestrzenią ilorazową*), a  $q$  jest funkcją ciągłą (tzw. *przekształceniem ilorazowym*).

Klasa abstrakcji  $[x]$  to zbiór tych wszystkich  $y \in X$ , dla których  $x \sim y$ . Wprost z definicji wynika, że klasy abstrakcji dwóch elementów są albo tożsame, albo rozłączne. Dla przykładu, jeśli w zbiorze  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  rozpatrzmy relację  $m \sim n \iff 3 \mid m - n$ , to są trzy klasy abstrakcji:  $\{0, 3\}$ ,  $\{1, 4\}$ ,  $\{2, 5\}$ .

Podany tu opis dotkania w  $X/\sim$  oddaje pewną intuicję – po sklejeniu punkt  $x$  dotyka tego, co wcześniej, oraz tego, czego dotykały punkty z nim sklejone – ale może się wydawać mało bezpośredni. Można jednak ten sam opis sformułować wprost:  $\tilde{x}$  dotyka  $\tilde{A}$ , jeśli któryś punkt zbioru  $q^{-1}(\tilde{x})$  dotyka  $q^{-1}(\tilde{A})$ .

## Przykłady

Czytelnik *Delty* spotkał się zapewne z topologią w kontekście wycinania i sklejania, jak w artykule *Powierzchnie: zajęcia praktyczno-techniczne z  $\Delta_{08}^{10}$* . Jeśli tak, to może odetchnąć z ulgą, że do ścisłego opisu takich rozumowań wystarczą podane przed chwilą proste konstrukcje. Tutaj przedstawię kilka najprostszych przykładów konstrukcji przestrzeni topologicznych, by było wiadomo, jak to działa.

**Topologia dyskretna.** Na dowolnym zbiorze  $D$  możemy określić relację dotkania przez przyjęcie, że każdy punkt dotyka tylko i wyłącznie tych zbiorów, do których należy. Powstała przestrzeń topologiczną zwykle się nazywa przestrzenią dyskretną. Łatwo sprawdzić, że każda funkcja  $f: D \rightarrow X$  (w dowolną przestrzeń topologiczną  $X$ ) jest wówczas ciągła. Natomiast jeśli  $X$  jest spójna, to funkcja  $f: X \rightarrow D$  jest ciągła wtedy i tylko wtedy, gdy jest stała.

Podaną tu charakteryzację funkcji ciągłych w przestrzeni dyskretną można przyjąć za alternatywną definicję spójności (zob. zadanie 1).

**Płaszczyzna.** Podobnie jak dla prostej rzeczywistej definiujemy, że punkt  $(p_1, p_2)$  dotyka zbioru  $A \subseteq \mathbb{R}^2$ , jeśli dla dowolnego naturalnego  $n$  istnieje punkt  $(q_1, q_2) \in A$  spełniający  $\sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2} < \frac{1}{n}$ . Warto się przekonać, że użycie innego sensownego wzoru na odległość nic nie zmieni, otrzymana przestrzeń topologiczna będzie taka sama (zadanie 2).

Definicję podobną do tej dla  $\mathbb{R}$  i  $\mathbb{R}^2$  możemy przyjąć zawsze, gdy na badanym zbiorze dysponujemy pojęciem odległości. Mówimy wtedy o przestrzeni metrycznej lub metryzowalnej – zależnie od tego, jak bardzo chcemy zaznaczyć wyjściowe pojęcie odległości.

**Okrąg.** Okrąg jednostkowy, czyli podzbiór płaszczyzny  $\mathbb{S} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ , dziedziczy relację dotkania określoną wyżej na  $\mathbb{R}^2$ .

**Okrąg inaczej.** Niech  $K$  będzie odcinkiem  $[0, 1]$  ze sklejonymi końcami. Ścisłej, na odcinku  $[0, 1]$  – rozumianym jako podprzestrzeń  $\mathbb{R}$  – wprowadźmy relację równoważności, w której  $0 \sim 1$  (i oczywiście  $x \sim x$  dla każdego  $x \in [0, 1]$ ). Następnie oznaczmy przestrzeń ilorazową  $K := [0, 1]/\sim$ . Choć niekoniecznie to *widać*,  $K$  jest okręgiem.

Zdanie to nie brzmi ściśle, ale możemy je uzasadnić! W tym celu okreśmy funkcję  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{S}$  wzorem  $f(x) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ . Oczywiście  $f(0) = (1, 0) = f(1)$ , co pozwala określić funkcję  $\tilde{f}: K \rightarrow \mathbb{S}$  spełniającą  $\tilde{f}([x]) = (\cos(2\pi x), \sin(2\pi x))$ . Co więcej, łatwo sprawdzić, że  $\tilde{f}$  jest bijekcją oraz funkcją ciągłą (zob. zadanie 4).

W tym konkretnym przypadku możemy się nawet przekonać, że zachodzi równoważność:  $\tilde{x}$  dotyka  $\tilde{A}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $f(\tilde{x})$  dotyka  $f(\tilde{A})$ . Bijekcję o takiej własności nazywamy *homeomorfizmem*. Istnienie homeomorfizmu  $f: K \rightarrow \mathbb{S}$  oznacza, że  $K$  i  $\mathbb{S}$  są nierozróżnialne jako przestrzenie topologiczne. Wyjaśnia to, dlaczego  $K$  zasługuje na miano okręgu, chociaż na okrąg nie wygląda.

## Dotyk a topologia

Przedstawione tu omówienie to dużo, albo nawet za dużo, jak na pierwsze zetknięcie z topologią. Na pewno jednak niektórzy Czytelnicy dobrze znają tę dziedzinę i zadają sobie pytanie, jak relacja dotkania ma się do standardowej formalizacji topologii. Spieszę z wyjaśnieniem.

Otóż zbiór  $X$  z relacją dotkania pozwala zdefiniować operację domknięcia:

$$\bar{A} := \{x \in X : x \text{ dotyka } A\} \quad \text{dla } A \subseteq X.$$

Własności operacji  $A \mapsto \bar{A}$  łatwo odczytać z aksjomatów dotkania:

- (C1)  $\bar{\emptyset} = \emptyset$
- (C2)  $A \subseteq \bar{A}$
- (C3)  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- (C4)  $A \subseteq \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$

I to właśnie jest aksjomatyka topologii zaproponowana przez Kazimierza Kuratowskiego. Z pewną drobną zmianą: aksjomatyka Kuratowskiego zastępuje warunek (C4) warunkiem (C4')  $\overline{\bar{A}} = \bar{A}$ . Jednak nietrudno się przekonać, że zestawy (C1,2,3,4) i (C1,2,3,4') są równoważne.

A jak stąd przejść do rodziny zbiorów otwartych? Definiujemy mianowicie zbiory domknięte jako te zbiory  $A$ , dla których  $\bar{A} = A$ , a zbiory otwarte jako dopełnienia zbiorów domkniętych. Można sprawdzić, że tak określona rodzina zbiorów otwartych spełnia aksjomaty (T1,2,3) z początku artykułu, jak również – że cały ten proces „tłumaczenia” da się odwrócić.

Czy warto tłumaczyć całą topologię na język dotkania? Na pewno nie. A czy warto podeprzeć się alternatywną formalizacją, by uzyskać jaśniejszy obraz tej wspaniałej dziedziny? Odpowiedź należy do Czytelnika.

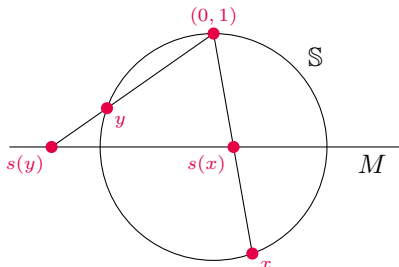
**Zadanie 1.** Weźmy zbiór  $C = \{0, 1\}$  z topologią dyskretną. Sprawdzić, że przestrzeń  $X$  jest niespójna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje niestała funkcja ciągła  $f: X \rightarrow C$ .

**Zadanie 2.** Przekonać się, że w definicji dotykania na  $\mathbb{R}^2$  użycie dowolnego ze wzorów na odległość:

$$d_2(p, q) := \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2}, \quad d_1(p, q) := |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2|,$$

$d_\infty(p, q) := \max(|p_1 - q_1|, |p_2 - q_2|)$ , prowadzi do tej samej relacji dotykania (choć możliwe, że dla tych samych  $p$  i  $q$  trzeba inaczej dobrać punkt  $q$ ).

**Zadanie 3.** Niech  $M = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$  będzie zbiorem  $\mathbb{R}$  wzbogaconym o dodatkowy element oznaczony wymownym symbolem  $\infty$ . Przyjmijmy, że  $\infty$  dotyka wszystkich nieograniczonych podzbiorów  $A \subseteq \mathbb{R}$  (oraz wszystkich zbiorów zawierających  $\infty$ ). Ponadto każdy z punktów  $x \in \mathbb{R}$  dotyka tych zbiorów, które posiadają punkty dowolnie blisko  $x$  (podobnie jak dla  $\mathbb{R}$ ). Uzasadnić, że rzut stereograficzny  $s: \mathbb{S} \rightarrow M$  (posyłający punkt  $(0, 1)$  na punkt  $\infty$ ) jest homeomorfizmem.



Rzut stereograficzny z zadania 3

**Zadanie 4.** Niech  $f: X \rightarrow Y$  będzie funkcją ciągłą spełniającą warunek  $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(y)$ . Wykazać istnienie (dokładnie jednej) funkcji ciągłej  $\bar{f}: X/\sim \rightarrow Y$  takiej, że  $f(x) = \bar{f}([x])$  dla wszystkich  $x \in X$ .

**Zadanie 5.** Wykazać, że pojedynczy aksjomat

$$(C0) \quad A \cup \bar{A} \cup \bar{\bar{B}} = \bar{A \cup B} \setminus \bar{\emptyset}$$

jest równoważny zestawowi aksjomatów  $(C1, 2, 3, 4')$  (jak również  $(C1, 2, 3, 4)$ ).

Szkie rozwiązań zadań zamieszczamy na str. 15.

## O książce *Matematyka z różnych stron widziana*

Paweł STRZELECKI\*

Dawno nie miałem w ręku książki, której tytuł tak dobrze oddawałby jej zawartość i charakter. W niezbyt długim tekście trudno oddać jej pełną sprawiedliwość (należy ją po prostu przeczytać i przeżyć, najlepiej stopniowo, nie od razu).

*Matematyka z różnych stron widziana* jest zbiorem kilkudziesięciu artykułów i esejów, stanowiących w większości zapisy wybranych odczytów wygłaszanych przez ponad 30 lat na Szkołach Matematyki Poglądowej. Szkoły organizowane są przez Ośrodek Kultury Matematycznej założony przez grupę oddanych matematyce entuzjastów skupioną wokół prof. Marka Kordosa. Książka jest więc, po pierwsze, dokumentem niezwyklej wieloletniej działalności związanej z najlepiej pojętym upowszechnianiem nauki. Otóż nauka nie może istnieć bez rozmowy – i to zarówno rozmowy uczonych tej samej specjalności między sobą, jak i z koleżankami i kolegami z odleglejszych rejonów świata nauki, a także z tymi, którzy do nich za chwilę dołączają, z tymi, którzy po prostu zostaną szeregowymi użytkownikami matematyki (lub innej dyscypliny), a wreszcie całą rzeszą rozsądnych ludzi, którzy z licznych względów chcieliby wiedzieć, *co w naukowej trawie piszczy*.

Nie jest wcale rzeczą jasną, jak takie dialogi mają wyglądać i jak je prowadzić. Jak pisze sam Marek Kordos w tekście, który zamyka książkę – prowadząc Czytelnika od Lewisa Carrolla i jego Alicji po hipotezę geometryzacyjną Thurstona i medal Fieldsa Griszy Perelmana – i jest zapisem jego odczytu w Nowym Sączu z okazji pierwszego wręczenia dyplomów absolwentom

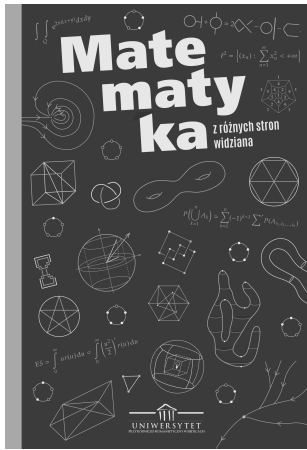
\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

tamtejszego Kolegium Nauczycielskiego: trudnością, z którą musiał się jako prelegent zmierzyć,

*... był fakt, że należało mówić o matematyce, a w uroczystości mieli wziąć udział (i wzięli) ludzie o bardzo różnym stopniu oswojenia z tą dyscypliną. Byli wybitni matematycy polscy (w tej liczbie ówczesny Rektor Uniwersytetu Jagiellońskiego), ale też sędzcy parlamentarzyści i najznakomitsi przedstawiciele nowosądeckiego Ratusza (z Prezydentem Miasta na czele), sędzka Hierarchia Kościelna, wykładowcy Kolegium (a więc także muzycy, sportowcy, psychologowie, angliści itd.), nauczyciele szkolni, studenci i liczna gawiedź (bo rzecz odbywała się w bardzo pojemnej ratuszowej auli, tej z przepięknym piecem kaflowym). Jak powiedzieć coś, czego bez znudzenia mogliby wysłuchać oni wszyscy?*

Książka w istocie jest świadectwem wielowątkowej, wielowymiarowej, zespołowo udzielonej i, co ważne, spójnej odpowiedzi na ostatnie pytanie. Jak pisze jeden z autorów, Zbigniew Marciniak:

*Matematyka jest dla mnie częścią przyrody. Podobnie jak ludzie zajmujący się innymi dyscyplinami nauki, matematyk stara się odkryć prawa opisujące ten fragment rzeczywistości. Matematyka posiada przy tym szczególny urok: odkrywcy dana jest od razu „cała” prawda. Twierdzenie, poprawnie udowodnione dwa tysiące lat temu, pozostaje do dziś tak samo prawdziwe.*



To prawda, niemniej ludzie dzielą się swoim widzeniem matematyki. To konieczne, stąd między innymi bierze się postęp w nauce, zdolność abstrahowania, formułowania problemów i ich rozwiązywania. Każde twierdzenie *poprawnie udowodnione*, później zaś dogłębnie zrozumiane i przetrawione, można w badaniach stosować rozmaicie i w różnych kontekstach; aby tego doświadczyć, potrzebna jest między innymi rozmowa. Obszerność matematyki wiąże się wszak z trudnością wyboru własnej drogi naukowej lub (gdy się ją już raz wybierze) podjęcia decyzji o jej zmianie; zwięzy imperatyw Hilberta – mówiący, że motorem rozwoju nauk matematycznych jest rozwiązywanie problemów – może nie wystarczyć. Ta książka go wspomaga i dostarcza inspiracji do przemyśleń i poszukiwań.

Teksty składające się na książkę dzielą się na kilka grup, a może raczej dałoby się je oznaczyć różnymi etykietkami (zwykle wybór etykiety nie jest ani w pełni oczywisty, ani jednoznaczny). Mnie podczas lektury i notatek pojawiła się piątka takich roboczych etykiet. Oto one, z przykładami tekstów, którym gotów byłbym je przydzielić.

Po pierwsze *klasyka matematyki*. Do tej grupy zaliczam m.in.:

- Cztery teksty Zbigniewa Marciniaka: stosunkowo elementarny i bardzo klasyczny *Wzór Eulera*; drugi – *Skąd to się wzięło?* (tekst o licznych mostach między geometrią i fizyką, który pozwala Czytelnikowi spojrzeć z lotu ptaka na panoramę obejmującą prace Rydberga i Balmera z jednej strony, a drugiej zaś – ideały, algebry funkcji ciągłych i twierdzenie Gelfanda–Najmarka, przygotowujące czasem o ból głowy adeptów analizy funkcjonalnej); trzeci – *Wielkie Twierdzenie Fermata* (przybliżający klarownie, w sposób zrozumiały dla studentów matematyki, kulisy i pojęcia kryjące się za hipotezą Taniyamy–Shimury i słynnym dowodem Wilesa); i wreszcie czwarty – o teorii grup jako przykładzie teorii aksjomatycznej
- Jacka Dębka przekład wizjonerskiego wykładu habilitacyjnego Riemanna
- Tekst Michała Hellera i Zdzisława Pogody o geometrii i kosmologii
- Pawła Traczyka *Kolorowe węzły i sploty* oraz Krzysztofa Ciesielskiego *Topologiczne układy dynamiczne*
- Michała Adamaszka *1, 2, 4, 8* i Tomasza Kochanka *O metodzie probabilistycznej Paula Erdősa*
- Jacka Świątkowskiego *O bryłach i parkietach platońskich* i Tadeusza Nadziei *Czy możemy usłyszeć wymiar przestrzeni?*



#### Rozwiązanie zadania F 1058.

W momencie rozpoczęcia opuszczania deski ciężarek naciska na nią z siłą  $F = m(g - a)$ . Od deski oderwie się, gdy wartość siły, z jaką sprężyna ciągnie go w górę, zrówna się z siłą  $F$ , to znaczy, gdy wydłużenie  $x$  sprężyny osiągnie wartość  $x = m(g - a)/k$ . Nastąpi to po czasie

$$t_0 = \sqrt{\frac{2m(g - a)}{ak}}$$

W chwili  $t_0$  ciężarek porusza się z prędkością  $v = at_0$  w dół, tzn. w kierunku wzrostu wydłużenia sprężyny, po czym wykonuje drgania względem położenia równowagi  $x_0 = mg/k$  z częstością  $\omega = \sqrt{k/m}$ :

$$x(t) = x_0 + A \sin(\omega(t - t_0) + \varphi).$$

Znamy położenie  $x(t_0) = A \sin(\varphi) = x_0$  i prędkość  $v(t_0) = A\omega \cos(\varphi) = at_0$ . Po podstawieniu obliczonych wcześniej wartości  $x_0$  oraz  $t_0$  i skorzystaniu z tożsamości trygonometrycznej otrzymujemy:

$$A = \frac{m}{k} \sqrt{a(2g - a)}.$$

Wspólnym mianownikiem tekstów z etykietą *klasyka* jest dla mnie to, że od najprostszych definicji i przykładów, opowiedzianych bardzo często ze swadą, w sposób genialnie rozumiały prowadzą Czytelników do osiągnięć nowoczesnej matematyki pokazanych panoramicznie i pogładowo, w sposób, którego nie wstydziłoby się autorzy najlepszych tekstów przeglądowych w *Notices of the American Mathematical Society*. Dwa zdania zaczerpnięte z tych tekstów, nie do końca na chybił trafił, mogą służyć za motto przekazu tej warstwy książki: *Matematyka wzięta się ze zmagania z rzeczywistością pozamatematyczną* (Marciniak), *Wszystko wskazuje na to, że przyszłość należy do badań interdyscyplinarnych* (Heller, Pogoda). Nie ma w tekstach istotnie nowych wyników matematycznych, niemniej bez wątpienia mają one wybitnie naukowy charakter.

Druga z moich roboczych etykiet to *na pozór ciekawostki i drobiazgi, ale w istocie nie tylko*. Wiele tekstów, którym byłbym gotów ją przydzielić, dotyczy m.in. matematyki dyskretnej i kombinatoryki (prominentni autorzy w tej klasie to Joanna Jaszńska i Jarosław Wróblewski), choć nie tylko: znajdzie się tu też matematyka wiązania krawatów i sznurówek (brzmi jak nieszkodliwe dziwactwo, które – jednak! – trafiło m.in. na łamy *Nature*), opowieści o izometriach i liczbach chromatycznych etc. W tej grupie tekstów jeden ze wspólnych mianowników to ilustracja przenikania się bardzo różnych subdyscyplin matematyki, często w zupełnie nieoczekiwany sposób.



### Rozwiązanie zadania F 1057.

Para nad powierzchnią cieczy zachowuje się jak gaz doskonały. W czasie  $\Delta t$  do jednostki powierzchni cieczy docierają cząsteczki o prędkości  $\vec{v}$  wypełniające walec o objętości  $S|\vec{v}|\cos(\theta)\Delta t$ , przy czym  $\theta$  oznacza kąt, jaki prędkość  $\vec{v}$  tworzy z prostą prostopadłą do elementu powierzchni  $S$ . Dla otrzymania liczby  $\Delta N$  cząsteczek docierających do elementu  $S$  powierzchni należy to wyrażenie wysumować po wszystkich prędkościach, dla których kąt  $\theta$  odpowiada ruchowi w kierunku powierzchni – dla gazu (pary) o gęstości  $n$  cząsteczek w jednostce objętości otrzymujemy wyrażenie:

$$\Delta N = \beta n v_{sr} S \Delta t,$$

gdzie wartość parametru  $\beta$  wynika z postaci rozkładu prędkości cząsteczek gazu (rozkładu Maxwella), a  $v_{sr}$  jest pierwiastkiem ze średniego kwadratu prędkości. Z zasady ekwipartycji energii otrzymujemy związek  $m v_{sr}^2 = 3kT$ , w którym  $k$  oznacza stałą Boltzmann. Zgodnie z równaniem stanu gazu doskonałego o ciśnieniu  $p$ :

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Otrzymujemy:

$$\Delta N = \beta p S \Delta t \sqrt{\frac{3}{mkT}}.$$

Tylko ułamek  $\alpha$  tych cząstek „dołącza” do cieczy:  $\Delta N_c = \alpha \Delta N$  – reszta odbija się od powierzchni, pozostając cząsteczkami pary. Z drugiej strony, w wyniku ruchów termicznych, część cząsteczek cieczy odrywa się od jej powierzchni i stają się one cząsteczkami pary. W temperaturze  $T$ , gdy ciśnienie pary wynosi  $p_S$ , tyle samo cząsteczek cieczy przechodzi z pary do cieczy, co z cieczy do pary. Oznacza to, że w temperaturze  $T$  w czasie  $\Delta t$ :

$$\Delta N_p = \alpha \beta p_S S \Delta t \sqrt{\frac{3}{mkT}}$$

cząsteczek cieczy staje się cząsteczkami pary. Otrzymujemy więc, że w czasie  $\Delta t$  masa pary wzrasta o:

$$\begin{aligned} \Delta M_p &= \alpha \beta (p_S - p) m S \Delta t \sqrt{\frac{3}{mkT}} = \\ &= \alpha \beta (p_S - p) S \Delta t \sqrt{\frac{3m}{kT}}. \end{aligned}$$

Dla rozkładu Maxwella prędkości cząsteczek pary  $\beta^2 = 1/(6\pi)$  i otrzymujemy tzw. wzór Hertza-Knudsen:

$$\frac{1}{S} \frac{dM_p}{dt} = \alpha (p_S - p) \sqrt{\frac{m}{2\pi kT}}.$$

I. W. Eames, N. J. Marr and H. Sabir, *Int. J. Heat Mass Transfer*, **40**, 2963 (1997).

Kolejna etykieta to *nieoczekiwane zastosowania i połączenia na wskroś dyscyplin nauki*. Prominentnym autorem w tej grupie tekstów jest znakomity wrocławski probabilista i statystyk, Andrzej Dąbrowski, a za dobry przykład tego, czego dotyczy przekaz takich tekstów, niech posłuży jego zdanie: *Problemy geometrii stochastycznej mają swoje źródła w astronomii, fizyce atomowej, biologii, rozpoznawaniu obrazów, poszukiwaniu złóż geologicznych – wszędzie tam, gdzie oglądamy tylko fragmentaryczny kadr rzeczywistości, jakby kilka klatek pewnego filmu*.

Czwarta etykieta to *historia i filozofia matematyki*; obie te bohaterki występują m.in. w tekstach Marka Kordosa i Romana Murawskiego, napisanych z wielką erudycją. Szczególną uwagę zwraca esej *Powrót do Natury, czyli zwycięstwo pokory nad pychą*, mowa w nim m.in. o zdobywaniu wiedzy przez kumulację doświadczeń i kontekstowe analogie, co w epoce burzliwego rozwoju uczenia maszynowego w różnych odmianach i wszelkich jego zastosowań powinno prowokować każdego do refleksji i własnych poszukiwań.

Ostatnia z moich roboczych etykiet nosi nazwę *społeczna rola matematyki, edukacja i kultura*. Przydzieliłbym ją m.in.:

- Tekstom Małgorzaty Mikołajczyk *Czy można nauczyć pomysłowości?* oraz *Kogo kształcimy?* (mowa w nich m.in. o potrzebie budowania nawyku bycia aktywnym u studentów i uczniów, a także u przyszłych nauczycieli). Oba one świadczą o tym, że dobrze uczona matematyka – widziana jako integralna część kultury i edukacji w ogóle! – znakomicie służy wyrabianiu jakże potrzebnych w każdej działalności życiowej nawyków twórczej aktywności i najszerzej pojętego krytycyzmu, poszukiwania nowych rozwiązań i pomysłów, gotowości do wymiany doświadczeń etc.
- Tekstowi Jana Waszkiewicza i Agnieszki Wojciechowskiej o związku przemian w kulturze z nauczaniem matematyki, stanowiącemu jedną z prób przemyślanych odpowiedzi, dlaczego (i jakiej) matematyki trzeba uczyć w szkole
- Tekstowi Ryszarda Janiszewskiego o inspiracjach matematycznych w architekturze (w którym z osobistą radością matematyka odnalazłem m.in. znamienne nawiązanie do powierzchni minimalnych jako kształtów lekkich pokryć dachowych)
- Dość osobistym esejom Tomasza Nowickiego *Pod prąd* oraz Zofii Miechowicz *Czy Pitagoras była kobietą?*

Za streszczenie tej części przekazu *Matematyki z różnych stron widzianej* niech posłużą zdania Tomasza Nowickiego, dziś matematyka w Thomas Watson IBM Research Center w USA, któremu w swoim czasie przyszło mówić zarówno do studentów, którzy poza matematyką świata nie widzieli, jak i do studentów, którzy – ku swemu przykremu zaskoczeniu – jednak musieli mieć z nią choćby minimalny kontakt:

*Belfer musi być showmanem, ale show powinien mieć solidną ośnowę. Nie można opowiadać przez całe zajęcia anegdotek. [...]*

*Zadaniem matematyki nie jest bowiem dowodzenie twierdzeń, ani poznawanie świata, choć służą temu w innych naukach narzędzia matematyczne. Zadaniem matematyki jest lepiej świat zrozumieć.*

Ostatnie zdanie Nowickiego mogłoby według mnie służyć za motto całej książki.

\* \* \*

Wspomnę jeszcze dla porządku, że *Matematyka z różnych stron widziana* napisana jest niezwykle starannie i pięknie zilustrowana; korekta, redakcja, skład i łamanie (któż jeszcze dziś wie np., co to jest żywa pagina?) budzą szacunek.

Podsumowując, stwierdzam z głębokim przekonaniem, że książka *Matematyka z różnych stron widziana* ma olbrzymią wartość naukową, kulturową i popularyzatorską. Będzie z pewnością chętnie czytana, a w licznych bibliotekach znajdzie miejsce obok *Co to jest matematyka?*, Couranta i Robbinsa, jako świetna, zespołowa, polska odpowiedź.

# Czy inni mają więcej rodzeństwa?

Wojciech CZERWIŃSKI\*

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW

Chyba już od szkoły podstawowej miałem wrażenie, że ludzie, których znam, mają więcej rodzeństwa niż średnia. Tłumaczyłem to sobie zawsze tym, że widocznie moi znajomi z różnych przyczyn pochodzą ze środowisk, w których ludzie mają tendencję do posiadania większej liczby dzieci. Trwałem w tym błędnym myśleniu do całkiem niedawna, aż odkryłem, że przyczyną tego złudzenia jest pewien dość prosty matematyczny mechanizm.

Ale zacznijmy od początku. Załóżmy dla uproszczenia, że w społeczeństwie, w którym żyjemy, średnia dzietność wynosi 2, czyli panuje dokładna zastępowalność pokoleń. W aktualnej chwili w Polsce dzietność wynosi mniej, bo około 1,38, ale przez okres mniej więcej od roku 1965 do 1995 współczynnik ten wynosił około 2, więc zapewne wielu Czytelników może potraktować to założenie jako naturalne. Czy takie założenie oznacza, że średnia liczba rodzeństwa wynosi 1?

Na pierwszy rzut oka tak może się wydawać – i faktycznie tak ma się sprawa, jeśli każdy człowiek ma dokładnie dwójkę dzieci. Łatwo jednak zauważyć, że nie zawsze tak jest. Przypuśćmy, że 80% par w ogóle nie ma dzieci, natomiast 20% ma dziesięcioro dzieci. Wówczas współczynnik dzietności wciąż wynosi 2, ale każde z dzieci ma dziewięcioro rodzeństwa. A więc średnia liczba rodzeństwa może być dowolnie większa niż 1. Czy może jednak wynosić mniej niż 1?

Pokażemy, że nie jest to możliwe. Intuicyjnie rzecz biorąc, przyczyna jest następująca: licząc rodzeństwo dzieci, więcej razy policzymy te rodziny, w których jest więcej dzieci. Przypuśćmy, że w rozważanym społeczeństwie jest  $n$  par, które mają odpowiednio  $k_1, k_2, \dots, k_n$  dzieci. Z założenia, że średnia dzietność wynosi 2, wiemy, że  $k_1 + \dots + k_n = 2n$ . Ile wynosi średnia liczba rodzeństwa? Każde z  $k_1$  dzieci pierwszej pary ma  $k_1 - 1$  rodzeństwa, każde z  $k_2$  dzieci drugiej pary ma  $k_2 - 1$  rodzeństwa itd. A więc suma liczby rodzeństwa po wszystkich dzieciach to

$k_1(k_1 - 1) + \dots + k_n(k_n - 1) = k_1^2 + \dots + k_n^2 - (k_1 + \dots + k_n) = k_1^2 + \dots + k_n^2 - 2n$ ,  
a co za tym idzie, średnia liczba rodzeństwa to

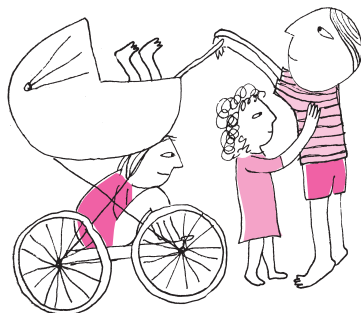
$$\frac{k_1^2 + \dots + k_n^2}{2n} - 1.$$

Z nierówności między średnią kwadratową a arytmetyczną dla liczb  $k_1, \dots, k_n$  wynika, że

$$\sqrt{\frac{k_1^2 + \dots + k_n^2}{n}} \geq \frac{k_1 + \dots + k_n}{n} = 2.$$

A zatem  $\frac{k_1^2 + \dots + k_n^2}{n} \geq 4$ , czyli  $\frac{k_1^2 + \dots + k_n^2}{2n} - 1 \geq 1$ , co kończy nasze rozumowanie i pokazuje, że faktycznie średnia liczba rodzeństwa zawsze wynosi co najmniej 1, o ile średnia dzietność wynosi 2. Można łatwo powtórzyć to rozumowanie zupełnie analogicznie dla dowolnej dzietności  $c$  i wykazać, że średnia liczba rodzeństwa jest nie mniejsza niż  $c - 1$ .

Naturalne wydaje się w tym kontekście pytanie: jak duży jest ten efekt w rzeczywistości? Trudno jest znaleźć w Internecie precyzyjne informacje na temat aktualnej wielkości rodzin w Polsce (zresztą wymagałoby to skomplikowania naszego modelu, wprowadzenia rodzeństwa przyrodniego itd.). W związku z tym dla celów poglądowych na podstawie różnych danych stworzyłem przykładowy profil dzietności kobiet w pewnym społeczeństwie, która z pewną dokładnością przypomina Polskę w latach 90. Dopasowałem liczby tak, by średnia dzietność była dość okrągła i wynosiła 1,8. W następującej tabelce pokazane jest, ile procent kobiet ma ile dzieci w tym społeczeństwie.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
14,3%	33,8%	27,6%	13,9%	5,9%	2,5%	1,2%	0,5%	0,2%	0,1%

Dla  $i \in \{0, \dots, 9\}$  niech  $p_i$  to odsetek kobiet, które posiadają dokładnie  $i$  dzieci. Niech  $N$  to liczba kobiet w społeczeństwie. Wówczas  $N \cdot p_i$  kobiet ma dokładnie  $i$  dzieci, a więc dzieci w takich rodzinach jest  $N \cdot p_i \cdot i$ . Wszystkich dzieci jest  $\sum_{i=0}^9 N \cdot p_i \cdot i$ , co jest równe dokładnie  $N \cdot 1,8$ , bo, jak wiemy, dzietność wynosi 1,8. A zatem odsetek dzieci, które żyją w rodzinach o  $i$  dzieciach, to  $\frac{N \cdot p_i \cdot i}{N \cdot 1,8} = 1/1,8 \cdot p_i \cdot i$ . Poniższa tabelka pokazuje, ile procent dzieci żyje w rodzinach danej wielkości w rozważanym społeczeństwie.



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0%	18,8%	30,7%	23,2%	13,1%	6,9%	4%	1,9%	0,9%	0,5%

W takim społeczeństwie średnia liczba rodzeństwa to

$$\sum_{i=0}^9 (1/1,8 \cdot p_i \cdot i) \cdot (i-1) = 18,8\% \cdot 0 + 30,7\% \cdot 1 + 23,2\% \cdot 2 + \\ + 13,1\% \cdot 3 + 6,9\% \cdot 4 + 4\% \cdot 5 + \\ + 1,9\% \cdot 6 + 0,9\% \cdot 7 + 0,5\% \cdot 8 = \\ = 1,86.$$

Czyli średnia liczba rodzeństwa z naiwnie spodziewanej 0,8 podniosła się do aż 1,86. To naprawdę spory efekt!

Podobny fenomen powinien zachodzić również dla ciotecznego rodzeństwa i dla dalszego kuzynostwa i wydaje się, że powinien być nawet większy niż w przypadku rodzeństwa. Gdyby każda para posiadała dokładnie dwójkę dzieci, to każdy człowiek posiadałby dokładnie czwórkę rodzeństwa ciotecznego oraz szesnaścioro kuzynostwa drugiego rzędu. Zachęcam Ambitnych Czytelników do sprawdzenia, czy w istocie przy takim założeniu średnia liczba rodzeństwa ciotecznego jest większa niż cztery. Codzienne doświadczenie podpowiada, że powinno to raczej być prawdą, zarówno dla rodzeństwa ciotecznego, jak i dla kuzynostwa dowolnie dalekiego rzędu. Kto wie, może jest to nawet temat na ciekawe badania z dziedziny nierówności bądź ze statystyki.



## Zadania

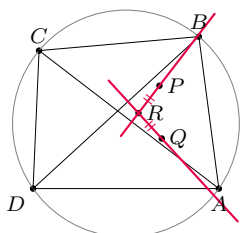
Przygotował Dominik BUREK

**M 1723.** Niech  $\psi(n)$  oznacza liczbę dzielników pierwszych liczby całkowitej dodatniej  $n$  (np.  $\psi(10) = \psi(12) = 2$ ). Rozważmy zbiór  $A$  wszystkich par liczb całkowitych dodatnich  $(a, b)$  takich, że  $a \neq b$  oraz  $\psi(a+b) = \psi(a) + \psi(b)$ . Rozstrzygnąć, czy zbiór  $A$  jest skończony.

Rozwiązanie na str. 10

**M 1724.** Prostokąt  $R$  o bokach nieparzystej długości jest podzielony na pewną liczbę prostokątów o bokach całkowitej długości i równoległych do boków  $R$ . Udowodnić, że istnieje prostokąt wewnątrz prostokąta  $R$ , dla którego odległości od boków  $R$  są albo wszystkie parzyste, albo nieparzyste.

Rozwiązanie na str. 10



**M 1725.** W czworokącie  $ABCD$  wpisanym w okrąg punkty  $P$  i  $Q$  są środkami okręgów wpisanych w trójkąty  $ABC$  i  $ABD$ , odpowiednio. Prosta przechodząca przez  $P$  i prostopadła do prostej  $AC$  przecina prostą prostopadłą do  $BD$  przechodzącą przez  $Q$  w punkcie  $R$ . Pokazać, że trójkąt  $PQR$  jest równoramienny.

Rozwiązanie na str. 11

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1057.** W stanie równowagi termodynamicznej, w temperaturze  $T$ , ciśnienie pary nad powierzchnią cieczy wynosi  $p_S(T)$ . Jak szybkość parowania, tj. wzrost  $\Delta M$  masy pary nad elementem  $S$  powierzchni cieczy w czasie  $\Delta t$ , zależy od temperatury  $T$  i ciśnienia  $p$  pary znajdującej się nad powierzchnią cieczy? Dla uproszczenia modelu zakładamy, że cząsteczka pary uderzająca w powierzchnię cieczy przylega do niej (tzn. staje się cząsteczką cieczy) z prawdopodobieństwem  $\alpha$ . Masa cząsteczki równa jest  $m$ .

Rozwiązanie na str. 5

**F 1058.** Ciężarek o masie  $m$  przymocowany jest do pionowej sprężyny o stałej sprężystości  $k$ . Początkowo sprężyna nie jest ani rozciągnięta ani ściśnięta, a ciężarek spoczywa na poziomej desce. W pewnej chwili deska zaczyna poruszać się w dół ze stałym przyspieszeniem  $a$ , co do wartości mniejszym od przyspieszenia ziemskiego  $g$ . Jaka będzie amplituda  $A$  drgań ciężarka po całkowitym usunięciu deski?

Rozwiązanie na str. 4

\* Instytut Matematyki Stosowanej  
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Edwin Abbott Abbott (1838–1926)



Flatland. A Romance of Many Dimensions, okładka szóstego wydania, 1950 r.



Flatlandia, czyli Kraina Płaszczyzaków, okładka polskiego wydania, 2008 r.

## Flatlandia

Grzegorz LUKASZEWICZ\*

Edwin Abbott po chwalebnym ukończeniu szkół i studiów poświęcił się nauczaniu i pedagogice, będąc wieloletnim (1865–1889) dyrektorem City of London School. Wśród ponad 50 książek: podręczników szkolnych, tekstów literackich i teologicznych, które napisał, *Flatlandia* jest rodzynkiem, fantazją matematyczną, ale nie tylko. W Anglii książka początkowo nie zyskała szerszego oddźwięku i tak naprawdę została odkryta dopiero znacznie później (pierwsze dwa wydania w 1884 r., a z nazwiskiem autora na okładce dopiero trzecie w 1926). Co do pomysłów, *Flatlandia* dużo zaczerpnęła z wydanej cztery lata wcześniej, w 1880 roku, książki Charlesa Howarda Hintona noszącej tytuł *Co to jest czwarty wymiar?*. Tematyka „czwartego wymiaru” należała nie tylko do matematyki, ale także była częścią szeroko pojętego wiktoriańskiego spirytualizmu, psychologii, religii czy duchowości. Oznaczała również rozmaite tajemnicze, niezbadane zjawiska lub też wyobrażenia o nich, jak np. telepatia i jasnowidztwo oraz zagadnienia dotyczące czasu i podróży w czasie [Wells]. Wiele z tych pomysłów postępowało za niedawnymi odkryciami matematycznymi (np. geometrie nieeuklidesowe, powierzchnie Riemanna) i przenosiło je na inne pola, ale także wyprzedzało niedalekie już fundamentalne zmiany w fizyce – w rozumieniu przestrzeni i czasu – które przyniosła teoria względności.

W największym skrócie: *Flatlandia* ma dwie części. W pierwszej opisany jest świat płaszczyzaków ograniczonych do swojej płaszczyzny, która jest dla nich całym światem. W drugiej części natomiast jeden z płaszczyzaków, Kwadrat, zostaje zabrany w przestrzeń trójwymiarową, a my śledzimy jego reakcje i refleksje wynikłe z tego nowego dlań doświadczenia.

Podtytuł *Flatlandii* „Romance in many dimensions” – co można tłumaczyć jako „przedsięwzięcie o wielu wymiarach” – jest zagadkowy, a okładka kilku pierwszych oryginalnych wydań angielskich sugeruje, że rzecz nie będzie tylko o matematyce.

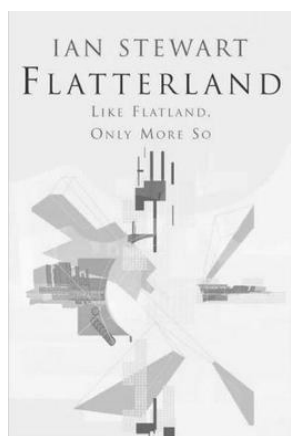
Widzimy Flatlandię wylaniającą się z chmur i dwa cytaty z Szekspira. Pierwszy („Na Boga, to są niepojęte dziwy!”) to słowa Horacja wypowiedziane w trakcie rozmowy Hamleta z duchem Ojca, drugi to odpowiedź Hamleta („Przyjmij je zatem i nie próbuj pojąć”), za którym kryje się – następane linijki w tekście *Hamleta* – słynne „There are more things, Horatio, that are dreamed of in your philosophy” („Więcej jest rzeczy w niebie i na ziemi, niż się wydaje naszym filozofom, drogi Horacjo”, akt 1, scena 5, tłumaczenie: Stanisław Barańczak).

Ponadto wydania z 1884 roku ukazały się pod pseudonimem „A Square”. Kwadrat to bohater opowieści, jednak ów pseudonim można również odczytać jako żartobliwe nawiązanie do nazwiska i (tak samo brzmiącego) drugiego imienia prawdziwego autora [Rucker].

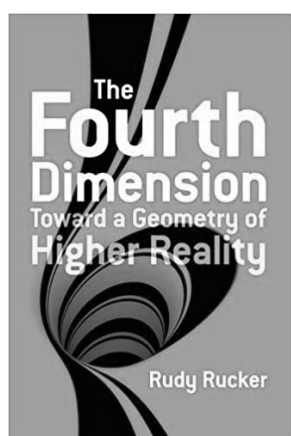
Nie sposób wymienić wszystkich odcieni interpretacyjnych i domniemyanych zamierzeń autora przypisywanych dziełku skierowanemu do czytelnika epoki wiktoriańskiej. Interpretacje z epoki mówiły o *nauczeniu młodych ludzi zasad elementarnej geometrii, o przypomnieniu istnienia nowych geometrii i prądów, znajdujących się poza ówczesnym systemem edukacji w Anglii (jak np. geometria n-wielowymiarowa z  $n > 3$  czy Riemannowska), a poza matematyką – o oczywiściej satyrze na ówczesne społeczeństwo i o wycieczkach metafizycznych autora pod płaszczykiem geometrii* [Bayley].

Pomysły z *Flatlandii* zawsze były też powiązane z obecnym w świadomości społecznej (wtedy i dziś) szerokim problemem „czwartego wymiaru”. Omówienie dzisiejszych interpretacji jest jedną z intencji książki Iana Stewarta *The Annotated Flatland* [Stewart], który uważa, że „znaczenie Flatlandii rośnie z każdym upływającym rokiem”.

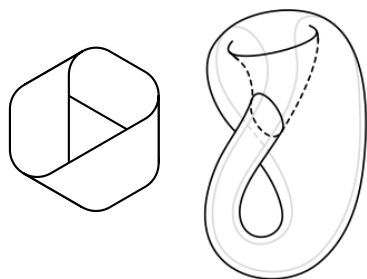
Autor niniejszego tekstu uważa podobnie, choćby dlatego, że jeden z głównych problemów *Flatlandii* dotyczy granic poznania racjonalnego wyznaczonych



*Flatterland* I. Stewarta, okładka pierwszego wydania z 2001 roku



*The Fourth Dimension* R. Ruckera, okładka wydania z 2014 roku (pierwsze wydanie 1984 r.)



Wstęga Möbiusa i butelka Kleina

#### Bibliografia

- Edwin A. Abbott, *Flatlandia, czyli Kraina Płaszczków*, Gdańskie Wydawnictwo Oświatowe, 2008.
- M. Bayley, *Faith and Flatland*, in *Mathematicians and their Gods: Interactions between mathematics and religious beliefs*, Edited by S. Lawrence, M. McCartney, Oxford University Press, 2015.
- Ch. H. Hinton, *What is the fourth dimension?*, Dublin University Magazine, 1880.
- B. Pascal, *De l'Esprit géométrique et de l'art de persuader*, Wikisource.
- R. Rucker, *The Fourth Dimension: Toward a Geometry of Higher Reality*, Dover Books on Science, 2014.
- I. Stewart, *The Annotated Flatland: A Romance of Many Dimensions*, The Perseus Press, 2001.
- I. Stewart, *Flatterland: Like Flatland, Only More So*, Macmillan, 2001.
- H. G. Wells, *Wehikul czasu [The Time Machine, 1895]*. Reprinted in *Selected Short Stories*, H. G. Wells. Penguin, New York 1958.]

przez nasze własne ograniczenia; nasza logika i wszelkie wyobrażenia są wszak ograniczone już choćby przez strukturę naszego mózgu, nasze doświadczenia i nasz język. Z ograniczeń własnej logiki zdał sobie sprawę Kwadrat, zabrany przez Kulę w świat trójwymiarowy. Brakowało mu pojęć i języka, aby wyrazić to, co zobaczył, jako że logika w przestrzeni trójwymiarowej była zupełnie inna niż jego logika płaszczaka.

*A może my sami jesteśmy takimi płaszczakami? Zawsze dobrze mieć taką ewentualność na uwadze przy ferowaniu „racjonalnych” wyroków w różnych kwestiach.*

W tym miejscu bezpieczniej będzie wrócić do matematyki, zgodnie ze wskazaniem Pascala, „car ce qui passe la géométrie nous surpasse” [Pascal] (*ponieważ to, co wykracza poza geometrię [tzn. matematykę], przerasta nas*). Przenieśmy się więc w czasie do wiktoriańskiej Anglii. Wykształceni ludzie tamtego okresu mogli mieć sporo trudności z pojęciem *wymiaru* w obrębie ówczesnej matematyki wyższej. W gruncie rzeczy, *Flatlandia* w dużej mierze dotyczy właśnie problemu wymiaru, cztero- i więcej wymiarowej geometrii euklidesowej oraz geometrii powierzchni Riemanna.

Na te dwie rzeczy autor *Flatlandii* zwracał uwagę czytelnika, posługując się historyjką o płaszczakach. Sam nie będąc matematykiem, dobrze rozumiał ważność tej tematyki.

System edukacyjny w wiktoriańskiej Anglii w zakresie matematyki był bardzo tradycyjny. Królowało liczenie i mierzenie oraz *geometria euklidesowa* w zakresie wymiarów nie przekraczających *trzy*. Specjalny status tej ostatniej wynikał z przekonania, że po pierwsze jest ona wbudowana w nasz system myślenia, po drugie można za jej pomocą opisać całą fizykę (co wykazał przecież Newton, nieprawdaż?) oraz po trzecie jest wzorem wszelkiego rozumowania, również w zakresie metafizyki. Wyobrażenia były przed wzorami. Każdy wie, co to jest okrąg o promieniu  $a$ , jego opis wzorem  $x^2 + y^2 = a^2$  jest wtórny. Uogólnienie tego wzoru do czterech wymiarów mogło być co najwyżej *anomalią algebraiczną* i niczym więcej. Sam Newton takich dziwactw nie potrzebował, będąc bardzo sceptycznym wobec wartości algebry Kartezjusza, grożącej zerwaniem ze „zdrową” geometrią (które zresztą później nastąpiło).

Był już zatem najwyższy czas, aby unowocześnić edukację matematyczną w Anglii i pokazać nowe idee w zakresie geometrii. Nauczanie po staremu powodowało zapóźnienie Anglii w stosunku do Europy w nauczaniu matematyki, a także w rozwoju fizyki i zastosowań w przemyśle. Zdawali sobie z tego sprawę znakomici uczeni angielscy, wśród nich Charles Babbage, James J. Sylvester, Arthur Cayley czy William K. Clifford, próbujący uświadomić ten problem decydentom oraz publice i wpłynąć na zmianę przestarzałego systemu edukacji. Na przykład w 1873 roku W. K. Clifford przetłumaczył na angielski tekst wykładu Riemanna *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii*. *Flatlandia* również służyła świetnie temu celowi.

Świat płaszczaków to także prosty przykład różnorodności dwuwymiarowej rozpatrywanej jako rzecz sama w sobie, w duchu idei Riemanna. Płaszczeni nie mają przecież pojęcia, że może istnieć inny świat poza ich własnym. Nie wiedzą, że nie trzeba nawet opuszczać dwóch wymiarów, aby eksplorować zaskakujące światy, np. „dziwolągi” w rodzaju *wstęgi Möbiusa* i *butelki Kleina* (zob. artykuł Michała Miśkiewicza w  $\Delta_{21}^7$ ).

„Czwarty wymiar” nie utracił do dziś w oczach szerszej publiki swojego powabu, czego jednym z wyrazów są popularnonaukowe książki inspirowane nowymi odkryciami w fizyce, które to książki można traktować jako dalsze ciągi *Flatlandii*. Na przykład *Flatterland* [Stewart, Flatterland], gdzie można się dowiedzieć, jak uciec z czarnej dziury (gdyby ktoś miał taką potrzebę).



# Narodziny Ziemi

Lech FALANDYSZ

Dawno temu, gdy Wszechświat liczył sobie około 6 mld lat, wydarzyło się coś bardzo powszechnego w skali całego Kosmosu, czy nawet w dziejach naszej Galaktyki. Dlaczego więc o tym wspominamy? Ponieważ z ludzkiego punktu widzenia wydarzenie to było przełomowe – w jego wyniku powstało nasze maleńkie podwórko we Wszechświecie – Układ Słoneczny. Ale do rzeczy. Co się stało 6 mld lat temu? Otóż w Drodze Mlecznej wybuchła jedna z olbrzymich gwiazd. Pojaśniała przy tym tak bardzo, że blask jej rozchodził się z wielkim natężeniem poprzez Galaktykę i biegł dalej w otchłań Kosmosu.

## Powstaje mgławica

Wyrzucona z gwiazdy podczas wybuchu materia oddalała się od niej z dużą szybkością, jednocześnie intensywnie świecąc. Po wybuchu mgławica stała się początkiem „naszego” świata, czyli Układu Słonecznego. Wykonania tej mozolnej pracy podjęła się grawitacja, która przyciąga – „jednoczy” – obiekty materialne. Przyciąganie grawitacyjne i siły tarcia powstrzymały rozszerzanie się mgławicy. Wreszcie, gdy mgławica przestała się rozszerzać, pod wpływem tej samej siły grawitacyjnej zaczęła się kurczyć. Po upływie milionów lat mgławica znacznie zmalała, ale i tak była dużo większa niż nasz obecny Układ Słoneczny. Hipotetyczny obserwator tego procesu zauważyłby, że mgławica nie tylko zmniejsza się wraz z upływem czasu, ale również coraz szybciej rotuje. Odbywa się to zgodnie z zasadą zachowania krętu (momentu pędu), która mówi, że jeżeli obracające się ciało zachowując masę, kurczy się, to wiruje ono coraz szybciej. Wszystko to powoduje, że w centrum mgławicy wyraźnie pojawia się zagęszczenie materii przyjmujące postać olbrzymiej „prawie kuli”. To prawie kuliste jądro mgławicy zawiera około 99% masy całej mgławicy! Złożone jest ono głównie z wodoru, chociaż zawiera też niewielkie ilości innych atomów.

Wokół masywnego jądra krąży coraz szybciej wir materii, w którym tworzą się zgrubienia – też wirujące wokół własnych osi obrotu. Te lokalne skupiska materii ściągają ku sobie okoliczną materię i powiększają się. Są to protoplanety – czyli załączki przyszłych planet. Grawitacja nadal zgniata materię kuli centralnej oraz utworzonych protoplanet. Gdy we wnętrzach tych obiektów zaczyna się robić zbyt „ciasno”, cząstki zaczynają się zderzać i „rozpychać”. Zderzenia te, zgodnie z zasadami termodynamiki, powodują wzrost energii wewnętrznej zarówno w centralnym jądrze, jak i w protoplanetach. Wzrost energii wewnętrznej powoduje równoczesny wzrost temperatury.

Wreszcie centralna „kula” zagęściła się tak bardzo, że w jej centrum powstał obszar o olbrzymiej temperaturze, około 14 mln K, i ciśnieniu 300 mld razy większym niż obecnie panujące w ziemskiej atmosferze. Panujące warunki przyczyniły się do rozpoczęcia termojądrowych reakcji syntezy jąder atomów wodoru (protonów) i powstania jąder atomów helu. W procesie tym wydziela się duża ilość energii w zakresie wysokoenergetycznych fotonów  $\gamma$  oraz fotonów rentgenowskich. Energia tych fotonów jest rozpraszana w zewnętrznych warstwach. Podgrzewana w ten sposób od wewnątrz powierzchnia kuli emituje promieniowanie termiczne. I w ten oto sposób wielka „kula” zaczyna świecić.

## Powstaje Słońce

Emisja fal widzialnych z centralnej „kuli” nastąpiła około 5 mld lat temu. Odtąd centralna „kula”, czyli Słońce, nie tylko utrzymuje grawitacyjnie swoją „rodzinę planetarną”, ale też „opiekuje się” nią, obdarowując światłem i wiatrem słonecznym. Ciśnienie światła i wiatru słonecznego działające na cząsteczki i atomy wodoru oraz lekkich atomów, które znajdują się w przestrzeni pomiędzy protoplanetami, powoduje coraz dalsze odsuwanie się ich od Słońca. W końcu zostają one pochłonięte przez znajdujące się dalej od Słońca protoplanety. Dlatego też wielkie planety złożone są głównie z wodoru.



### Rozwiązanie zadania M 1723.

Udowodnimy, że zbiór  $A$  jest nieskończony, wskazując odpowiednią konstrukcję.

Niech  $a = 2^k$ ,  $b = 2^{k+1}$ , gdzie  $k \geq 1$  jest liczbą całkowitą. Wtedy

$$\psi(a + b) = \psi(3 \cdot 2^k) = 2 = \psi(a) + \psi(b).$$

Inna konstrukcja: Niech  $a = p$  oraz  $b = 5p$ , gdzie  $p$  jest liczbą pierwszą różną od 2, 3, 5. Wtedy

$$\psi(a + b) = \psi(2 \cdot 3 \cdot p) = 3 = \psi(a) + \psi(b).$$



### Rozwiązanie zadania M 1724.

Oznaczmy przez  $a$  i  $b$  długości boków prostokąta  $R$ . Podzielmy  $R$  na  $ab$  kwadracików jednostkowych

i pokolorujmy je na dwa kolory – zielony i żółty, na wzór szachownicy. Skoro  $a$  oraz  $b$  są nieparzyste, to rogi prostokąta  $R$  będą miały ten sam kolor, bez straty ogólności zielony. Nazwijmy prostokąt zielonym, jeśli wszystkie jego pola narożne są zielone, żółtym, jeśli są żółte, oraz mieszanym w pozostałych przypadkach. Zauważmy, że

- każdy zielony prostokąt ma o jeden zielony kwadracik więcej,
- każdy żółty prostokąt ma o jeden żółty kwadracik więcej,
- każdy prostokąt mieszany ma dokładnie tyle samo kwadracików żółtych, co zielonych.

Wynika z tego, że skoro  $R$  jest zielony, to istnieje prostokąt wewnątrz  $R$ , który także jest zielony. Niech to będzie prostokąt  $S$ . Niech odległości  $S$  od boków  $R$  (począwszy od dolnego, przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) to  $x, y, z, v$ . Lewy dolny róg  $R$  ma ten sam kolor, co lewy górny róg  $S$ , co dzieje się wtedy i tylko wtedy, gdy  $x$  oraz  $v$  mają tę samą parzystość. Analogicznie  $x$  i  $y$ , a także  $y$  i  $z$  mają tę samą parzystość, co implikuje, że wszystkie liczby  $x, y, z, v$  mają tę samą parzystość – to kończy dowód.



### Rozwiązanie zadania M 1725.

Oznaczmy przez  $M$  środek krótszego łuku  $AB$  okręgu opisanego na czworokącie  $ABCD$ . Wówczas trójki punktów  $C, P, M$  oraz  $D, Q, M$  są współliniowe, a przechodzące przez nie proste to dwusieczne przystających kątów  $\sphericalangle ACB$  i  $\sphericalangle ADB$ , odpowiednio. Ponadto na podstawie „twierdzenia o trójkącie” dostajemy równości  $MA = MP = MQ = MB$ . Zatem

$$\begin{aligned} \sphericalangle QPR &= \pi - \sphericalangle MPQ - \left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle MCA\right) = \\ &= \pi - \sphericalangle PQM - \left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle MDB\right) = \\ &= \sphericalangle PQR. \end{aligned}$$

Wielkie bombardowanie to bardzo burzliwy okres w historii Ziemi i innych planet wewnętrznych. To właśnie z tego okresu pochodzi większość kraterów widocznych na Księżycu. Naukowcy wciąż nie są zgodni, co było powodem zwiększonej liczby uderzeń meteorytów. Jedną z teorii mówi, że powodem były migracje orbit gazowych olbrzymów, które w ten sposób zaburzyły orbity obiektów znajdujących się w pasie asteroid lub w pasie Kuipera (lub w obu) i skierowały je w stronę planet wewnętrznych.

## Powstaje Ziemia

Świeżo uformowana z protoplanety planeta Ziemia złożona jest z różnorodnej materii zawierającej lekkie i ciężkie pierwiastki. Wysokie ciśnienie we wnętrzu planety przekłada się na wysoką temperaturę, wynoszącą około 1700 K. O tym, jak będzie przebiegać dalsze formowanie się planety, „zadecydowały” pierwiastki promieniotwórcze zawarte w skałach, np. tor, uran i potas 40. Podczas ich rozpadów promieniotwórczych emitowane były cząstki  $\alpha$  (jądra helu) i inne, których energia była pochłaniana przez materię. Przez setki milionów lat ogrzewania się wnętrza planety temperatura wzrosła do około 2500 K. W tym czasie zaczynają się topić żelazo oraz nikiel i w stanie płynnym gromadzą się w środku planety, tworząc jej jądro. Dalszy grawitacyjny ucisk jądra Ziemi powoduje wzrost temperatury do około 4500 K. Ponad żelazowo-niklowym jądrem topnieją skały, przyjmując postać płynnej magmy. Podczas topnienia skał uwalniają się z nich niektóre składniki i w stanie lotnym przedostają się ponad powierzchnię planety. W ten sposób powstała pierwotna, gęsta atmosfera Ziemi.

Początkowo atmosfera ziemska nie była zbyt przyjazna życiu. Zawierała parę wodną, dwutlenek węgla, metan, amoniak i inne składniki. Dopiero około 4 mld lat temu rozpoczął się proces krzepnięcia skorupy ziemskiej i trwał przez 1,5 mld lat. W tym czasie zachodziły spektakularne zdarzenia. Ziemię bardzo często bombardowały meteoryty, niektóre bardzo duże, o średnicach nawet kilkudziesięciu kilometrów. Meteoryty, pędząc z szybkościami kilkunastu kilometrów na sekundę, wybijały olbrzymie kraterzy w miękkiej jeszcze powierzchni Ziemi. Okres ten, który nazywamy wielkim bombardowaniem, trwał około miliona lat. Na młodej wówczas Ziemi powstało około miliona kraterów o średnicach od kilkudziesięciu kilometrów do kilkuset kilometrów. Meteoryty oprócz deformacji powłoki ziemskiej i dostarczenia skał, były również źródłem związków metalicznych, które teraz wydobywamy z wnętrza skorupy jako rudy metali.

## Powstanie życia

Niezwykle interesujące jest to, że już w tym bardzo niespokojnym czasie, około 3,8 mld lat temu, w oceanie zaczęły powstawać pierwsze prymitywne jednokomórkowe organizmy. Po 200 mln lat organizmy te nabyły już zdolność przeprowadzania fotosyntezy. Sinice (cyjanobakterie) przez miliony lat dostarczały do atmosfery tlen, wytwarzany w wyniku procesów fotochemicznych. Atmosfera powoli zaczęła nabierać znajomego nam obecnie składu. Wreszcie około 2,5 mld lat temu skorupa ziemska zakrzepła. Nigdy jednak nie stała się tworem niezmiennym i nawet obecnie podlega przemianom. Skorupa ziemska przemieszcza się i zmienia powoli swoją konfigurację. Pomiędzy skorupą i jądrem planety znajduje się tzw. płaszcz ziemi, którego górna część jest płynna. Ponad 2 mld lat temu skorupa była zbiorem kilkunastu ruchomych płyt, które niczym tratwy powoli dryfowały po płynnym płaszczu Ziemi. Około 200 mln lat temu wszystkie płyty stykały się, tworząc jeden ogromny ląd – Pangeę. Resztę powierzchni Ziemi pokrywał wielki Wszechocjan. Powstał on wcześniej ze skroplonej pary wodnej zawartej w gęstej atmosferze. Dalsza historia Ziemi jest też bardzo interesująca. Zachodziły zmiany geofizyczne, zmiany pola magnetycznego Ziemi, zmiany klimatyczne, dryfowanie płyt kontynentalnych, ekspansja żywych organizmów. Kilka milionów lat temu na planecie Ziemia żyły hominidy, które wyróżniały się wśród zwierząt. Hominidy, takie jak np. *Homo habilis*, żyjący od około 2,5 do 1,7 lat temu, są przodkami *Homo sapiens*, czyli współczesnego człowieka.

Ziemia istnieje około 4,6 mld lat. Możemy dokonać pewnego porównania czasowego niektórych wydarzeń, przyrównując wiek Ziemi do jednej obecnej doby. Od czasu hominidów upłynęło zaledwie 20 sekund. Z tych 20 sekund na naszą techniczną cywilizację przypada 0,005 sekundy. Czy długo jeszcze trwać będzie nasza cywilizacja? Czy nie ulegnie samozagładzie? Czy może (w tej skali) trwać będzie jeszcze choćby 0,01 sekundy?

Głównym źródłem artykułu jest książka Felix R. Paturi, „Kronika Ziemi”, Wyd. Kronika, 1992.

## O pochodzeniu...

Widujemy je codziennie. Na ulicy, w domach, w parkach, na halach i w wiejskich obejściach. Są duże (sięgające nam do pasa) i malutkie (mogą się zmieścić do torebki). Różnią się ubarwieniem, kształtem, mają bardzo różne temperamenty, mogą być groźne, ale też przymilne. Wierne przez całe życie. Każdy zadaje sobie pytanie: jak powstała taka różnorodność? W pierwszym odruchu szukam przyczyn genetycznych. I natykam się na sprzeczności i niewiedzę.

Mowa o psach, naszych towarzyszach życia, pracy, odpoczynku. O niezwykle różnorodnym gatunku, w którego powstaniu i utrzymaniu odegraliśmy podstawową rolę. Badania genetyczne wskazują na bliskie pokrewieństwo współczesnych psów i szarego wilka. Wspólnego przodka miały w wilkach z plejstocenu (które wymarły). Do wykształcenia gatunku pra-psów doszło (brak precyzyjnych oznaczeń) po zakończeniu ery zlodowacenia plejstocenijskiego 40 000 do 30 000 lat temu. Na dużo późniejszy oceniamy czas udomowienia (pies jest największym udomowionym przez człowieka drapieżnikiem). Udomowienie wilka, owcy, kozy łączy się z końcem epoki ludzkich wędrowców, osadnictwem i pojawieniem się zaczątków rolnictwa. Niedawne badania genomów 72 wilków z Europy, Syberii i Północnej Ameryki wskazują bardzo ogólnie, że współczesne psy są bliższe wilkom z Azji niż z pozostałych lokalizacji. Zapewne też tam rozpoczęto udomawianie. Nie wiemy, od kiedy odliczać czas udomowienia. Pierwszy udokumentowany pies odkopany wraz z domniemanym właścicielem (człowiekiem) datowany jest na 14 200 lat temu, co wyprzedza czas powstawania rolnictwa. Najstarsze odnalezione szkielety psów (już nie wilków) znaleziono w Altaju i Belgii (33 000 p.n.e.), być może do udomowienia dochodziło w różnych rejonach planety. Dość szybko zróżnicowało się pięć psich linii, odnalezionych przez archeologów: na wschodnim azjatyckim wybrzeżu Morza Śródziemnego (7000 p.n.e.), Karelii (10 900 p.n.e.), nad Bajkałem (7000 p.n.e.) w Ameryce Północnej (4000 p.n.e.) oraz współczesny pies z Nowej Gwinei. Równoległe z procesem udomawiania następowały ludzkie starania o uzyskanie takiej odmiany psa, która była dla ludzi pożyteczna: stróża, pasterza stada, opiekuna rodziny, wreszcie – kanapowej rozrywki.

Może nadal próbować analizy genetycznej? Szary wilk z plejstocenu, pierwotny założyciel współczesnych ras psów wymarł, a jego potomkowie intensywnie krzyżowali się z wilkami i między sobą, co czyni śledzenie genów szalenie trudnym, chyba wręcz na razie niemożliwym. Nie pomagają także próby analizy mitochondrialnego DNA, tak użyteczne dla badaczy przeszłości człowieka. Badania psów Azji Południowej i Chin wskazują na ich największą genetyczną różnorodność, co sugeruje, że są to obszary wyjściowe dla gatunku. Przeczą tym wnioskowi inne analizy współczesnych psich genomów, niektóre wskazują jako miejsce narodzin gatunku nawet Europę. Wyniki prac archeologicznych ukazują zarówno postacie psów podobnych do wilków, jak i wilków do psów. Coraz bliższe kontakty ludzi z tymi towarzyszącymi im zwierzętami poskutkowały selekcjonowaniem mniejszych rozmiarem zwierząt. Kiedy, gdzie i jak wiele razy nastąpiło udomowienie psa, pozostaje zagadką. Wciąż także pojawiają się doniesienia sugerujące więcej niż wilcze pochodzenie psa.

Od początku udomowienia następowały częste krzyżówki psów z wilkami, co praktycznie uniemożliwia poszukiwanie linii dziedziczenia cech. Od tamtych czasów ocenia się, że istniały dziesiątki tysięcy pokoleń psów, co dla śledzenia kolejnych mutacji oznacza możliwość wielu mylnych tropów. Podobno wyhodowaliśmy ponad 4000 typów (ras) psów, a część z nich wymarła. Wszystkie one należą do tego samego gatunku, a istniejące różnice, głównie fenotypowe (cechy widoczne, pozwalające na kontynuację selekcji), zachowywano w miarę postępów reprodukcji danych linii. „Czystością” ras zajmują się różne związki kynologiczne, jednak nie udało się zbudować jednolitej klasyfikacji i wspólnej systematyki

opartej na podobieństwach i różnicach w wyglądzie i użyteczności.

Jednym słowem ten przypadek ewolucji gatunku jest trudny do jednoznacznej analizy genetycznej i nadal nie wiemy konkretnie, jak i kiedy pojawił się „nasz pies”. Nie przeszkadza to w traktowaniu tego zwierzęcia w sposób wyjątkowy. Być może, że i on nas wyjątkowo traktuje. Moja przyjaciółka, współmieszkająca z jamnikiem (nie umiem użyć słów „mająca jamnika”) mówiła: oczy takie mądre, a nie może się do mnie odezwać!

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

# Stara Delta Środek ciężkości czy masy?

Wojciech KOPCZYŃSKI

Na początku było Słowo...

Przypominamy artykuł, który pierwotnie ukazał się w  $\Delta_{99}^6$ .

Wojciech Kopczyński (1946–2022) był fizykiem relatywistą, przez całą karierę naukową związanym z Katedrą Teorii Względności i Grawitacji na Wydziale Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Od grudnia 1996 roku do kwietnia 2000 roku był zastępcą redaktora naczelnego *Delty*.

Z pojęciem *środku ciężkości* zapoznałem się na szkolnych lekcjach fizyki. Natomiast z – wypranym z treści fizycznej – pojęciem *środku masy* zetknąłem się po raz pierwszy na wykładzie z matematyki, prowadzonym 34 lata temu przez Pana Andrzeja Mąkowskiego i mającym na celu przygotowanie do egzaminu wstępnego na Uniwersytet Warszawski. Studiowanie fizyki przekonało mnie, że środek masy jest czymś niezmiernie ważnym, a ze środkiem ciężkości ani w czasie studiów, ani podczas lektury fizycznej literatury naukowej chyba się nawet nie zetknąłem.

Zdziwił mnie ostatnio fakt, że obecnie uczniowie dowiadują się o środku masy na lekcjach fizyki (nie we wszystkich szkołach), a o środku ciężkości wyłącznie od matematyków: o „środku ciężkości trójkąta” z podręczników, a o innych „środkach ciężkości” z artykułów naszego Redaktora Naczelnego. Po co, pisząc o jednym – jak się wydaje – pojęciu, używać dwóch różnych określeń? A może pojęcia te czymś się różnią? Jeśli tak, to użycie którego z nich jest właściwsze?

Określimy te pojęcia, zaczynając od środka masy. Umieścimy w punktach zaznaczonych wektorami wodzącymi  $\mathbf{r}_k$  masy  $m_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Ważoną masami miarą odległości tego układu cząstek (a jeśli ktoś woli, to punktów materialnych) od punktu zaznaczonego wektorem wodzącym  $\mathbf{r}$  jest

$$f(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n m_k (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k)^2.$$

Środek masy tego układu cząstek definiujemy jako punkt, w którym funkcja  $f$  osiąga minimum. Jeśli przez  $\mathbf{R}$  oznaczymy promień wodzący tego punktu, to warunek znikania pochodnej funkcji  $f$  względem  $\mathbf{r}$  daje

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^n m_k \mathbf{r}_k / M,$$

przy czym  $M = \sum_{k=1}^n m_k$  jest *całkowitą masą układu*. Żądanie, aby  $m_k > 0$  dla każdego  $k$ , jest w przypadku tej funkcji warunkiem dostatecznym na (ostre) minimum. (Nieco słabszy warunek „dla każdego  $k$  zachodzi  $m_k \geq 0$  oraz istnieje  $k$ , dla którego  $m_k > 0$ ” jest nie tylko dostateczny, ale i konieczny.) Nie będę zagłębiał się w to, że środek masy izolowanego układu fizycznego porusza się ruchem prostoliniowym i jednostajnym, ani w to, iż fakt ten poprzez twierdzenie Noether wiąże się z niezmienniczością lagranżjanu (patrz: *Delta* 5/1998) względem przekształceń Galileusza, ani w wiele innych ciekawych faktów związanych z pojęciem środka masy.

Przejdźmy do środka ciężkości. Nazwa ta sugeruje, że jest to pojęcie związane z układem sił grawitacyjnych. Niektórzy adepci fizyki są skłonni przypuszczać, że pojęcie środka dotyczy dowolnego układu sił. W *Delcie* podczas niedawnej dyskusji nad zadaniem na temat siły Coriolisa jeden z jej uczestników zauważył, że oprócz tej siły mogą pojawić się siły oporu i – o ile ich środek nie będzie pokrywał się ze środkiem masy – doprowadzą one do obrotu rozważanego w zadaniu ciała. Miał rację w tym względzie, że siły oporu mogą doprowadzić (łącznie z siłami Coriolisa) do obrotu, ale i nie miał racji, bo siły oporu ani siły Coriolisa na ogół nie mają środka. Tak czy inaczej środek układu sił  $\mathbf{F}_k$ ,  $k = 1, \dots, n$ , działających na układ  $n$  cząstek, wiąże się z obrotem układu cząstek jako całości, a o tym decyduje *całkowity moment sił względem punktu O* (początku układu kartezjańskiego):

$$\mathbf{M}_O = \sum_{k=1}^n \mathbf{r}_k \times \mathbf{F}_k.$$

Gdy przesuwamy początek układu kartezjańskiego do punktu  $O'$ , takiego, że  $\overrightarrow{OO'} = \mathbf{r}$ , to wtedy  $\mathbf{r}_k \mapsto \mathbf{r}_k - \mathbf{r}$ , a całkowity moment sił przekształca się następująco:

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{F},$$

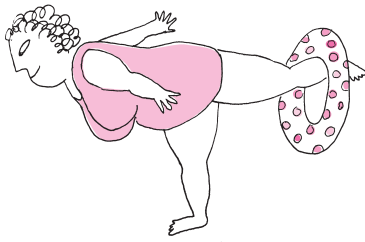
OGÓLNOPOLSKA Matematyczna KONFERENCJA STUDENTÓW

OMatKo!!!

Serdecznie zapraszamy na tegoroczną IX edycję Ogólnopolskiej Matematycznej Konferencji Studentów OMatKo!!! Jest ona skierowana do wszystkich studentów zainteresowanych matematyką. Każdy znajdzie coś dla siebie, od czystej teorii po szeroki wachlarz zastosowań.

OMatKo!!! jest jedną z największych studenckich konferencji w Polsce. To idealna okazja, by podzielić się swoją wiedzą z innymi, nawiązać nowe znajomości i wspólnie poszerzać horyzonty. Każdy student może zgłosić referat lub plakat i pochwalić się tym, co urzekło go w teoretycznej czy praktycznej stronie Królowej Nauk. Do prezentacji zapraszamy też koła naukowe.

W tym roku spotkamy się w murach Politechniki Wrocławskiej w dniach 26–27 listopada. Formularz zapisowy można będzie odnaleźć pod koniec października na stronie konferencji: <http://im.pwr.edu.pl/~omatko/>



przy czym  $\mathbf{F} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k$  jest *całkowitą siłą* działającą na układ cząstek. Jeśli  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , to całkowity moment sił nie zależy od punktu, względem którego go obliczamy. Jeśli zaś  $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ , to całkowity moment sił nie zmienia się, gdy punkt, względem którego go obliczamy, pozostaje na prostej równoległej do  $\mathbf{F}$ ; mamy więc prawo powiedzieć, że moment sił obliczamy względem takiej prostej. Ponadto obowiązuje

**Twierdzenie (słuszne, gdy  $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ ).** *Następujące warunki są równoważne:*

1. *Istnieje taki wybór prostej, względem której obliczamy całkowity moment sił, że ten ostatni znika.*
2. *Całkowity moment sił, obliczony względem dowolnego punktu, jest prostopadły do całkowitej siły.*

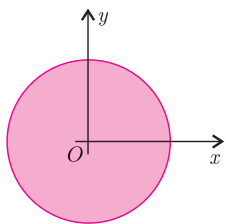
*Dowód:* Przy ustalonych  $\mathbf{M}_O$  i  $\mathbf{F}$  równanie

$$\mathbf{M}_O - \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

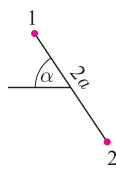
da się rozwiązać względem  $\mathbf{r}$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\mathbf{M}_O \perp \mathbf{F}$ . ■

Wystąpienie sytuacji opisanej w Twierdzeniu zdarza się rzadko. Może ona zaistnieć, gdy wszystkie siły  $\mathbf{F}_k$  mają jednakowy kierunek – a więc w szczególności gdy mamy do czynienia z jednorodnym polem grawitacyjnym lub elektrycznym. Ale w przypadku jednorodnego pola elektrycznego sytuacja ta nie wystąpi, gdy całkowity ładunek układu cząstek wynosi zero. Tylko w przypadku jednorodnego pola grawitacyjnego – ze względu na dodatniość masy – sytuacja taka wystąpi zawsze. Można więc mówić o *prostej, wzdłuż której na układ cząstek działa siła grawitacji*. Wraz ze zmianą położenia cząstek prosta ta będzie się zmieniać względem zewnętrznego układu odniesienia, zachowując przy tym swój kierunek. Jeśli możemy związać z układem cząstek układ odniesienia, w którym cząstki te spoczywają (a więc gdy cząstki te tworzą ciało sztywne), to względem tego układu odniesienia powyższa prosta będzie się wprawdzie zmieniać, ale wszystkie tak otrzymane proste przetną się w jednym punkcie ciała sztywnego. O punkcie tym obrazowo mówi się, że jest *punktem przyłożenia siły ciężkości*, albo krócej, iż jest *środkiem ciężkości*. Zauważmy jeszcze, że pojęcie środka ciężkości można wprowadzić nie tylko dla ciała sztywnego *sensu stricto*, lecz także dla rotatora, tj. dla układu co najmniej dwóch cząstek, których wzajemne odległości pozostają niezmiennie i które leżą na jednej prostej. Środek ciężkości rotatora też znajdzie się na tej prostej.

Odradzałbym nauczycielom obszernie omawianie pojęcia środka ciężkości na lekcjach fizyki, gdyż brak na to czasu. Odradzałbym też krótkie wytłumaczenie, że jest to punkt przyłożenia siły ciężkości, gdyż to skądinąd poprawne określenie sugeruje, iż istnieje jakiś punkt przyłożenia dowolnego układu sił. Użycie określenia „środek ciężkości” bez jakiegokolwiek wytłumaczenia też jest ryzykowne, gdyż pozwala domniemywać, że określenie to stosuje się do dowolnego, a nie tylko jednorodnego, pola grawitacyjnego. A to nie jest prawdą.



Dwupunktowy rotator w ziemskim polu grawitacyjnym

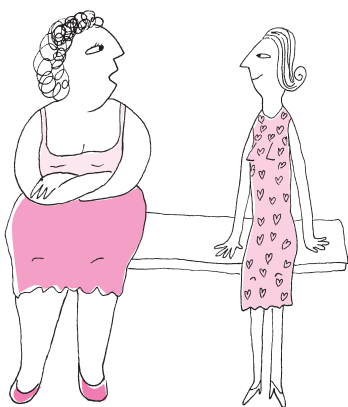


2 Rozważmy bowiem rotator, składający się z dwóch cząstek o jednakowych masach  $m$ , oddalonych o  $2a$ . Umieścimy ten rotator w ziemskim polu grawitacyjnym (które w rozsądnym przybliżeniu uznamy za sferycznie symetryczne), tak że jego środek geometryczny znajduje się w odległości  $r$  od środka Ziemi  $O$ , a jego oś nachylona jest pod kątem  $\alpha$  do prostej łączącej oba środki geometryczne (patrz rysunek). Ponieważ w polu sferycznie symetrycznym mamy  $\mathbf{F}_k \parallel \mathbf{r}_k$ , więc całkowity moment sił działających na rotator, obliczony względem środka Ziemi, znika:  $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$ .

Mimo że nie mamy tu do czynienia z polem jednorodnym, istnieje jednak prosta, wzdłuż której działa na rotator siła grawitacyjna: jest ona skierowana równoległe do całkowitej siły działającej na rotator i przechodzi przez środek Ziemi. Chcąc obliczyć całkowitą siłę działającą na rotator,  $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ , obliczmy najpierw siły  $\mathbf{F}_1$  i  $\mathbf{F}_2$ , działające na jego cząstki. Jeśli przez  $r_0$  oznaczymy promień Ziemi, przez  $g$  zaś przyspieszenie grawitacyjne na jej powierzchni i założymy, że rotator nie wnika w Ziemię, to

$$\mathbf{F}_1 = -mgr_0^2 \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|^3} = -mgr_0^2 \frac{(r - a \cos \alpha, a \sin \alpha)}{(r^2 - 2ar \cos \alpha + a^2)^{3/2}}$$





i analogicznie

$$\mathbf{F}_2 = -mgr_0^2 \frac{(r + a \cos \alpha, -a \sin \alpha)}{(r^2 + 2ar \cos \alpha + a^2)^{3/2}}.$$

Łatwo zauważyć, że gdy  $\alpha \neq 0$  i  $\alpha \neq \pi/2$ , to wtedy składowa  $y$  siły  $\mathbf{F}$  jest różna od zera. A to znaczy, że prosta, wzdłuż której na rotator działa siła grawitacyjna, nie przechodzi na ogół przez jego geometryczny środek. Rotator w ziemskim polu grawitacyjnym nie ma środka ciężkości. Nie ma też środka ciężkości ocean ziemski w polu grawitacyjnym Ziemi i Księżyca. Czy gdyby go miał, możliwe byłyby pływy?

Czy istnieją pole grawitacyjne i ciało sztywne, które umieszczone w tym polu ma środek ciężkości, lecz środek ten nie pokrywa się ze środkiem masy? Na to pytanie nie umiem znaleźć zadowalającej odpowiedzi, skłonny jestem jednak sądzić, że jest ona pozytywna.

Matematyk, pisząc lub mówiąc o środku ciężkości, nie tłumaczy, czym on jest. On go definiuje, a następnie używa. Może to dobrze, że prowokuje ucznia do zadania pytania: – A jaki jest związek tego środka z ciężarem? Źle będzie dopiero wtedy, gdy to pytanie padnie, a matematyk nie będzie umiał na nie odpowiedzieć, nawet odwołując się do lekcji fizyki. Dlatego radzę, by w szkole słowo „środek” – jeśli zostanie użyte – zamiast „ciężkości” towarzyszyło zawsze słowo „masy”.

### Przykłady:

**1.** Umieścimy dwupunktowy rotator, opisany w niniejszym artykule, w cylindrycznie symetrycznym polu grawitacyjnym. (Abstrahujemy od jego niefizyczności.) Czy zawsze będzie dla niego istnieć prosta, wzdłuż której działa siła grawitacji?

Nie. Umieścimy cząstki rotatora w równej odległości od osi cylindra i po przeciwnych jego stronach, choć niekoniecznie na równej „wysokości”. W takiej sytuacji całkowita siła, działająca na rotator, wynosi zero. (W analogicznej sytuacji w polu sferycznie symetrycznym, ponieważ całkowity moment sił znika, ciągle możemy mówić o tym, że siła grawitacji działa wzdłuż prostej – choć nie umiemy przypisać jej zwrotu.) Jeśli cząstki rotatora są istotnie na różnej „wysokości”, to całkowity moment sił nie będzie zniknął. Proponuję opisać wzorami całkowitą siłę i całkowity moment sił przy dowolnym położeniu rotatora.

**2.** Jeśli do uproszczonej, sferycznie symetrycznej, ziemskiej siły grawitacyjnej dodać siłę odśrodkową – wywołaną obrotem Ziemi wokół jej osi – to otrzyma się efektywną siłę grawitacyjną, lepiej (choć niedoskonale) opisującą ziemskie pole grawitacyjne. Czy w takim modelowym polu będzie zawsze istnieć prosta, wzdłuż której na dwupunktowy rotator działa siła grawitacji?

Nie, bo sytuacja ta jest mieszaniną sytuacji opisanej w artykule i w przykładzie 1. Opisanie jej wzorami pomoże przekonać niedowiarków.

## Szkice rozwiązań zadań z artykułu *Poznajmy topologię przez dotyk*

**Zadanie 1.** Jeśli  $X$  rozkłada się na sumę  $A \cup B$  jak w definicji niespójności, to funkcja równa 0 na  $A$  i 1 na  $B$  okazuje się ciągłą. I odwrotnie, jeśli obie te wartości są przyjmowane, to ich przeciwobrazy zadają odpowiedni rozkład.

**Zadanie 2.** Odległości te są łatwo porównywalne:  $d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq 2 \cdot d_\infty$  (dla dowolnej pary punktów  $p, q$ ). Oznacza to na przykład, że jeśli szukamy punktu  $q \in A$  spełniającego  $d_1(p, q) < \frac{1}{n}$ , to wystarczy spełnić warunek  $d_\infty(p, q) < \frac{1}{2n}$ .

**Zadanie 3.** Pomińmy (jako nieco rutynowe) sprawdzenie, że  $s$  jest bijekcją oraz warunek z definicji homeomorfizmu jest spełniony dla wszystkich par punktów  $(x, s(x))$  poza  $((0, 1), \infty)$ . Dla tych dwóch punktów zauważmy natomiast, że  $(0, 1)$  dotyka zbioru  $A \subseteq \mathbb{S}$  (niezawierającego  $(0, 1)$ ) dokładnie wtedy, gdy  $s(A)$  jest nieograniczonym podzbiorem  $\mathbb{R}$ , czyli wtedy, gdy  $\infty$  dotyka  $s(A)$ . Jeśli zbiór  $A \subseteq \mathbb{S}$  zawiera  $(0, 1)$ , taka równoważność wynika wprost z (D2).

**Zadanie 4.** Jednoznaczność jest jasna, bo każdy element  $X/\sim$  jest postaci  $[x]$  dla pewnego  $x \in X$ . Jednocześnie podany warunek jest niesprzeczny, bo jeśli jakaś klasa abstrakcji jest jednocześnie równa  $[x]$  i  $[y]$ , to  $x \sim y$ , a więc  $f(x) = f(y)$ . To gwarantuje istnienie funkcji. Żeby sprawdzić ciągłość, założmy, że punkt  $\tilde{x} \in X/\sim$  dotyka zbioru  $\tilde{A} \subseteq X/\sim$ . Zgodnie z definicją topologii ilorazowej możemy założyć, że  $\tilde{x} = [x]$  oraz  $\tilde{A} = q(A)$  dla pewnych  $x \in X$  i  $A \subseteq X$ , a ponadto  $x$  dotyka  $A$ . Z ciągłości  $f$  wnioskujemy wtedy, że  $f(x)$  dotyka  $f(A)$ , czyli że  $\tilde{f}(\tilde{x})$  dotyka  $\tilde{f}(\tilde{A})$ .

**Zadanie 5.** Założmy aksjomat (C0) i podstawmy w nim kolejne różne wybory  $A$  i  $B$ :

- $A := \emptyset, B := \emptyset$  daje (C1) i w konsekwencji  $A \cup \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ ;
- $A := \emptyset$  daje (C4') i w konsekwencji  $A \cup \overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ ;
- $B := \emptyset$  daje (C2) i w konsekwencji (C3).

Wynikanie (C0) z zestawu (C1,2,3,4') jest bezpośrednie.

Tytuł jest ukraińską wersją powiedzenia znanego po polsku jako „śpiesz się powoli” (dla Czytelnika Bukwoujemnego tłumaczenie dosłowne brzmi „spokojniej jedziesz, dalej dojedziesz”). Motywacją do rozważań jest myśl, że obecne czasy skłaniają, a być może wręcz zmuszają do zastanowienia się, jak i czy aby w optymalny sposób korzystamy z dostępnej nam technologii. Szczegółowo, chodzi o koszt energii napędzającej transport: statki, samoloty oraz samochody. Obecnie najczęściej korzysta się ze spalania paliw kopalnych, co dodatkowo dokłada się do pogłębiania kryzysu klimatycznego. Optymalizacja środków transportu jest więc kluczowa.

Liczba Reynoldsa została wprowadzona przez George'a Stokesa w 1851 roku, a nazwana na cześć Osborne'a Reynoldsa, który spopularyzował jej użycie w drugiej połowie XIX wieku, przez Arnolda Sommerfelda.

Przepływ laminarny charakteryzuje się tym, że jego elementy poruszają się po gładkich trajektoriach w warstwach, przy czym każda warstwa porusza się względem warstwy sąsiedniej z zaniedbywalnym mieszaniem.

Przepływ Stokesa jest zdefiniowany dla małych Re, gdy adwekcyjne siły bezwładności są małe w porównaniu z siłami lepkości.

Rzeczywista redukcja zużycia energii zależy oczywiście od szczegółów konstrukcji pojazdu; tu pokazujemy jedynie kierunek zależności.

Jednym z głównych problemów są oczywiście straty, czyli różnego rodzaju siły „przeszkadzające” w przemieszczeniu się z punktu A do punktu B. W dynamice płynów opór ośrodka (powietrza, wody) jest siłą działającą przeciwnie do ruchu względnego obiektu poruszającego się względem otaczającego go płynu. Występuje on między warstwami płynu lub między płynem a powierzchnią poruszającego się obiektu (naszego środka transportu). W przeciwieństwie do innych sił oporu, takich jak tarcie, które często jest praktycznie niezależne od prędkości ruchu względnego ciał, siła oporu zależy od prędkości: jest proporcjonalna do prędkości dla przepływu z małą prędkością,

i do kwadratu prędkości dla przepływu z dużą prędkością. Różnica między reżimem małej i dużej prędkości zależy nie tylko od prędkości, ale też od właściwości płynu, i jest określana przez pojęcie *liczby Reynoldsa* Re, która jest zdefiniowana jako

$$Re = vL/\nu = \rho vL/\mu,$$

gdzie  $v$  to prędkość płynu,  $L$  to charakterystyczny rozmiar obiektu,  $\nu = \mu/\rho$  to lepkość kinematyczna,  $\rho$  oznaczającą gęstość, a  $\mu$  lepkość dynamiczną. Przy niskich liczbach Reynoldsa ruch płynu jest zwykle zdominowany przez przepływ *laminarny*, podczas gdy przy wartościach dużych przepływy mają tendencję do *turbulencji*. Dokładna wartość krytyczna jest trudna do określenia, ale dla  $Re \gg 10$  przepływ przestaje być laminarny. Przykładowo, sferyczny człowiek o charakterystycznym rozmiarze  $L \approx 1$  m, płynący w wodzie o gęstości  $\rho \approx 1000$  kg/m<sup>3</sup> i dynamicznej lepkości  $\mu = 0,001$  Pa·s [kg/(m·s)] (wartość dla temperatury 20° C) z prędkością  $v \approx 1$  m/s, znajduje się w środowisku turbulentnym, ponieważ Re z łatwością osiąga wartość 10<sup>6</sup>. Gdyby przyszło mu do głowy pływanie np. w miodzie, sytuacja byłaby laminarna, ponieważ lepkość miodu jest  $\sim 10^5$  razy większa niż wody, co oznacza  $Re \approx 10$ .

Siła oporu  $F$  zależy od właściwości płynu oraz od wielkości, kształtu i prędkości obiektu:

$$F \propto \rho v^2 L^2 \times C(Re),$$

gdzie  $L^2$  reprezentuje pole przekroju poprzecznego, a  $C$  oznacza współczynnik oporu, który jest funkcją Re. Dla małych Re,  $C \propto Re^{-1}$ , co oznacza, że  $F \propto v$ . Relację tę dla wolno poruszających się kulistych obiektów zdefiniował wspomniany wcześniej Stokes:  $F = 6\pi v \mu L$ . Wynik jest specjalnym przypadkiem rozwiązania równania Naviera–Stokesa (twórcą równań był, wraz z George'em Stokesem, Claude-Louis Navier).

Przy wysokich wartościach Re, czyli najczęściej w praktycznych zastosowaniach,  $C$  jest mniej więcej stałe, a więc siła oporu zależy od kwadratu prędkości,  $F \propto v^2$ . Ponieważ moc  $P$  potrzebna do pokonania siły oporu jest iloczynem siły  $F$  i prędkości  $v$  ( $P = Fv$ ), moc jest proporcjonalna do kwadratu prędkości przy małych Re i do sześciastu prędkości przy dużych Re.

Jaki z tego praktyczny wniosek? Szacunkowo transport drogowy odpowiada za około 20% emisji gazów cieplarnianych. W Polsce limit prędkości na autostradzie wynosi 140 km/h. Proponowane przez niektórych polityków ograniczenie prędkości do 120 km/h, czyli zmniejszenie jej o 20 km/h, oznacza obniżenie wymaganej mocy o  $(120/140)^3 \approx 0,63$ , czyli o prawie 40%, co naturalnie przekłada się na redukcję zużycia energii. Ponieważ jednak zużycie energii jest proporcjonalne do czasu podróży:  $E = Pt$ , a czas podróży  $t$  jest odwrotnie proporcjonalny do prędkości, to zużycie energii maleje o czynnik  $(120/140)^2$ .

Warto więc rozważyć *zdjęcie nogi z gazu* jednocześnie zapewniające oszczędności przy rosnących kosztach paliwa oraz przywracające równowagę klimatyczną planety, nie wspominając o oczywistym, czyli ograniczeniu finansowania wojny prowadzonej przez wschodnią dyktaturę.

# Klasy permutacji II: twierdzenie Marcusa–Tardosa

Wojciech PRZYBYSZEWSKI\*

\*Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Czytelnik mający doświadczenie z algorytmiką na pewno ma świadomość, że dla pewnych problemów grafowych dużo łatwiej jest znaleźć efektywny algorytm, jeśli nie będziemy oczekiwać, że będzie działać dla wszystkich grafów, a jedynie dla takich, które mają określoną własność (np. tylko dla drzew). W niektórych dziedzinach informatyki popularne jest dowodzenie, że pewne problemy algorytmiczne mają efektywne rozwiązanie na klasach grafów o pewnych małych miarach. Przykładem takiej miary jest szerokość drzewiasta (*ang. treewidth*), która intuicyjnie określa, jak bardzo dany graf przypomina drzewo. Innym przykładem jest zdefiniowana dwa lata temu szerokość bliźniacza (*ang. twin-width*), która bardzo szybko zdobyła dużą popularność ze względu na swoje dobre własności algorytmiczne i kombinatoryczne. Sformułowane w poprzedniej części artykułu twierdzenie Marcusa–Tardosa okazuje się bardzo użytecznym narzędziem, które zostało użyte w dowodach wielu własności grafów o ograniczonej szerokości bliźniaczej.

Twierdzenie Marcusa–Tardosa, moim zdaniem, jest ciekawe nie tylko ze względu na swoją interesującą kombinatoryczną naturę, ale także ze względu na swoją historię. Postawiona przez Stanleya i Wilfa hipoteza dopiero po kilkunastu latach doczekała się dowodu, który okazał się bardzo elegancki i korzystał tylko z elementarnych narzędzi. Ponadto, jak zaraz zobaczymy, zmieści się w jednym artykule *Delty*. Płynię stąd morał, że czasem nie warto zrażać się tym, że jakiś problem powszechnie uznawany jest za trudny – może wystarczy spojrzeć na niego od nieco innej strony, znaleźć jeden nowy pomysł, aby udało nam się rozwiązać coś, nad czym głowiło się bezskutecznie wielu matematyków.

Przypomnijmy teraz najważniejsze definicje i oznaczenia z poprzedniej części artykułu. Rozważamy permutacje zbioru  $n$ -elementowego, czyli funkcje  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , które są bijekcjami. Dla ustalonego  $n$  zbiór wszystkich takich funkcji oznaczamy przez  $S_n$ . Jednym ze sposobów reprezentowania permutacji jest wypisanie jej wartości na kolejnych elementach. Permutację  $\sigma \in S_4$  taką, że  $\sigma(1) = 2$ ,  $\sigma(2) = 4$ ,  $\sigma(3) = 3$  i  $\sigma(4) = 1$ , zapisujemy jako 2431. Zdefiniowaliśmy też relację  $\preceq$  zawierania się jednej permutacji w drugiej.

**Definicja 1.** Niech  $k \leq n$  będą dwoma dodatnimi liczbami całkowitymi i niech  $\sigma \in S_k$  i  $\tau \in S_n$  będą dwoma permutacjami. Jeśli istnieją takie  $1 \leq x_1 < \dots < x_k \leq n$ , że dla każdego  $1 \leq i < j \leq k$  warunek  $\sigma(i) < \sigma(j)$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek  $\tau(x_i) < \tau(x_j)$ , to powiemy, że  $\tau$  zawiera  $\sigma$ , co zapiszemy  $\sigma \preceq \tau$ .

Zdefiniowaliśmy też pojęcie klasy permutacji.

**Definicja 2.** Niech  $C$  będzie dowolnym zbiorem permutacji. Powiemy, że  $C$  jest klasą permutacji, jeśli dla każdego  $\sigma \in C$  i każdego  $\tau \preceq \sigma$  mamy  $\tau \in C$ .

Dla ustalonej permutacji  $\tau$  przez  $Av_n(\tau)$  definiujemy zbiór tych wszystkich permutacji z  $S_n$ , które nie zawierają  $\tau$ . Formalnie  $Av_n(\tau) = \{\sigma \in S_n : \tau \not\preceq \sigma\}$ . Przez  $Av(\tau)$  oznaczamy sumę  $Av_n(\tau)$  po wszystkich  $n$ , tj.  $Av(\tau) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Av_n(\tau)$ . Nietrudno zobaczyć, że dla dowolnego  $\tau$  zbiór  $Av(\tau)$  jest właśnie klasą permutacji.

Poprzedni artykuł zakończyliśmy sformulowaniem hipotezy Stanleya–Wilfa, która była otwarta przez kilkanaście lat, aż w końcu została udowodniona przez Adama Marcusa i Gáborą Tardosa. Od tej pory nazywa się ją właśnie twierdzeniem Marcusa–Tardosa.

**Twierdzenie 1** (Hipoteza Stanleya–Wilfa vel twierdzenie Marcusa–Tardosa). Dla dowolnej permutacji  $\sigma \in S_k$  istnieje stała  $K$  zależna tylko od  $\sigma$  taka, że dla każdego  $n$  zachodzi  $|Av_n(\sigma)| \leq K^n$ .

Ten artykuł poświęcimy dowodowi twierdzenia 1. Nim jednak przejdziemy do właściwego dowodu, opiszemy jeszcze jeden sposób reprezentowania permutacji.

## Macierze permutacji i hipoteza Fürediego–Hajnalá

Dla permutacji  $\sigma \in S_n$  możemy rozważyć zero-jedynkową macierz wymiaru  $n \times n$  taką, że na przecięciu  $k$ -tego wiersza i  $l$ -tej kolumny mamy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sigma(k) = l$ . Dla przykładu, rozważaną wcześniej permutację  $\sigma \in S_4$  taką, że  $\sigma(1) = 2$ ,  $\sigma(2) = 4$ ,  $\sigma(3) = 3$  i  $\sigma(4) = 1$ , reprezentujemy macierzą:

$$P(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oznaczając przez  $M[i, j]$  element macierzy  $M$  w  $i$ -tym wierszu i  $j$ -tej kolumnie, możemy napisać:

$$P(\sigma)[k, l] = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \sigma(k) = l, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Podmacierz macierzy  $A$  rozmiaru  $k \times l$  to dowolna macierz  $D$ , którą możemy uzyskać z  $A$ , wykreślając z niej część wierszy i kolumn, aż macierz, która zostanie, będzie miała rozmiar właśnie  $k \times l$ . Powiemy też, że macierz zero-jedynkowa  $A$  zawiera inną macierz zero-jedynkową  $B$  rozmiaru  $k \times l$ , jeśli istnieje taka podmacierz  $D$  rozmiaru  $k \times l$  macierzy  $A$ , że zawsze gdy  $B[i, j] = 1$ , to także  $D[i, j] = 1$ . W przeciwnym razie powiemy, że  $A$  unika  $B$ . Nie wymagamy w tej definicji równości macierzy  $B$  i  $D$  – chcemy tylko, żeby podmacierz  $D$  miała jedynki przynajmniej tam, gdzie ma je  $B$ . Dla przykładu macierz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zawiera macierz

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ponieważ po wykreśleniu z  $M$  drugiego wiersza i czwartej kolumny dostaniemy macierz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i dla każdych  $1 \leq i, j \leq 3$  zawsze gdy  $N[i, j] = 1$ , mamy także  $D[i, j] = 1$ . Czytelnik może sprawdzić, że macierz, która powstaje z wykreślenia z  $M$  drugiej kolumny i czwartego wiersza, również pokazuje, że  $M$  zawiera  $N$ .

W 1992 roku Zoltán Füredi i Péter Hajnal sformułowali następującą hipotezę, związaną z macierzami zero-jedynkowymi.

**Hipoteza 1.** *Dla każdej permutacji  $\sigma \in S_k$  istnieje taka stała  $c_\sigma$ , że każda zero-jedynkowa macierz  $M$  rozmiaru  $n \times n$ , która ma przynajmniej  $n \cdot c_\sigma$  jedynek, zawiera  $P(\sigma)$ .*

Okazało się, co w 2000 roku wykazał Martin Klazar, że prawdziwość hipotezy 1 implikuje prawdziwość twierdzenia 1. Wystarczyło więc, że Marcus i Tardos udowodnili tylko hipotezę 1. Zarówno w dowodzie Klazara, jak i w dowodzie Marcusa–Tardosa rozpatrywano pewne macierze powstałe z podziału wierszy i kolumn oryginalnej macierzy. Nim przejdziemy do dowodów twierdzeń Klazara i Marcusa–Tardosa, zapoznamy się z tym narzędziem.

### Macierze podziału

Rozważmy zero-jedynkową macierz wymiaru  $n \times n$ . Możemy jej wiersze (i kolumny) podzielić w jakiś sposób na  $k$  grup, z których każda składa się z kolejnych wierszy (bądź kolumn). Na przykład wiersze i kolumny poniższej macierzy  $A$  podzieliśmy na trzy grupy:

$$A = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right].$$

Ten podział daje nam pewną macierz podziału  $B$  – mianowicie dla każdego bloku (przecięcia grupy kolumn z grupą wierszy) powyżej macierz  $B$  ma jedynekę, jeśli choć jeden z elementów danego bloku zawiera jedynekę. Dla tak podzielonego  $A$  odpowiednio  $B$  wygląda następująco:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kluczową obserwacją jest poniższy lemat.

**Lemat 1.** *Niech  $A$  będzie zero-jedynkową macierzą wymiaru  $n \times n$ ,  $B$  zaś będzie jakąś macierzą podziału  $A$ . Jeśli  $A$  unika pewnej macierzy permutacji  $P$  wymiaru  $k \times k$ , to  $B$  również unika  $P$ .*

*Szkic dowodu.* Załóżmy nie wprost, że  $B$  nie unika  $P$ . W takim razie w  $B$  możemy wskazać  $k$  jedynek, które reprezentują  $P$ . Te jedyнки są w  $B$ , ponieważ odpowiednie bloki macierzy  $A$  zawierają co najmniej jedną jedynekę. Tak więc dla każdej wskazanej jedyнки w macierzy  $B$  możemy wybrać jakąś jedynekę w macierzy  $A$  w taki sposób, że te wybrane jedyнки w  $A$  pokazują, że  $A$  zawiera  $P$ . Ta sprzeczność kończy dowód.  $\square$

Lemat 1 jest bardzo użytecznym narzędziem, ponieważ pozwala nam stosować podejście indukcyjne. Jeśli pracujemy z macierzą unikającą jakiejś  $P(\sigma)$  dla ustalonej permutacji  $\sigma$ , to tę samą własność ma jej każda macierz podziału. Jeśli weźmiemy macierz podziału odpowiednio mniejszego wymiaru, być może będziemy w stanie z założenia indukcyjnego o jej własnościach udowodnić tezę dla oryginalnej macierzy. Tak właśnie postępowali zarówno Klazar, jak i Marcus z Tardosem. W końcu możemy przejść do dowodów ich twierdzeń.

### Twierdzenie Klazara

Zacniemy od udowodnienia twierdzenia Klazara, czyli wykażemy, że prawdziwość Hipotezy 1 implikuje prawdziwość twierdzenia 1.

**Twierdzenie 2** (Twierdzenie Klazara). *Niech  $\sigma \in S_k$  będzie permutacją, dla której istnieje taka stała  $c_\sigma$ , że każda zero-jedynkowa macierz wymiaru  $n \times n$ , która zawiera przynajmniej  $c_\sigma n$  jedynek, zawiera macierz  $P(\sigma)$ . Wtedy istnieje taka stała  $K_\sigma$ , że dla każdego  $n$  zachodzi  $|Av_n(\sigma)| \leq K_\sigma^n$ .*

*Dowód.* Oznaczmy przez  $T_n(\sigma)$  zbiór wszystkich macierzy zero-jedynkowych wymiaru  $n \times n$ , które nie zawierają  $P(\sigma)$ . Oczywiście  $|T_n(\sigma)| \geq |Av_n(\sigma)|$  (bo każda macierz permutacji z  $Av_n(\sigma)$  należy do  $T_n(\sigma)$ ), więc wystarczy znaleźć takie  $K_\sigma$ , że  $|T_n(\sigma)| \leq K_\sigma^n$ .

Weźmy dowolną macierz  $A \in T_{2n}(\sigma)$  i podzielmy zarówno jej wiersze, jak i jej kolumny na  $n$  grup po 2. Dostaniemy w ten sposób macierz podziału  $B$  wymiaru  $n \times n$ . Na mocy lematu 1 mamy  $B \in T_n(\sigma)$ . Istnieje dokładnie 15 zero-jedynkowych macierzy wymiaru  $2 \times 2$ , które zawierają choć jedną jedynekę, więc jeśli  $B$  ma  $w$  jedynek, to w sposób opisany powyżej mogliśmy ją otrzymać z  $15^w$  różnych macierzy  $A$  wymiaru  $2n \times 2n$ . Na mocy założenia wiemy jednak, że  $B$  ma maksymalnie  $c_\sigma n$  jedynek, więc dostajemy  $|T_{2n}(\sigma)| \leq |T_n(\sigma)| \cdot 15^{c_\sigma n}$ . Oznaczając  $15^{c_\sigma} = L_\sigma$ , mamy ostatecznie  $|T_{2n}(\sigma)| \leq |T_n(\sigma)| \cdot L_\sigma^n$ . Podobnie możemy pokazać  $|T_{2n+1}(\sigma)| \leq |T_{n+1}(\sigma)| \cdot L_\sigma^{n+1}$ .

Niech  $K_\sigma = L_\sigma^2$ . Pokażemy przez indukcję, że tak zdefiniowane  $K_\sigma$  spełnia tezę. Oczywiście mamy  $|T_1(\sigma)| \leq 1 \leq K_\sigma^1$ . Załóżmy teraz, że chcemy pokazać tezę dla  $2n$  i  $2n+1$ , wiedząc (na mocy założenia indukcyjnego), że teza jest prawdziwa dla  $n$  i  $n+1$ . Mamy:

$$|T_{2n}(\sigma)| \leq |T_n(\sigma)| \cdot L_\sigma^n \leq K_\sigma^n L_\sigma^n \leq K_\sigma^{2n}$$

oraz

$$|T_{2n+1}(\sigma)| \leq |T_{n+1}(\sigma)| \cdot L_\sigma^{n+1} \leq K_\sigma^{n+1} L_\sigma^{n+1} \leq K_\sigma^{2n+1}.$$

To kończy dowód indukcyjny.  $\square$

## Naiwna próba dowodu hipotezy Fürediego–Hajnalą

Nim podamy poprawny dowód hipotezy 1 przedstawiony przez Marcusa i Tardosa, sami spróbujemy naiwnie zastosować lemat 1. Przez  $f_n(\sigma)$  oznaczmy minimalną liczbę jedynek taką, że każda macierz wymiaru  $n \times n$ , która ma przynajmniej  $f_n(\sigma)$  jedynek, zawiera  $P(\sigma)$ . Mamy nadzieję, że dzięki lematowi 1 uda nam się skonstruować jakieś równanie rekurencyjne na  $f_n(\sigma)$ . Ustalmy więc liczbę całkowitą  $l$  i weźmy macierz  $A$  wymiaru  $n \times n$  dla  $n$  podzielnego przez  $l$ , która nie zawiera  $P(\sigma)$ . Możemy jej wiersze i kolumny podzielić na  $n/l$  grup po  $l$  wierszy i kolumn, a następnie skonstruować macierz podziału  $B$ . Ponieważ  $B$  także nie zawiera  $P(\sigma)$ , to ma co najwyżej  $f_{n/l}(\sigma)$  jedynek. Każda jedynka w  $B$  odpowiada co najwyżej  $l^2$  jedynkom w  $A$ , co daje nam  $f_n(\sigma) \leq f_{n/l}(\sigma) \cdot l^2$ . Czytelnik zaznajomiony z analizą równań rekurencyjnych dostrzeże, że rozwiązanie takiej rekurencji daje nam  $f_n(\sigma) = O(n^2)$ , podczas gdy chcemy pokazać  $f_n(\sigma) = O(n)$ . Wynika stąd, że potrzebujemy jeszcze jakiegoś dodatkowego pomysłu.

### Dowód Marcusa i Tardosa

Teraz przedstawimy poprawny dowód hipotezy 1.

*Dowód.* Ustalmy permutację  $\sigma \in S_k$ . Weźmy dowolną zero-jedynkową macierz  $A$  wymiaru  $n \times n$ , która nie zawiera  $P(\sigma)$ . Załóżmy przy tym, że  $k^2$  dzieli  $n$ . Oznaczmy też przez  $S_{ij}$  podmacierz  $A$  składającą się z wierszy od  $(i-1)k^2 + 1$  do  $ik^2$  oraz kolumn od  $(j-1)k^2 + 1$  do  $jk^2$ . Rozpatrzmy podział wierszy i kolumn macierzy  $A$  na  $n/k^2$  grup, każda rozmiaru  $k^2$ . Zauważmy, że macierz tego podziału  $B$  wymiaru  $n/k^2 \times n/k^2$  spełnia  $B[i, j] = 1$  wtedy i tylko wtedy, gdy podmacierz  $S_{ij}$  zawiera choć jedną jedynkę. Wiemy już, na mocy lematu 1, że  $B$  wyklucza  $P(\sigma)$ .

Powiemy, że blok  $S_{ij}$  jest szeroki (odpowiednio wysoki), kiedy zawiera jedynki w przynajmniej  $k$  różnych kolumnach (odpowiednio wierszach). Niech

$C_j = \{S_{ij} : i = 1, 2, \dots, n/k^2\}$ . Wykażemy, że liczba bloków w  $C_j$ , które są szerokie, to co najwyżej  $k \binom{k^2}{k}$ . Załóżmy nie wprost, że tak nie jest. Z zasady szufladkowej wynika wtedy, że mamy takie  $k$  bloków  $S_{i_1j}, \dots, S_{i_kj}$ , z których wszystkie mają jedynki w pewnych kolumnach  $c_1 < \dots < c_k$ . Dla każdej jedynki w  $r$ -tym wierszu i  $s$ -tej kolumnie macierzy  $P(\sigma)$  możemy wybrać jedynkę w kolumnie  $c_s$  i odpowiednim wierszu z bloku  $S_{i_rj}$ , dostając, że  $A$  zawiera  $P(\sigma)$ . To sprzeczność, która pokazuje, że rzeczywiście w  $C_j$  jest maksymalnie  $k \binom{k^2}{k}$  szerokich bloków.

Oznaczmy także  $R_i = \{S_{ij} : j = 1, \dots, n/k^2\}$ . Analogicznie możemy pokazać, że  $R_i$  zawiera maksymalnie  $k \binom{k^2}{k}$  wysokich bloków.

Podsumowując, dostajemy, że w  $A$  jest maksymalnie  $\frac{n}{k^2} k \binom{k^2}{k}$  bloków szerokich i maksymalnie tyle samo bloków wysokich. Liczbę jedynek w takich blokach szacujemy naiwnie, przez  $k^4$ . Z kolei każdy blok, który nie jest ani wysoki, ani szeroki, ma maksymalnie  $(k-1)^2$  jedynek. Stąd wynika oszacowanie:

$$\begin{aligned} f_n(\sigma) &\leq f_{n/k^2}(\sigma)(k-1)^2 + 2 \frac{n}{k^2} k \binom{k^2}{k} k^4 = \\ &= f_{n/k^2}(\sigma)(k-1)^2 + 2nk^3 \binom{k^2}{k}. \end{aligned}$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla  $n$ , które są podzielne przez  $k^2$ . Jeśli jednak  $k^2$  nie dzieli  $n$ , to weźmy największe  $n' < n$ , które jest podzielne przez  $k^2$ . Możemy łatwo oszacować:

$$\begin{aligned} f_n(\sigma) &\leq f_{n'}(\sigma) + 2k^2 n \leq \\ &\leq f_{n'/k^2}(\sigma)(k-1)^2 + 2 \left( k^3 \binom{k^2}{k} + k^2 \right) n. \end{aligned}$$

Jako ćwiczenie pozostawiamy Czytelnikowi ostatni szlif, czyli wykazanie, że wraz z warunkiem początkowym  $f_1(\sigma) \leq 1$  ta powyższa nierówność daje:

$$f_n(\sigma) \leq 2k^4 \binom{k^2}{k} n. \quad \square$$

## Niebo w październiku

Październik jest trzecim kolejnym miesiącem, w którym Słońce kontynuuje szybką wędrówkę na południe. W tym czasie wysokość jego górowania obniży się o ponad  $10^\circ$ , a w ślad za tym jego czas przebywania nad widnokregiem zmniejszy się do mniej niż 10 godzin. W niedzielę 30 października nastąpi zmiana czasu na zimowy i należy pamiętać o cofnięciu wskazówek zegarów o godzinę.

Ze Słońcem związane jest jedno z ciekawszych wydarzeń astronomicznych października – jego częściowe zaćmienie przez Księżyc. Wydarzenie nastąpi 25 dnia miesiąca, kiedy to Księżyc przejdzie przez nów i częściowo zasłoni Słońce. Maksymalnie Księżyc zakryje 86% średnicy tarczy słonecznej, ale tak głębokie zaćmienie da się dostrzec tylko ze środkowej Syberii. W Polsce zjawisko zacznie się około 11:10 i skończy niewiele ponad dwie

godziny później, z fazą maksymalną mniej więcej o 12:20. Nad naszym krajem Księżyc zasłoni od nieco ponad 45% średnicy tarczy słonecznej w Bogatyni do ponad 56% w Suwałkach.

Zanim dojdzie do zaćmienia Słońca, na początku października dobrze widoczna jest planeta **Merkury**, która 9 dnia miesiąca osiągnie maksymalną elongację zachodnią. Niestety, jak to u nas bywa, oddali się wtedy od Słońca na niewiele ponad  $18^\circ$ . Mimo to planeta pozostanie ozdobą porannego nieba aż do księżycowego nowiu. W dniu maksymalnej elongacji o godzinie 6 rano Merkury wzniesie się na wysokość  $7^\circ$ , świecąc z jasnością  $-0,5^m$  jakieś  $12^\circ$  na godzinie 5 względem Deneboli, drugiej co do jasności gwiazdy Lwa. Przy użyciu teleskopów można próbować dostrzec tarczę planety o średnicy  $7''$  i w fazie 54%. Do końca

okresu widoczności Merkury pojasnieje do  $-1,1^m$ , jego tarcza zmniejszy się do  $5''$ , faza zaś urośnie do 95%. 24 października  $5^\circ$  nad Merkurym pokaże się Księżyc w fazie 2%.

Na niebie wieczornym dobrze widoczne są cztery gazowe olbrzymy Układu Słonecznego oraz planetoida (4) Westa. Najbardziej na zachód swoje pętle po niebie kreślą **Saturn** i **Westa**, wędrujące na tle gwiazdozbioru Koziorożca. W związku z tym zachodzą one najwcześniej z opisywanych ciał krążących wokół Słońca. Saturn 23 października zmieni kierunek ruchu na prosty, to samo na początku miesiąca uczyni Westa. W obu przypadkach oznacza to koniec ich najkorzystniejszego okresu obserwacyjnego w tym roku. Saturn zatrzyma się około  $37'$  od gwiazdy 4. wielkości  $\iota$  Cap. Westa natomiast zakresi łuk o długości prawie  $3^\circ$  około  $9^\circ$  na południowy wschód od Saturna i pod koniec miesiąca przejdzie do sąsiedniego gwiazdozbioru Wodnika. W październiku jasność Saturna spadnie do  $+0,6^m$ , a jego tarcza skurczy się do  $17''$ . Jasność Westy zmniejszy się w tym czasie do poniżej  $+7^m$ . Saturn góruje po godzinie 19, wznosząc się na wysokość ponad  $20^\circ$ . Westa przecina południk lokalny kilkadziesiąt minut później i  $5^\circ$  niżej.

Przez większą część nocy październikowych można obserwować planety **Jowisz** i **Neptun** tuż po opozycji. Największa planeta Układu Słonecznego w październiku przebywa na pograniczu gwiazdozbiorów Ryb i Wieloryba. Góruje po godzinie 22 na wysokości przekraczającej  $35^\circ$ . Do końca miesiąca jasność planety zmniejszy się do  $-2,8^m$ , jej tarcza zaś zmniejszy średnicę do  $50''$ . Planeta Neptun kreśli swoją pętlę  $\sim 8^\circ$  na południowy zachód od Jowisza. Najwyższe położenie nad horyzontem zajmuje pół godziny wcześniej. Neptun świeci z jasnością  $+7,8^m$  i jest widoczny z pomocą lornetek i teleskopów.

Ostatni z gazowych olbrzymów, planeta **Uran**, przebywa na tle gwiazdozbioru Barana, we wschodniej części konstelacji. Uran jest jeszcze przed opozycją, a zatem pojawia się na niebie po zachodzie Słońca, ale można go obserwować przez całą najciemniejszą część nocy. Najlepiej tę planetę obserwować około godziny 1, gdy wznosi się na wysokość ponad  $55^\circ$  ponad południową część nieboskłonu. Blask Urana wynosi  $+5,7^m$ , stąd na ciemnym niebie można próbować dostrzec go gołym okiem. Jednak lepiej do tego celu użyć przynajmniej lornetkę. Do odszukania planety warto wykorzystać gwiazdy  $\zeta$  i  $\delta$  Arietis. Uran znajduje się na łączącej je linii, mniej więcej  $4^\circ$  od drugiej i jaśniejszej z wymienionych gwiazd.

Dobrze widoczną planetą jest szykujący się do grudniowej opozycji **Mars**. Planeta przemierzy kolejne ponad  $5^\circ$  na tle gwiazdozbioru Byka i pod koniec miesiąca przetnie linię łączącą gwiazdy El Nath ( $\beta$  Tau) i  $\zeta$  Tau, czyli gwiazdy stanowiące rogi Byka. W tym samym czasie zmieni również kierunek ruchu na wsteczny, rozpoczynając dwumiesięczny okres najlepszej widoczności około opozycji. Czerwona Planeta góruje

przed godziną 4 na wysokości przekraczającej  $60^\circ$ . W październiku Mars zwiększy średnicę kątową do  $15''$  i jasność do  $-1,2^m$ .

Księżyc przejdzie przez I kwadrę 2 października w gwiazdozbiorze Strzelca, mijając najbardziej na południe wysuniętą część swojej orbity i w kolejnych dniach zacznie wznosić się wyżej. Trzy dni później w fazie zwiększonej do 80% Srebrny Glob przejdzie  $5^\circ$  na południe od Saturna, by 8 października, na dobę przed pełnią, przejść  $3^\circ$  na południe od Jowisza.

W dniach 12–15 października Srebrny Glob odwiedzi gwiazdozbiór Byka, zmniejszając stopniowo fazę od 90% do 76%. Pierwszego z wymienionych dni Księżyc zbliży się na  $5^\circ$  do Plejad, drugiego przejdzie  $7^\circ$  na północ od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka, trzeciego natomiast przetnie linię łączącą Marsa i El Nath.

Naturalny satelita Ziemi osiągnie ostatnią kwadrę 17 października w gwiazdozbiorze Bliźniąt, tworząc trójkąt równoramienny z Kastorem i Polluksem, dwiema najjaśniejszymi gwiazdami konstelacji. Do obu gwiazd zabraknie Księżycowi po około  $6^\circ$ .

Podobnie jak we wrześniu, po ostatniej kwadrze zacznie się najciekawszy okres widoczności Księżyca, który zbliżając się do nowiu, stopniowo zmniejszy fazę, coraz bardziej uwidaczniając tzw. światło popielate. W jesienne poranki ekliptyka tworzy duży kąt z widnokregiem, stąd Księżyc pozostanie dobrze widoczny prawie do samego nowiu.

Tarcza Srebrnego Globu 19 października zmniejszy fazę do 37% i pokaże się  $5^\circ$  od gromady otwartej gwiazd M44 w Raku. Kolejne trzy poranki Księżyc spędzi w gwiazdozbiorze Lwa, zwięzając sierp od 27% do 12%. I tak 20 października Księżyc zbliży się na  $7^\circ$  do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji, a dobę później zakryje gwiazdę 5. wielkości 46 Leonis. Gwiazda pojawi się przy ciemnym brzegu księżycowej tarczy około godziny 2:35, kilka do kilkunastu minut po wschodzie obu ciał niebieskich.

W dniach 22–24 października Księżyc wejdzie już niewiele przed Słońcem, prezentując tarczę w fazie, odpowiednio, 11, 5 i 2%. Pomimo to o świcie zdąży się wzniesić na wysokość 28, 17 i  $6^\circ$ , nadal ciesząc oczy obserwatorów. Księżyc pokaże się 24 października  $9^\circ$  od Deneboli, drugiej co do jasności gwiazdy Lwa, a dwa dni później czeka go wspomniane już spotkanie z Merkurym.

Październik jest miesiącem z kilkoma znanymi rojami meteorów. Na początku miesiąca promieniują Drakonidy, z maksimum aktywności 9 października, oraz Taurydy Południowe. Niestety bliski pełni Księżyc popsuje obserwacje obu rojów. Maksimum aktywności Orionidy osiągną 21 października. Radiant tego roju znajduje się około  $4^\circ$  na zachód od Alheny w Bliźniętach i pojawia się na nieboskłonie przed godziną 22. Tej nocy Księżyc wejdzie dopiero przed godziną 4 i przy fazie 12% nie przeszkodzi zbyt w ich obserwacjach.

*Ariel MAJCHER*

## Prosto z nieba: Idąc przez galaktyczną dolinę śmierci

Mniej więcej połowa galaktyk we współczesnym Wszechświecie, w tym nasza własna Droga Mleczna, aktywnie tworzy gwiazdy. Obserwując te aktywne galaktyki, widzimy mocne, niebieskie światło pochodzące z młodych gwiazd. Druga połowa galaktyk jest już mniej żywotna. W pewnym momencie swojego życia przestały one tworzyć gwiazdy, czyli można powiedzieć, że wygasły. Teraz wypełnione są tylko starymi dogasającymi gwiazdami, przez co zyskały ponurą etykietę galaktyk „czerwonych i martwych”. I tutaj oczywiście powstaje pytanie: jak, kiedy i dlaczego galaktyki wygasają?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, musimy znaleźć galaktyki w stanie przejściowym, pomiędzy „życiem a śmiercią”. Astronomowie romantycznie nazwali je galaktykami zielonej doliny (patrz rys. 1). Przechodząc przez zieloną dolinę, galaktyki tracą swoje niebieskie kolory (pochodzące głównie od młodych gwiazd) i stają się coraz bardziej czerwone. Takich galaktyk o pośrednich barwach obserwuje się stosunkowo mało, dlatego jak dotąd sądzono, że przejście „przez dolinę” następuje szybko (oczywiście w skali życia galaktyk).

Naturalnie chcielibyśmy wiedzieć, od czego zależy tempo umierania galaktyk. Problemem tym zajęli się naukowcy z Uniwersytetu Saint Mary w Kanadzie. Wykorzystali oni do badań stosunkowo rzadką populację galaktyk „zielonej doliny” sprzed 4–8 miliardów lat (o przesunięciu ku czerwieni  $z = 1-2$ ). Wybrali szczególnie bogatą próbkę (bo aż 10 000!) galaktyk obserwowanych w wielu pasmach, od podczerwieni do ultrafioletu, za pomocą Kosmicznego Teleskopu Hubble’a, Kosmicznego Teleskopu Spitzera i wielu teleskopów naziemnych.

Autorzy pracy byli najbardziej zainteresowani oszacowaniem, jak długo trwa proces transformacji galaktyki od niebieskiej i aktywnej do czerwonej i martwej, czyli jak długo trwa przejście przez zieloną dolinę. Aby łatwiej zmierzyć czas przejścia, zdefiniowali oni „dno” zielonej doliny i przekształcili diagram w stosunku do tej linii (rys. 2). W ten sposób uzyskano nowy parametr – odległość do dna zielonej doliny,  $\Delta_{ZD}$ . Ma on jedną podstawową zaletę: jest stosunkowo łatwy do obliczenia i interpretacji.

Oczywiście nie możemy obserwować ewolucji pojedynczej galaktyki przechodzącej przez zieloną dolinę. Możemy jednak mierzyć wiek każdej z takich galaktyk oraz odtworzyć ich wspólną, uśrednioną historię tworzenia gwiazd – czyli współczynnik tempa tworzenia się gwiazd w funkcji czasu od momentu powstania galaktyki aż do momentu obserwacji. Na podstawie tego współczynnika wyróżniono trzy rodzaje galaktyk: szybkie, pośrednie i powolne. Szybkie galaktyki osiągają maksimum tworzenia gwiazd krótko po uformowaniu, galaktyki pośrednie osiągają szczyt po 1 Gyr, a galaktyki powolne formują gwiazdy przez kilka Gyr przed osiągnięciem szczytu.

Na podstawie tych wszystkich pomiarów naukowcy stwierdzili, że o ile galaktyki pośrednie i powolne potrzebują bardzo długiego czasu, żeby przejść przez dolinę (kilka do kilkunastu miliardów lat), to galaktyki szybkie wręcz przez nią biegną – osiągając graniczną wartość dna zielonej doliny w ciągu miliarda lat! I to właśnie te galaktyki, które w przeszłości szybko przeszły przez zieloną dolinę, stanowią zdecydowaną większość martwych galaktyk obserwowanych we współczesnym Wszechświecie.

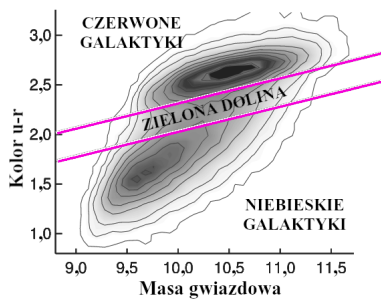
Morał z tej historii? Jeżeli jesteś galaktyką i chcesz cieszyć się długim życiem, twórz gwiazdy powoli i z rozwagą.

Anna DURKALEC

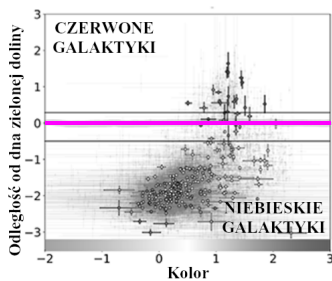
Narodowe Centrum Badań Jądrowych

Artykuł napisany na podstawie pracy Gael Noirot et al., 2022 *Across the Green Valley with HST grisms: colour evolution, crossing time-scales and the growth of the red sequence at  $z=1.0-1.8$*  i artykułu Lizy Sazonovej [*Galaxies sprinting*] through the valley.

Może się zdarzyć, że czerwona galaktyka w wyniku jakiegoś zdarzenia, które nagle spowoduje wznowienie procesów gwiazdotwórczych, przejdzie przez zieloną dolinę w odwrotną stronę, do królestwa galaktyk niebieskich, ale są to przypadki bardzo rzadkie.

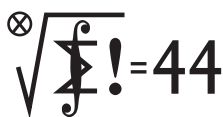


Rys. 1. Diagram kolor-masa gwiazdowa przedstawiający różne typy galaktyk. Kolor tworzy różnicę energii zaobserwowanej w pasmach obserwacyjnych u oraz r. Galaktyki gwiazdotwórcze są niebieskie i znajdują się głównie w lewym dolnym rogu diagramu, natomiast galaktyki martwe i czerwone znajdują się w górnej połowie diagramu. Zielona dolina, zaznaczona liniami, jest obszarem przejściowym, w którym znajduje się stosunkowo niewiele galaktyk. Wykres zaadaptowany z pracy Schawinski et al., 2014.



Rys. 2. Odległość od dna zielonej doliny,  $\Delta_{ZD}$ , jako funkcja koloru. Dno zielonej doliny oznaczone jest linią  $\Delta_{ZD} = 0$  (zielona linia). Wykres zaadaptowany z pracy Noirot et al., 2021.

## Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2022

## Zadania z matematyki nr 847, 848

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**847.** Dana jest funkcja ciągła  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  o następującej własności: dla każdej pary liczb  $a, b$ , gdzie  $a < b$ , istnieją liczby  $u, v$  takie, że  $a \leq u < v \leq b$  oraz  $f(u) \leq f(x) \leq f(v)$  dla  $x \in [a, b]$ . Udowodnić, że funkcja  $f$  jest niemalejąca.

**848.** Niech  $n$  będzie ustaloną liczbą naturalną,  $n \geq 3$ . Niech  $X$  będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych  $(x_1, x_2, \dots)$  o wyrazach  $x_i \in \{1, \dots, n\}$  i niech  $B$  będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych  $(b_1, b_2, \dots)$  o wyrazach  $b_i \in \{0, 1\}$ . Wyjaśnić, czy istnieje różnowartościowe odwzorowanie zbioru  $X$  na cały zbiór  $B$  takie, że (dla każdej liczby naturalnej  $k$ ): jeżeli dwa ciągi  $(x_i), (y_i)$  ze zbioru  $X$  pokrywają się na odcinku początkowym długości  $k$  (tzn.  $x_i = y_i$  dla  $i \leq k$ ), to ich obrazy także pokrywają się na odcinku początkowym długości  $k$ .

Zadanie 848 zaproponował pan Adam Woryna z Rudy Śląskiej.

## Rozwiązania zadań z numeru 6/2022

Przypominamy treść zadań:

**843.** Po krawędziach wypukłego wielościanu pełza żuk. W każdym wierzchołku wielościanu schodzą się trzy krawędzie. Po dojściu do wierzchołka żuk nie zawraca w krawędź, którą przyszedł, lecz wybiera jedną z pozostałych dwóch krawędzi – lewą lub prawą (orientacja: lewo/prawo – tak, jak widać, patrząc z zewnątrz wielościanu). Gdy na jednym rozdrożu żuk wybrał wariant lewy, na następnym wybiera prawy – i na odwrót. Dowieść, że w pewnym momencie żuk wróci do punktu, z którego rozpoczął wędrówkę.

**844.** Wyjaśnić, czy istnieje liczba pierwsza  $p$ , dla której suma

$$1^p + 3^p + \dots + (2p-1)^p$$

jest sześcianem liczby naturalnej.

**843.** Żuk startuje z wierzchołka  $O$ . Niech  $A, B, C$  ( $A \neq O$ ) będzie dowolną trójką kolejno przebytych wierzchołków. Z krawędzi  $AB$  żuk wszedł w krawędź  $BC$ ; wiadomo więc, czy skręcił w lewo, czy w prawo. Zgodnie z przyjętymi regułami daje to informację, czy chwilę wcześniej, w punkcie  $A$ , skręcił w prawo, czy w lewo. Określa to jednoznacznie wierzchołek (na jego trasie) poprzedzający  $A$ . To znaczy, że taka trójka wierzchołków  $A, B, C$  wyznacza trajektorię w przód i w tył. Jest skończenie wiele takich trójek, więc muszą się one powtarzać. Fragment trajektorii między dwoma kolejnymi powtórzeniami pewnej trójki  $A, B, C$  zawiera zatem wszystkie wierzchołki początkowego fragmentu wędrówki (do pierwszego wystąpienia  $A$ ) – w tym wierzchołek  $O$ .

**844.** Odpowiedź: nie istnieje. *Dowód:* oznaczmy rozważaną sumę przez  $S_p$ :

$$S_p = \sum_{k=1}^p (2k-1)^p = \sum_{k=1}^p (2p+1-2k)^p.$$

$S_2 = 10$  nie jest sześcianem. Dalej przyjmujemy, że  $p$  jest nieparzystą liczbą pierwszą. Przekształcamy  $2S_p$  modulo  $p^3$ :

$$\begin{aligned} 2S_p &= \sum_{k=1}^p \left( (2k-1)^p + (2p+1-2k)^p \right) \equiv \\ &\equiv \sum_{k=1}^p \left( (2k-1)^p - \binom{p}{2} (2p)^2 (2k-1)^{p-2} + \binom{p}{1} (2p) (2k-1)^{p-1} - \binom{p}{0} (2k-1)^p \right) = \\ &= \sum_{k=1}^p \left( -p(p-1) \cdot 2p^2 (2k-1)^{p-2} + p \cdot 2p (2k-1)^{p-1} \right). \end{aligned}$$

Dzielimy przez 2 (wolno, wobec nieparzystości  $p$ ) i otrzymujemy

$$S_p \equiv p^3 \cdot A_p + p^2 \cdot B_p \pmod{p^3}$$

dla liczb całkowitych

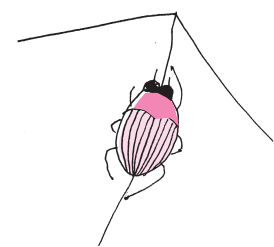
$$A_p = (1-p) \sum_{k=1}^p (2k-1)^{p-2}, \quad B_p = \sum_{k=1}^p (2k-1)^{p-1}.$$

Na mocy małego twierdzenia Fermata  $(2k-1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , gdy  $k \neq (p+1)/2$  ( $1 \leq k \leq p$ ). Stąd  $B_p \equiv p-1 \pmod{p}$ , co pozwala przepisać uzyskane przedstawienie  $S_p$  jako

$$S_p \equiv p^3 A_p + p^2 (p-1) \pmod{p^3}.$$

Suma  $S_p$  dzieli się więc przez  $p$ , ale nie przez  $p^3$ . Wobec tego nie jest sześcianem żadnej liczby całkowitej.

*Uwaga.* Witold Bednarek, autor zadania (i podanego rozwiązania), zauważa, że  $S_p$  nie jest potęgą żadnej liczby naturalnej o wykładniku naturalnym większym od 2 (to samo rozumowanie) i stawia pytanie, czy  $S_p$  jest (dla jakiegokolwiek liczby pierwszej  $p$ ) kwadratem liczby naturalnej.



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 837 (WT = 2,15) i 838 (WT = 2,24) z numeru 3/2022

Marek Spychała	Warszawa	46,76
Kacper Morawski	Warszawa	43,56
Michał Adamaszek	Kopenhaga	41,76
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Paweł Najman	Kraków	38,88
Jerzy Cisło	Wrocław	37,05
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Stanisław Bednarek	Lódź	35,50
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,92
Radosław Kujawa	Wrocław	33,74

Pan Marek Spychała – już po raz czwarty.



# Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2022

## Zadania z fizyki nr 744, 745

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**744.** Z północnego bieguna Ziemi chcemy wystrzelić pocisk balistyczny (poruszający się pod wpływem siły ciężkości), który trafi w punkt na równiku, nadając mu najmniejszą możliwą prędkość początkową. Znaleźć wartość tej prędkości oraz kąt, pod którym należy oddać wystrzał. Opory ruchu zaniedbujemy, przyjmujemy, że Ziemia jest jednorodną kulą o promieniu  $R$ .

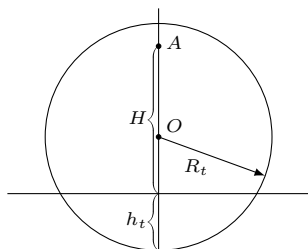
**745.** Długi cienki pręt porusza się ze stałą prędkością wzdłuż swojej osi. Obserwator znajduje się w dużej odległości od osi. W chwili, gdy promień skierowany na środek pręta utworzył kąt  $\alpha$  z kierunkiem jego ruchu, widziana długość pręta okazała się równa jego długości spoczynkowej. Znaleźć prędkość pręta.

## Rozwiązania zadań z numeru 6/2022

Przypominamy treść zadań:

**740.** Gdy pocisk wystrzelony pionowo do góry rozrywa się w najwyższym punkcie toru, to rozpada się na bardzo dużo odłamków lecących równomiernie we wszystkie strony z prędkością początkową  $v_0$ . Taki sam pocisk lecący pionowo w dół rozrywa się na wysokości  $H$  nad ziemią i w chwili rozzerwania ma prędkość  $u$ . Kiedy odłamki będą padać na ziemię z największą częstością?

**741.** Na nieruchome, płaskie zwierciadło o masie  $m$  pada prostopadłe do jego powierzchni płaska fala świetlna o energii  $W_0$ . Znaleźć prędkość końcową zwierciadła i energię odbitej od niego fali. Rozważyć przypadki graniczne, gdy energia fali padającej jest dużo większa oraz dużo mniejsza od energii spoczynkowej zwierciadła.



**740.** Po rozerwaniu w chwili  $t = 0$  środek masy układu opada w dół z przyspieszeniem  $g$  i prędkością początkową  $u$ , a w układzie środka masy odłamki znajdują się na sferze rozszerzającej się z prędkością  $v_0$ .

Rozważmy przedział czasowy  $t_1 \leq t \leq t_2$ , gdzie  $t_1$  jest czasem spadania na ziemię pierwszego odłamka, a  $t_2$  to czas, po którym spada odłamek ostatni. W chwili  $t$  promień sfery wynosi  $R_t = v_0 t$ , a droga, jaką przebył środek sfery,  $|AO| = ut + gt^2/2$  (zobacz rysunek). Na ziemi leżą odłamki, które byłyby rozłożone na powierzchni wycinka sfery o wysokości

$$h_t = R_t - (H - |AO|) = v_0 t - H + ut + gt^2/2.$$

Ich masa to

$$m(t) = 2\pi R_t h_t m_0 / (4\pi R_t^2) = m_0 [(u + v_0)/2v_0 + gt/4v_0 - H/2v_0 t],$$

gdzie  $m_0$  jest masą wszystkich odłamków (masą pocisku).

Szukana częstość padania odłamków jest pochodną funkcji  $m(t)$ :

$$dm/dt = m_0 g/4v_0 + m_0 H/2v_0 t^2.$$

Wartość tej pochodnej jest największa, gdy  $t = t_1$ .

Odłamek, który pierwszy spada na ziemię, ma w punkcie  $A$  prędkość  $u + v_0$ , zatem  $H = (u + v_0)t_1 + gt_1^2/2$ . Stąd szukany czas

$$t_1 = [\sqrt{2gH + (u + v_0)^2} - (u + v_0)]/g.$$

**741.** Oznaczając przez  $W_1$  energię fali odbitej od zwierciadła, a przez  $v$  prędkość uzyskaną przez zwierciadło, możemy zapisać zasadę zachowania energii:

$$W_0 + mc^2 = W_1 + mc^2/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

oraz zasadę zachowania pędu:

$$W_0/c = -W_1/c + mv/\sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Rozwiązując ten układ równań, otrzymujemy:

$$(1) \quad v = c[(1 + 2W_0/mc^2)^2 - 1]/[(1 + 2W_0/mc^2)^2 + 1],$$

$$(2) \quad W_1 = W_0/(1 + 2W_0/mc^2).$$

Z równania (2) widać, że energia fali odbitej nie może przekroczyć połowy energii spoczynkowej zwierciadła, niezależnie od energii fali padającej:  $W_1 < mc^2/2$ . Zatem im większa jest energia fali padającej, tym większa część tej energii jest przekazana zwierciadłu. Gdy  $W_0 \gg mc^2$ , praktycznie całą energię fali przejmuje zwierciadło.

W przypadku nierelatywistycznym, gdy  $W_0 \ll mc^2$ , równania (1) i (2) możemy uprościć:

$$v/c \approx 2W_0/mc^2, \quad W_1 \approx W_0(1 - 2W_0/mc^2).$$

Zatem w tym przypadku fala prawie w całości zostaje odbita od zwierciadła, przekazując tylko nieznaczną część swojej energii. Zwierciadło można efektywnie rozpedzić tylko wtedy, gdy energia fali padającej jest porównywalna z jego energią spoczynkową.

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Fizyka kontra zmarszczki



Jeśliby jasnowidz chciał dać w prezencie koleżance po fachu kryształową kulę, musiałby ją zapakować. Użycie do tego arkusza papieru wiąże się z łatwym do wyobrażenia sobie problemem – papier się pogniecie, powstaną na nim zmarszczki i fałdki, a całość może nie prezentować się dostatecznie elegancko. Problem ten jest w miarę oczywisty dla matematyka, który może orzec, że geometrie powierzchni kuli oraz arkusza papieru są różne, a nawet dodać, że powodem jest różna krzywizna tych powierzchni, sprawiająca, że nie można nałożyć jednej na drugą bez ściskania i rozciągania.

Okazuje się, że opisane wyżej zagadnienie stanowi nie lada wyzwanie dla fizyków. Oni są bowiem zainteresowani nie tylko tym, że nie da się gładko zapakować kuli w arkusz papieru, ale również chcieliby znać odpowiedź na pytanie, jak się ten papier pomarszczy. Podobne wyzwanie pojawia się również w przypadku odwrotnym, gdy chcemy „spłaszczyć” fragment dwuwymiarowej, zakrzywionej powierzchni.

Przewidywanie, jak marszczą się skończone powłoki, jest złożonym zadaniem z mechaniki nieliniowej. Podstawowa trudność wynika z tego, że w zadaniu tym nie występują siły rozciągające powłokę, co uniemożliwia stosowanie metod matematycznych zwykle stosowanych w mechanice ośrodków ciągłych. Do niedawna zrozumienie dynamiki marszczenia materiałów wymagało założenia lub zgadnięcia jakiegoś układu zmarszczek, który następnie można byłoby ulepszać i udokładniać.

Okazuje się jednak, że można sformułować rozsądny opis powstawania zmarszczek, łącząc elementy teorii i doświadczenia. Pierwszy krok w tym kierunku zrobił Ian Tobasco, matematyk z Uniwersytetu Illinois w Chicago, który zaproponował teorię opartą na bilansie energii związanej ze zjawiskiem marszczenia materiału. Nie było jednak oczywiste, czy ta teoria jest poprawna i dokładna.

Dlatego konieczne okazało się połączenie teorii z symulacjami komputerowymi i wykonanie serii eksperymentów, co, rzecz jasna, wymagało zaangażowania większej liczby naukowców. Badacze umieścili cienkie, płaskie kawałki plastiku na zakrzywionej szklanej powierzchni, tak aby plastik przybrał kształt zakrzywionego szkła. Następnie umieścili zakrzywione kawałki plastiku na mokrej powierzchni i obserwowali, jak napięcie powierzchniowe wody powoduje marszczenie plastiku. Dane z części doświadczalnej zostały wykorzystane do określenia parametrów symulacji komputerowych. Pozwoliło to na określenie reguł opisujących, jak pojawiają się i zachowują zmarszczki.

Okazało się, że zmarszczki tworzą się w rzędach na całej powierzchni próbki, a nie tylko na brzegach, mimo że materiał na brzegach podlega największemu odkształceniu. Układy tych zmarszczek, a w szczególności występowanie domen z regularnymi zmarszczkami, zależały od tzw. szkieletu topologicznego próbki, czyli środków okręgów stykających się z brzegiem próbki w dwóch lub więcej punktach. Jakkolwiek głębokość zmarszczek zależy od początkowej krzywizny spłaszczanej próbki, ich układ wewnątrz pojedynczej domeny jest określony przez znak tej krzywizny (powierzchnia siodła ma krzywiznę ujemną, powierzchnia kuli – dodatnią). Co więcej, układy zmarszczek odpowiadające przeciwnym znakom krzywizny są ze sobą związane, tzn. znając jeden z nich, można przewidzieć ten drugi.

Tworzenie się zmarszczek na różnego rodzaju materiałach, zwłaszcza na tekstyliach, towarzyszy nam na co dzień. Każdy, kto choć raz nadawał schludny wygląd koszulom lub sukienkom za pomocą żelazka, może sobie łatwo wyobrazić wyniki eksperymentów opisanych wyżej. Któż mógłby się jednak spodziewać, że z pozoru mało ekscytująca czynność, jaką jest prasowanie, wiąże się tak ściśle z najnowszymi odkryciami w fizyce?

I. Tobasco, Y. Timounay, D. Todorova, et al. *Exact solutions for the wrinkle patterns of confined elastic shells*. “Nature Physics” (2022).



# Wzory Viète'a

Bartłomiej BZDEGA\*

\*Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Ze szkolnych lekcji wiemy, że jeśli  $x_1$  i  $x_2$  są pierwiastkami trójmianu kwadratowego  $ax^2 + bx + c$ , to  $x_1 + x_2 = -b/a$  i  $x_1x_2 = c/a$ . Wzory te można uogólnić na wielomian dowolnego stopnia  $n$ . Załóżmy, że wielomian  $a_nx^n + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$  ma pierwiastki  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , przy czym każdy z pierwiastków jest tu wymieniony tyle razy, ile wynosi jego krotność. Po wymnożeniu lewej strony równości

$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = a_nx^n + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

podzieleniu obustronnie przez  $(-1)^k a_n$  i porównaniu współczynników przy  $x^k$  otrzymamy

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n.$$

Szczególnie elegancko prezentują się te równości dla  $k = 1$  oraz  $k = n$ :

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Do dalszych rozważań przydadzą się jeszcze przypadki  $k = 2$  i  $k = n - 1$ :

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \sum_{i=1}^n x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n}$$

(uwaga: zapis  $x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n$  oznacza iloczyn liczb  $x_1, x_2, \dots, x_n$  z wyjątkiem  $x_i$  nawet dla  $i = 1$  oraz  $i = n$ ).

Jeżeli  $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 0$  (równoważnie:  $a_0 \neq 0$ ), to możemy podzielić stronami równość dla  $k = n - 1$  przez równość dla  $k = n$ . Otrzymamy wtedy

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Ze wzorów dla  $k = 1$  i  $k = 2$  wynika równość

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2}}{a_n^2}.$$

Powyższe wzory wyglądają szczególnie ładnie, gdy wielomian, do którego je stosujemy, jest unormowany, czyli  $a_n = 1$ .

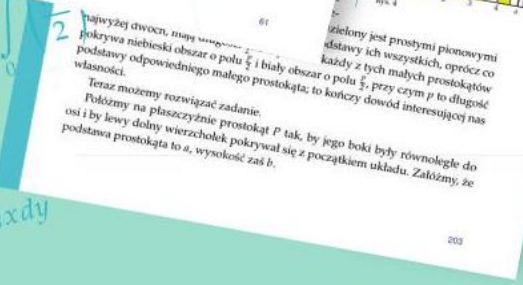
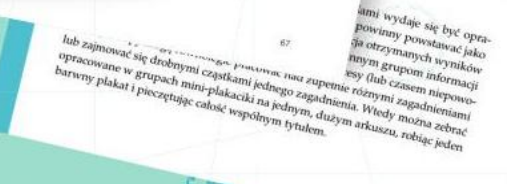
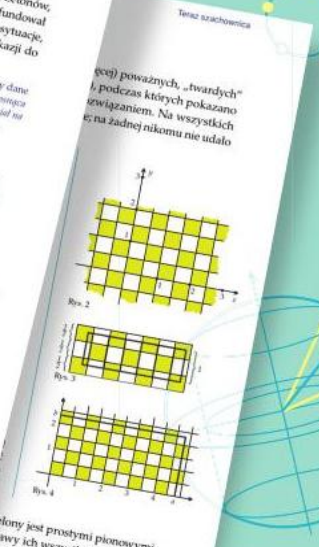
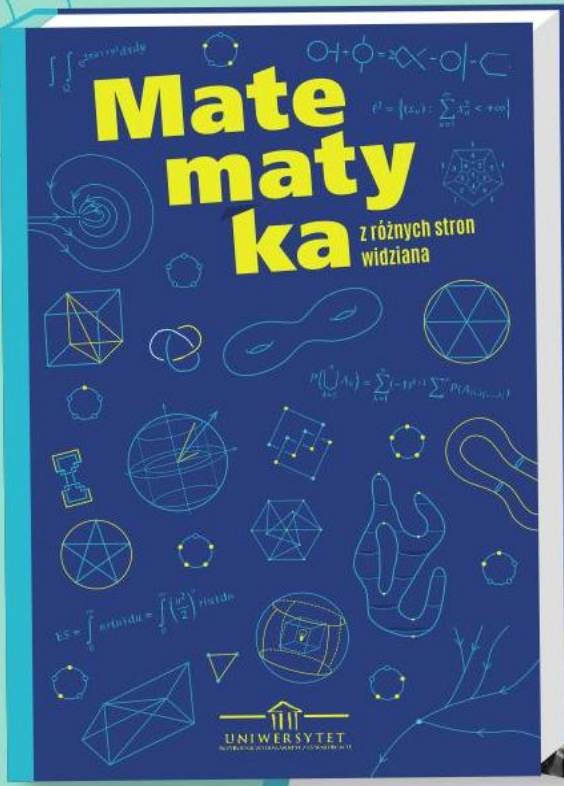
Warto pamiętać, że wzory Viète'a działają w obie strony – możemy za ich pomocą nie tylko badać własności pierwiastków wielomianu, ale również stworzyć wielomian, którego dane liczby są pierwiastkami.

## Zadania

- Wyprowadzić wzór na sumę sześcianów pierwiastków wielomianu  $x^3 + ax^2 + bx + c$ .
- Wielomian  $P(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + x_0$  stopnia  $n \geq 2$  ma  $n$  pierwiastków rzeczywistych (liczymy z uwzględnieniem krotności). Dowieść, że jeśli  $a_{n-1} = a_{n-2} = 0$ , to  $P(x) = a_n x^n$ .
- Jeden z pierwiastków wielomianu  $x^3 + px + q$  jest równy iloczynowi dwóch pozostałych. Udowodnić, że ten pierwiastek jest równy  $p - q$ .
- Liczby  $x_1, x_2$  i  $x_3$  są pierwiastkami wielomianu  $x^3 + ax^2 + bx + c$ . W zależności od  $a, b, c$  wyznaczyć wielomian unormowany, którego pierwiastkami są  $x_2 x_3, x_3 x_1$  i  $x_1 x_2$ .
- Liczby rzeczywiste  $a, b, c, d \neq 0$  spełniają równości  $a + b + c + d = 0$  i  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$ . Udowodnić, że wśród liczb  $a, b, c, d$  są dwie pary liczb przeciwnych.
- Liczby  $a, b, c \neq 0$  są całkowite. Udowodnić, że jeśli suma  $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}$  jest liczbą całkowitą, to każdy jej składnik jest liczbą całkowitą.
- Dla liczb całkowitych dodatnich  $n$  i  $k$ , spełniających nierówność  $n \geq k$ , niech  $S(n, k)$  oznacza sumę wszystkich iloczynów postaci  $a_1 a_2 \dots a_k$ , w których  $a_1, a_2, \dots, a_k$  są różnymi liczbami ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Wykazać, że  $S(n, k) < (n + 1)!$ .

**Wskazówki do zadań**

- Wskazówka znajduje się w kąciku nr 13 ( $\Delta_{20}$ ).
- Skorzystaj ze wzoru na sumę kwadratów pierwiastków wielomianu. Podać trzema wzory Viète'a. Dodać  $-q$ , a po wyłączeniu iloczynu pierwiastków przed nawias zauważyć, że w nawiasie mamy 1 na mocy wzoru na pierwiastki przed nawias zauważyć, że równości wnioskujemy, że  $w_3 = 0$  i  $w_1 = 0$ . Więc liczby  $a, b, c, d$  są pierwiastkami wielomianu  $x^4 + wx^3 + vx^2 + wx + w_0$ . Niech  $x^4 + wx^3 + vx^2 + wx + w_0$  będzie wielomianem, którego pierwiastkami są  $a, b, c, d$ . Z danych pierwiastkami i  $w_3 = 0$  i  $w_1 = 0$  wyznaczyć  $w_0$ .
- Należy zauważyć, że wielomian unormowany, którego pierwiastkami są liczby  $\frac{a}{bc}, \frac{b}{ca}, \frac{c}{ab}$ , ma współczynniki całkowite. Na mocy twierdzenia o pierwiastkach wymiernych, każdy o pierwiastkach wymiernych, wielomian unormowany o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą.
- Liczba  $S(n, k)$  jest współczynnikiem przy  $x^{n-k}$  w wielomianie  $(x + 1)(x + 2) \dots (x + n)$ . Suma współczynników wielomianu  $P$  jest równa  $P(1)$ .



Delta poleca:

### Matematyka z różnych stron widziana

„Każdy wie, co to jest matematyka. To zdanie tylko pozornie jest absurdalne. Wystarczy zauważyć, że każdy wie to na swój sposób: inaczej matematyka jawi się zmagającemu się z dodawaniem i odejmowaniem liczb całkowitych uczniowi pierwszych klas szkoły, inaczej pesymistycznemu filozofowi, który tylko w niej znajduje obiektywne prawdy, inaczej księgowemu, inaczej konstruktorowi maszyn, inaczej rozśpiewanemu poecie, widzącemu w niej drogi do nieskończoności, inaczej architektowi, chcącemu zmusić przestrzeń do uległości, inaczej całej rzeszy intelektualistów, chwalcących się, że zawsze mieli „trzy na szynach”, inaczej dysponentowi wysyłającemu w kosmos sprzęt i ludzi. [...]

Książka jest przeznaczona dla miłośników matematyki, choć także może czytanie jej kogoś w takiego miłośnika zamieni!”

fragment wstępu do książki *Matematyka z różnych stron widziana*

Recenzja książki na stronie 3.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum' P(A_{i_1, i_2, \dots, i_k})$$



$$ES = \int_0^{\infty} ur(u) du = \int_0^{\infty} \sqrt{2} \dots$$

