Klasy permutacji II: twierdzenie Marcusa–Tardosa

*Wojciech PRZYBYSZEWSKI**

*Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Czytelnik mający doświadczenie z algorytmiką na pewno ma świadomość, że dla pewnych problemów grafowych dużo łatwiej jest znaleźć efektywny algorytm, jeśli nie będziemy oczekiwać, że będzie działać dla wszystkich grafów, a jedynie dla takich, które mają określoną własność (np. tylko dla drzew). W niektórych dziedzinach informatyki popularne jest dowodzenie, że pewne problemy algorytmiczne mają efektywne rozwiązanie na klasach grafów o pewnych małych miarach. Przykładem takiej miary jest szerokość drzewiasta (*ang. treewidth*), która intuicyjnie określa, jak bardzo dany graf przypomina drzewo. Innym przykładem jest zdefiniowana dwa lata temu szerokość bliźniacza (*ang. twin-width*), która bardzo szybko zdobyła dużą popularność ze względu na swoje dobre własności algorytmiczne i kombinatoryczne. Sformułowane w poprzedniej części artykułu twierdzenie Marcusa–Tardosa okazuje się bardzo użytecznym narzędziem, które zostało użyte w dowodach wielu własności grafów o ograniczonej szerokości bliźniaczej.

Twierdzenie Marcusa–Tardosa, moim zdaniem, jest ciekawe nie tylko ze względu na swoją interesującą kombinatoryczną naturę, ale także ze względu na swoją historię. Postawiona przez Stanleya i Wilfa hipoteza dopiero po kilkunastu latach doczekała się dowodu, który okazał się bardzo elegancki i korzystał tylko z elementarnych narzędzi. Ponadto, jak zaraz zobaczymy, zmieści się w jednym artykule *Delty*. Płynie stąd morał, że czasem nie warto zrażać się tym, że jakiś problem powszechnie uznawany jest za trudny – może wystarczy spojrzeć na niego od nieco innej strony, znaleźć jeden nowy pomysł, aby udało nam się rozwiązać coś, nad czym głowiło się bezskutecznie wielu matematyków.

Przypomnijmy teraz najważniejsze definicje i oznaczenia z poprzedniej części artykułu. Rozważamy permutacje zbioru n-elementowego, czyli funkcje $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$, które są bijekcjami. Dla ustalonego n zbiór wszystkich takich funkcji oznaczamy przez S_n. Jednym ze sposobów reprezentowania permutacji jest wypisanie jej wartości na kolejnych elementach. Permutację $\sigma \in S_4$ taką, że $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 4$, $\sigma(3) = 3$ i $\sigma(4) = 1$, zapisujemy jako 2431. Zdefiniowaliśmy też relację $\preceq$ zawierania się jednej permutacji w drugiej.

Definicja 1. *Niech $k \leqslant n$ będą dwoma dodatnimi liczbami całkowitymi i niech $\sigma \in S_k$ i $\tau \in S_n$ będą dwoma permutacjami. Jeśli istnieją takie $1 \leqslant x_1 < \ldots < x_k \leqslant n$, że dla każdych $1 \leqslant i < j \leqslant k$ warunek $\sigma(i) < \sigma(j)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek $\tau(x_i) < \tau(x_j)$, to powiemy, że τ zawiera σ, co zapiszemy $\sigma \preceq \tau$.*

Zdefiniowaliśmy też pojęcie klasy permutacji.

Definicja 2. *Niech $\mathcal{C}$ będzie dowolnym zbiorem permutacji. Powiemy, że $\mathcal{C}$ jest klasą permutacji, jeśli dla każdego $\sigma \in \mathcal{C}$ i każdego $\tau \preceq \sigma$ mamy $\tau \in \mathcal{C}$.*

Dla ustalonej permutacji τ przez $\mathrm{Av}_n(\tau)$ definiujemy zbiór tych wszystkich permutacji z S_n, które nie zawierają τ. Formalnie $\mathrm{Av}_n(\tau) = \{\sigma \in S_n : \tau \not\preceq \sigma\}$. Przez $\mathrm{Av}(\tau)$ oznaczamy sumę $\mathrm{Av}_n(\tau)$ po wszystkich n, tj. $\mathrm{Av}(\tau) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{Av}_n(\tau)$. Nietrudno zobaczyć, że dla dowolnego τ zbiór $\mathrm{Av}(\tau)$ jest właśnie klasą permutacji.

Poprzedni artykuł zakończyliśmy sformułowaniem hipotezy Stanleya–Wilfa, która była otwarta przez kilkanaście lat, aż w końcu została udowodniona przez Adama Marcusa i Gábora Tardosa. Od tej pory nazywa się ją właśnie twierdzeniem Marcusa–Tardosa.

Twierdzenie 1 (Hipoteza Stanleya–Wilfa vel twierdzenie Marcusa–Tardosa)**.** *Dla dowolnej permutacji $\sigma \in S_k$ istnieje stała K zależna tylko od σ taka, że dla każdego n zachodzi $|\,\mathrm{Av}_n(\sigma)| \leqslant K^n$.*

Ten artykuł poświęcimy dowodowi twierdzenia 1. Nim jednak przejdziemy do właściwego dowodu, opiszemy jeszcze jeden sposób reprezentowania permutacji.

Macierze permutacji i hipoteza Fürediego–Hajnala

Dla permutacji $\sigma \in S_n$ możemy rozważyć zero-jedynkową macierz wymiaru $n \times n$ taką, że na przecięciu k-tego wiersza i l-tej kolumny mamy 1 wtedy i tylko wtedy, gdy $\sigma(k) = l$. Dla przykładu, rozważaną wcześniej permutację $\sigma \in S_4$ taką, że $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 3$ i $\sigma(4) = 1$, reprezentujemy macierzą:

$$P(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Oznaczając przez $M[i,j]$ element macierzy M w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, możemy napisać:

$$P(\sigma)[k,l] = \begin{cases} 1, & \text{jeśli } \sigma(k) = l, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Podmacierz macierzy A rozmiaru $k \times l$ to dowolna macierz D, którą możemy uzyskać z A, wykreślając z niej część wierszy i kolumn, aż macierz, która zostanie, będzie miała rozmiar właśnie $k \times l$. Powiemy też, że macierz zero-jedynkowa A zawiera inną macierz zero-jedynkową B rozmiaru $k \times l$, jeśli istnieje taka podmacierz D rozmiaru $k \times l$ macierzy A, że zawsze gdy $B[i,j] = 1$, to także $D[i,j] = 1$. W przeciwnym razie powiemy, że A unika B. Nie wymagamy w tej definicji równości macierzy B i D – chcemy tylko, żeby podmacierz D miała jedynki przynajmniej tam, gdzie ma je B. Dla przykładu macierz

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

zawiera macierz

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ponieważ po wykreśleniu z M drugiego wiersza i czwartej kolumny dostaniemy macierz

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

i dla każdych $1 \leqslant i, j \leqslant 3$ zawsze gdy $N[i,j] = 1$, mamy także $D[i,j] = 1$. Czytelnik może sprawdzić, że macierz, która powstaje z wykreślenia z M drugiej kolumny i czwartego wiersza, również pokazuje, że M zawiera N.

W 1992 roku Zoltán Füredi i Péter Hajnal sformułowali następującą hipotezę, związaną z macierzami zero-jedynkowymi.

Hipoteza 1. *Dla każdej permutacji $\sigma \in S_k$ istnieje taka stała c_σ, że każda zero-jedynkowa macierz M rozmiaru $n \times n$, która ma przynajmniej $n \cdot c_\sigma$ jedynek, zawiera $P(\sigma)$.*

Okazało się, co w 2000 roku wykazał Martin Klazar, że prawdziwość hipotezy 1 implikuje prawdziwość twierdzenia 1. Wystarczyło więc, że Marcus i Tardos udowodnili tylko hipotezę 1. Zarówno w dowodzie Klazara, jak i w dowodzie Marcusa–Tardosa rozpatrywano pewne macierze powstałe z podziału wierszy i kolumn oryginalnej macierzy. Nim przejdziemy do dowodów twierdzeń Klazara i Marcusa–Tardosa, zapoznamy się z tym narzędziem.

Macierze podziału

Rozważmy zero-jedynkową macierz wymiaru $n \times n$. Możemy jej wiersze (i kolumny) podzielić w jakiś sposób na k grup, z których każda składa się z kolejnych wierszy (bądź kolumn). Na przykład wiersze i kolumny poniższej macierzy A podzieliliśmy na trzy grupy:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Ten podział daje nam pewną macierz podziału B – mianowicie dla każdego bloku (przecięcia grupy kolumn z grupą wierszy) powyżej macierz B ma jedynkę, jeśli choć jeden z elementów danego bloku zawiera jedynkę. Dla tak podzielonego A odpowiednie B wygląda następująco:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kluczową obserwacją jest poniższy lemat.

Lemat 1. *Niech A będzie zero-jedynkową macierzą wymiaru $n \times n$, B zaś będzie jakąś macierzą podziału A. Jeśli A unika pewnej macierzy permutacji P wymiaru $k \times k$, to B również unika P.*

Szkic dowodu. Załóżmy nie wprost, że B nie unika P. W takim razie w B możemy wskazać k jedynek, które reprezentują P. Te jedynki są w B, ponieważ odpowiednie bloki macierzy A zawierają co najmniej jedną jedynkę. Tak więc dla każdej wskazanej jedynki w macierzy B możemy wybrać jakąś jedynkę w macierzy A w taki sposób, że te wybrane jedynki w A pokazują, że A zawiera P. Ta sprzeczność kończy dowód. $\square$

Lemat 1 jest bardzo użytecznym narzędziem, ponieważ pozwala nam stosować podejście indukcyjne. Jeśli pracujemy z macierzą unikającą jakiejś $P(\sigma)$ dla ustalonej permutacji σ, to tę samą własność ma jej każda macierz podziału. Jeśli weźmiemy macierz podziału odpowiednio mniejszego wymiaru, być może będziemy w stanie z założenia indukcyjnego o jej własnościach udowodnić tezę dla oryginalnej macierzy. Tak właśnie postępowali zarówno Klazar, jak i Marcus z Tardosem. W końcu możemy przejść do dowodów ich twierdzeń.

Twierdzenie Klazara

Zaczniemy od udowodnienia twierdzenia Klazara, czyli wykażemy, że prawdziwość Hipotezy 1 implikuje prawdziwość twierdzenia 1.

Twierdzenie 2 (Twierdzenie Klazara)**.** *Niech $\sigma \in S_k$ będzie permutacją, dla której istnieje taka stała c_σ, że każda zero-jedynkowa macierz wymiaru $n \times n$, która zawiera przynajmniej $c_\sigma n$ jedynek, zawiera macierz $P(\sigma)$. Wtedy istnieje taka stała K_σ, że dla każdego n zachodzi $|\operatorname{Av}_n(\sigma)| \leqslant K_\sigma^n$.*

Dowód. Oznaczmy przez $T_n(\sigma)$ zbiór wszystkich macierzy zero-jedynkowych wymiaru $n \times n$, które nie zawierają $P(\sigma)$. Oczywiście $|T_n(\sigma)| \geqslant |\operatorname{Av}_n(\sigma)|$ (bo każda macierz permutacji z $\operatorname{Av}_n(\sigma)$ należy do $T_n(\sigma)$), więc wystarczy znaleźć takie K_σ, że $|T_n(\sigma)| \leqslant K_\sigma^n$.

Weźmy dowolną macierz $A \in T_{2n}(\sigma)$ i podzielmy zarówno jej wiersze, jak i jej kolumny na n grup po 2. Dostaniemy w ten sposób macierz podziału B wymiaru $n \times n$. Na mocy lematu 1 mamy $B \in T_n(\sigma)$. Istnieje dokładnie 15 zero-jedynkowych macierzy wymiaru 2×2, które zawierają choć jedną jedynkę, więc jeśli B ma w jedynek, to w sposób opisany powyżej mogliśmy ją otrzymać z 15^w różnych macierzy A wymiaru $2n \times 2n$. Na mocy założenia wiemy jednak, że B ma maksymalnie $c_\sigma n$ jedynek, więc dostajemy $|T_{2n}(\sigma)| \leqslant |T_n(\sigma)| \cdot 15^{c_\sigma n}$. Oznaczając $15^{c_\sigma} = L_\sigma$, mamy ostatecznie $|T_{2n}(\sigma)| \leqslant |T_n(\sigma)| \cdot L_\sigma^n$. Podobnie możemy pokazać $|T_{2n+1}(\sigma)| \leqslant |T_{n+1}(\sigma)| \cdot L_\sigma^{n+1}$.

Niech $K_\sigma = L_\sigma^2$. Pokażemy przez indukcję, że tak zdefiniowane K_σ spełnia tezę. Oczywiście mamy $|T_1(\sigma)| \leqslant 1 \leqslant K_\sigma^1$. Załóżmy teraz, że chcemy pokazać tezę dla $2n$ i $2n+1$, wiedząc (na mocy założenia indukcyjnego), że teza jest prawdziwa dla n i $n+1$. Mamy:

$$|T_{2n}(\sigma)| \leqslant |T_n(\sigma)| \cdot L_\sigma^n \leqslant K_\sigma^n L_\sigma^n \leqslant K_\sigma^{2n}$$

oraz

$$|T_{2n+1}(\sigma)| \leqslant |T_{n+1}(\sigma)| \cdot L_\sigma^{n+1} \leqslant K_\sigma^{n+1} L_\sigma^{n+1} \leqslant K_\sigma^{2n+1}.$$

To kończy dowód indukcyjny. $\square$

Naiwna próba dowodu hipotezy Fürediego–Hajnala

Nim podamy poprawny dowód hipotezy 1 przedstawiony przez Marcusa i Tardosa, sami spróbujmy naiwnie zastosować lemat 1. Przez $f_n(\sigma)$ oznaczmy minimalną liczbę jedynek taką, że każda macierz wymiaru $n \times n$, która ma przynajmniej $f_n(\sigma)$ jedynek, zawiera $P(\sigma)$. Mamy nadzieję, że dzięki lematowi 1 uda nam się skonstruować jakieś równanie rekurencyjne na $f_n(\sigma)$. Ustalmy więc liczbę całkowitą l i weźmy macierz A wymiaru $n \times n$ dla n podzielnego przez l, która nie zawiera $P(\sigma)$. Możemy jej wiersze i kolumny podzielić na n/l grup po l wierszy i kolumn, a następnie skonstruować macierz podziału B. Ponieważ B także nie zawiera $P(\sigma)$, to ma co najwyżej $f_{n/l}(\sigma)$ jedynek. Każda jedynka w B odpowiada co najwyżej l^2 jedynkom w A, co daje nam $f_n(\sigma) \leqslant f_{n/l}(\sigma) \cdot l^2$. Czytelnik zaznajomiony z analizą równań rekurencyjnych dostrzeże, że rozwiązanie takiej rekurencji daje nam $f_n(\sigma) = O(n^2)$, podczas gdy chcemy pokazać $f_n(\sigma) = O(n)$. Wynika stąd, że potrzebujemy jeszcze jakiegoś dodatkowego pomysłu.

Dowód Marcusa i Tardosa

Teraz przedstawimy poprawny dowód hipotezy 1.

Dowód. Ustalmy permutację $\sigma \in S_k$. Weźmy dowolną zero-jedynkową macierz A wymiaru $n \times n$, która nie zawiera $P(\sigma)$. Załóżmy przy tym, że k^2 dzieli n. Oznaczmy też przez S_{ij} podmacierz A składającą się z wierszy od $(i-1)k^2+1$ do ik^2 oraz kolumn od $(j-1)k^2+1$ do jk^2. Rozpatrzmy podział wierszy i kolumn macierzy A na n/k^2 grup, każda rozmiaru k^2. Zauważmy, że macierz tego podziału B wymiaru $n/k^2 \times n/k^2$ spełnia $B[i,j] = 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy podmacierz S_{ij} zawiera choć jedną jedynkę. Wiemy już, na mocy lematu 1, że B wyklucza $P(\sigma)$.

Powiemy, że blok S_{ij} jest szeroki (odpowiednio wysoki), kiedy zawiera jedynki w przynajmniej k różnych kolumnach (odpowiednio wierszach). Niech $C_j = \{S_{ij} : i = 1, 2, \ldots, n/k^2\}$. Wykażemy, że liczba bloków w C_j, które są szerokie, to co najwyżej $k\binom{k^2}{k}$. Załóżmy nie wprost, że tak nie jest. Z zasady szufladkowej wynika wtedy, że mamy takie k bloków $S_{i_1 j}, \ldots, S_{i_k j}$, z których wszystkie mają jedynki w pewnych kolumnach $c_1 < \ldots < c_k$. Dla każdej jedynki w r-tym wierszu i s-tej kolumnie macierzy $P(\sigma)$ możemy wybrać jedynkę w kolumnie c_s i odpowiednim wierszu z bloku $S_{i_r j}$, dostając, że A zawiera $P(\sigma)$. To sprzeczność, która pokazuje, że rzeczywiście w C_j jest maksymalnie $k\binom{k^2}{k}$ szerokich bloków.

Oznaczmy także $R_i = \{S_{ij} : j = 1, \ldots, n/k^2\}$. Analogicznie możemy pokazać, że R_i zawiera maksymalnie $k\binom{k^2}{k}$ wysokich bloków.

Podsumowując, dostajemy, że w A jest maksymalnie $\frac{n}{k^2}k\binom{k^2}{k}$ bloków szerokich i maksymalnie tyle samo bloków wysokich. Liczbę jedynek w takich blokach szacujemy naiwnie, przez k^4. Z kolei każdy blok, który nie jest ani wysoki, ani szeroki, ma maksymalnie $(k-1)^2$ jedynek. Stąd wynika oszacowanie:

$$f_n(\sigma) \leqslant f_{n/k^2}(\sigma)(k-1)^2 + 2\frac{n}{k^2}k\binom{k^2}{k}k^4 = $$
$$= f_{n/k^2}(\sigma)(k-1)^2 + 2nk^3\binom{k^2}{k}.$$

Ta nierówność jest prawdziwa dla n, które są podzielne przez k^2. Jeśli jednak k^2 nie dzieli n, to weźmy największe $n' < n$, które jest podzielne przez k^2. Możemy łatwo oszacować:

$$f_n(\sigma) \leqslant f_{n'}(\sigma) + 2k^2 n \leqslant$$
$$\leqslant f_{n'/k^2}(\sigma)(k-1)^2 + 2\left(k^3\binom{k^2}{k} + k^2\right)n.$$

Jako ćwiczenie pozostawiamy Czytelnikowi ostatni szlif, czyli wykazanie, że wraz z warunkiem początkowym $f_1(\sigma) \leqslant 1$ ta powyższa nierówność daje:

$$f_n(\sigma) \leqslant 2k^4\binom{k^2}{k}n. \qquad \square$$

Niebo w październiku

Październik jest trzecim kolejnym miesiącem, w którym Słońce kontynuuje szybką wędrówkę na południe. W tym czasie wysokość jego górowania obniży się o ponad 10°, a w ślad za tym jego czas przebywania nad widnokręgiem zmniejszy się do mniej niż 10 godzin. W niedzielę 30 października nastąpi zmiana czasu na zimowy i należy pamiętać o cofnięciu wskazówek zegarów o godzinę.

Ze Słońcem związane jest jedno z ciekawszych wydarzeń astronomicznych października – jego częściowe zaćmienie przez Księżyc. Wydarzenie nastąpi 25 dnia miesiąca, kiedy to Księżyc przejdzie przez nów i częściowo zasłoni Słońce. Maksymalnie Księżyc zakryje 86% średnicy tarczy słonecznej, ale tak głębokie zaćmienie da się dostrzec tylko ze środkowej Syberii. W Polsce zjawisko zacznie się około 11:10 i skończy niewiele ponad dwie godziny później, z fazą maksymalną mniej więcej o 12:20. Nad naszym krajem Księżyc zasłoni od nieco ponad 45% średnicy tarczy słonecznej w Bogatyni do ponad 56% w Suwałkach.

Zanim dojdzie do zaćmienia Słońca, na początku października dobrze widoczna jest planeta Merkury, która 9 dnia miesiąca osiągnie maksymalną elongację zachodnią. Niestety, jak to u nas bywa, oddali się wtedy od Słońca na niewiele ponad 18°. Mimo to planeta pozostanie ozdobą porannego nieba aż do księżycowego nowiu. W dniu maksymalnej elongacji o godzinie 6 rano Merkury wzniesie się na wysokość 7°, świecąc z jasnością $-0{,}5^m$ jakieś 12° na godzinie 5 względem Deneboli, drugiej co do jasności gwiazdy Lwa. Przy użyciu teleskopów można próbować dostrzec tarczę planety o średnicy 7″ i w fazie 54%. Do końca