



Wzory Viète'a

Bartłomiej BZDEGA*

*Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Ze szkolnych lekcji wiemy, że jeśli x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$, to $x_1 + x_2 = -b/a$ i $x_1x_2 = c/a$. Wzory te można uogólnić na wielomian dowolnego stopnia n . Załóżmy, że wielomian $a_nx^n + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ma pierwiastki x_1, x_2, \dots, x_n , przy czym każdy z pierwiastków jest tu wymieniony tyle razy, ile wynosi jego krotność. Po wymnożeniu lewej strony równości

$$a_n(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) = a_nx^n + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0,$$

podzieleniu obustronnie przez $(-1)^k a_n$ i porównaniu współczynników przy x^k otrzymamy

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, n.$$

Szczególnie elegancko prezentują się te równości dla $k = 1$ oraz $k = n$:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad x_1 x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Do dalszych rozważań przydadzą się jeszcze przypadki $k = 2$ i $k = n - 1$:

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}, \quad \sum_{i=1}^n x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n = (-1)^{n-1} \frac{a_1}{a_n}$$

(uwaga: zapis $x_1 \dots x_{i-1} x_{i+1} \dots x_n$ oznacza iloczyn liczb x_1, x_2, \dots, x_n z wyjątkiem x_i nawet dla $i = 1$ oraz $i = n$).

Jeżeli $x_1, x_2, \dots, x_n \neq 0$ (równoważnie: $a_0 \neq 0$), to możemy podzielić stronami równość dla $k = n - 1$ przez równość dla $k = n$. Otrzymamy wtedy

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Ze wzorów dla $k = 1$ i $k = 2$ wynika równość

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2 - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2}}{a_n^2}.$$

Powyższe wzory wyglądają szczególnie ładnie, gdy wielomian, do którego je stosujemy, jest unormowany, czyli $a_n = 1$.

Warto pamiętać, że wzory Viète'a działają w obie strony – możemy za ich pomocą nie tylko badać własności pierwiastków wielomianu, ale również stworzyć wielomian, którego dane liczby są pierwiastkami.

Zadania

- Wyprowadzić wzór na sumę sześcianów pierwiastków wielomianu $x^3 + ax^2 + bx + c$.
- Wielomian $P(x) = a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + x_0$ stopnia $n \geq 2$ ma n pierwiastków rzeczywistych (liczymy z uwzględnieniem krotności). Dowieść, że jeśli $a_{n-1} = a_{n-2} = 0$, to $P(x) = a_n x^n$.
- Jeden z pierwiastków wielomianu $x^3 + px + q$ jest równy iloczynowi dwóch pozostałych. Udowodnić, że ten pierwiastek jest równy $p - q$.
- Liczby x_1, x_2 i x_3 są pierwiastkami wielomianu $x^3 + ax^2 + bx + c$. W zależności od a, b, c wyznaczyć wielomian unormowany, którego pierwiastkami są $x_2 x_3, x_3 x_1$ i $x_1 x_2$.
- Liczby rzeczywiste $a, b, c, d \neq 0$ spełniają równości $a + b + c + d = 0$ i $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 0$. Udowodnić, że wśród liczb a, b, c, d są dwie pary liczb przeciwnych.
- Liczby $a, b, c \neq 0$ są całkowite. Udowodnić, że jeśli suma $\frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} + \frac{ab}{c}$ jest liczbą całkowitą, to każdy jej składnik jest liczbą całkowitą.
- Dla liczb całkowitych dodatnich n i k , spełniających nierówność $n \geq k$, niech $S(n, k)$ oznacza sumę wszystkich iloczynów postaci $a_1 a_2 \dots a_k$, w których a_1, a_2, \dots, a_k są różnymi liczbami ze zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$. Wykazać, że $S(n, k) < (n + 1)!$.

Wskazówki do zadań
 1. Wskazówka znajduje się w kąciku nr 13 (Δ_{20}).
 2. Skorzystaj ze wzoru na sumę kwadratów pierwiastków wielomianu.
 3. Dodać stronami wzory Viète'a na pierwiastków przed nawias zauważyć, że w nawiasie mamy 1 na mocy wzoru na sumę pierwiastków.
 4. Odpowiedź: $x^3 - bx + acx^2 - c^2$.
 5. Niech $x^4 + w_3 x^3 + w_2 x^2 + w_1 x + w_0$ będzie wielomianem, którego pierwiastkami są a, b, c, d . Z danych równości wnioskujemy, że $w_3 = 0$ i $w_1 = 0$.
 6. Należy zauważyć, że wielomian $x^4 + w_2 x^2 + w_0$ ma pierwiastki a, b, c, d i a, b, c, d są pierwiastkami unormowanego o współczynnikach całkowite. Na mocy twierdzenia o pierwiastkach wymiernych, każdy o pierwiastek wymierny wielomianu $S(n, k)$ jest współczynnikiem przy x^{n-k} w wielomianie $(x + 1)(x + 2) \dots (x + n)$. Suma współczynników wielomianu P jest równa $P(1)$.