Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 XII 2022

Zadania z matematyki nr 847, 848

Redaguje Marcin E. KUCZMA

847. Dana jest funkcja ciągła $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o następującej własności: dla każdej pary liczb a,b, gdzie $a<b$, istnieją liczby u,v takie, że $a\leqslant u<v\leqslant b$ oraz $f(u)\leqslant f(x)\leqslant f(v)$ dla $x\in[a,b]$. Udowodnić, że funkcja f jest niemalejąca.

848. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną, $n\geqslant 3$. Niech X będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych $(x_1,x_2,\ldots)$ o wyrazach $x_i\in\{1,\ldots,n\}$ i niech B będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych $(b_1,b_2,\ldots)$ o wyrazach $b_i\in\{0,1\}$. Wyjaśnić, czy istnieje różnowartościowe odwzorowanie zbioru X na cały zbiór B takie, że (dla każdej liczby naturalnej k): jeżeli dwa ciągi (x_i), (y_i) ze zbioru X pokrywają się na odcinku początkowym długości k (tzn. $x_i=y_i$ dla $i\leqslant k$), to ich obrazy także pokrywają się na odcinku początkowym długości k.

Zadanie 848 zaproponował pan Adam Woryna z Rudy Śląskiej.

Rozwiązania zadań z numeru 6/2022

Przypominamy treść zadań:

843. Po krawędziach wypukłego wielościanu pełza żuk. W każdym wierzchołku wielościanu schodzą się trzy krawędzie. Po dojściu do wierzchołka żuk nie zawraca w krawędź, którą przyszedł, lecz wybiera jedną z pozostałych dwóch krawędzi – lewą lub prawą (orientacja: lewo/prawo – tak, jak widać, patrząc z zewnątrz wielościanu). Gdy na jednym rozdrożu żuk wybrał wariant lewy, na następnym wybiera prawy – i na odwrót. Dowieść, że w pewnym momencie żuk wróci do punktu, z którego rozpoczął wędrówkę.

844. Wyjaśnić, czy istnieje liczba pierwsza p, dla której suma

$$1^p+3^p+\ldots+(2p-1)^p$$

jest sześcianem liczby naturalej.

843. Żuk startuje z wierzchołka O. Niech A,B,C $(A\neq O)$ będzie dowolną trójką kolejno przebytych wierzchołków. Z krawędzi AB żuk wszedł w krawędź BC; wiadomo więc, czy skręcił w lewo, czy w prawo. Zgodnie z przyjętymi regułami daje to informację, czy chwilę wcześniej, w punkcie A, skręcił w prawo, czy w lewo. Określa to jednoznacznie wierzchołek (na jego trasie) poprzedzający A. To znaczy, że taka trójka wierzchołków A,B,C wyznacza trajektorię w przód i w tył. Jest skończenie wiele takich trójek, więc muszą się one powtarzać. Fragment trajektorii między dwoma kolejnymi powtórzeniami pewnej trójki A,B,C zawiera zatem wszystkie wierzchołki początkowego fragmentu wędrówki (do pierwszego wystąpienia A) – w tym wierzchołek O.

844. Odpowiedź: nie istnieje. *Dowód:* oznaczmy rozważaną sumę przez S_p:

$$S_p=\sum_{k=1}^{p}(2k-1)^p=\sum_{k=1}^{p}(2p+1-2k)^p.$$

$S_2=10$ nie jest sześcianem. Dalej przyjmujemy, że p jest nieparzystą liczbą pierwszą. Przekształcamy $2S_p$ modulo p^3:

$$2S_p=\sum_{k=1}^{p}\Big((2k-1)^p+(2p+1-2k)^p\Big)\equiv$$

$$\equiv\sum_{k=1}^{p}\left((2k-1)^p-\binom{p}{2}(2p)^2(2k-1)^{p-2}+\binom{p}{1}(2p)(2k-1)^{p-1}-\binom{p}{0}(2k-1)^p\right)=$$

$$=\sum_{k=1}^{p}\Big(-p(p-1)\cdot 2p^2(2k-1)^{p-2}+p\cdot 2p(2k-1)^{p-1}\Big).$$

Dzielimy przez 2 (wolno, wobec nieparzystości p) i otrzymujemy

$$S_p\equiv p^3\cdot A_p+p^2\cdot B_p \pmod{p^3}$$

dla liczb całkowitych

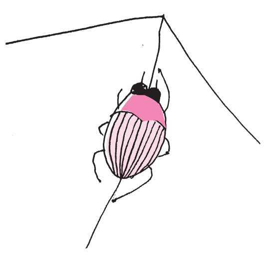
$$A_p=(1-p)\sum_{k=1}^{p}(2k-1)^{p-2},\qquad B_p=\sum_{k=1}^{p}(2k-1)^{p-1}.$$

Na mocy małego twierdzenia Fermata $(2k-1)^{p-1}\equiv 1 \pmod p$, gdy $k\neq(p+1)/2$ $(1\leqslant k\leqslant p)$. Stąd $B_p\equiv p-1 \pmod p$, co pozwala przepisać uzyskane przedstawienie S_p jako

$$S_p\equiv p^3A_p+p^2(p-1) \pmod{p^3}.$$

Suma S_p dzieli się więc przez p, ale nie przez p^3. Wobec tego nie jest sześcianem żadnej liczby całkowitej.

Uwaga. Witold Bednarek, autor zadania (i podanego rozwiązania), zauważa, że S_p nie jest potęgą żadnej liczby naturalnej o wykładniku naturalnym większym od 2 (to samo rozumowanie) i stawia pytanie, czy S_p jest (dla jakiejkolwiek liczby pierwszej p) kwadratem liczby naturalnej.



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 837 ($WT=2{,}15$) i 838 ($WT=2{,}24$) z numeru 3/2022

Marek Spychała	Warszawa	46,76
Kacper Morawski	Warszawa	43,56
Michał Adamaszek	Kopenhaga	41,76
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Paweł Najman	Kraków	38,88
Jerzy Cisło	Wrocław	37,05
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Stanisław Bednarek	Łódź	35,50
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Tomasz Wietecha	Tarnów	34,92
Radosław Kujawa	Wrocław	33,74

Pan Marek Spychała – już po raz czwarty.