



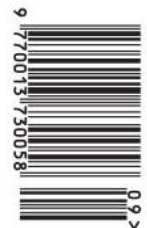
# deltami

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

$h=6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$   $\pi=3,141592...$

NR 9 (580) 2022  
CENA 6 ZŁ - VAT 8%  
PL ISSN 037-3005 | NR IND 35 550 XX  
MIESIĘCZNIK  
[www.deltami.edu.pl](http://www.deltami.edu.pl)

**Czy dobrze  
rysuję  
obwarzanki?**  
str. 1



Nakład: 3500 egz.

## SPIS TREŚCI NUMERU 9 (580)

Czy dobrze rysuję obwarzanki?

*Michał Miśkiewicz*

str. 1

Wuja słuchać będziesz!

*Wojciech Czerwiński*

str. 2

Kontrolowalne układy kilkuatomowe

*Damian Włodzyński*

str. 4

 Zadania

str. 5

O podciągach i palindromach słów kilka

*Radosław Żak*

str. 6

O klasach permutacji

*Wojciech Przybyszewski*

str. 8

 Biotechnolog na wakacjach

*Magdalena Fikus*

str. 11

Zagadkowe i złowróźbne komety

*Lech Falandysz*

str. 12

Hydrodynamika i topologia

*Grzegorz Łukaszewicz,*

*Krzysztof Mizerski*

str. 14

Prosto z nieba: Earendel – Miłośnik

Morza czy jednak Gwiazda Poranna?

str. 17

Klub 44

str. 18

List do redakcji: Jak rysować styczne

do krzywej  $x^3 + y^2 = 1$  i Odpowiedź

Mariusza Skałby

str. 20

Niebo we wrześniu

str. 22

Aktualności

Swobodne i uśpione czarne dziury

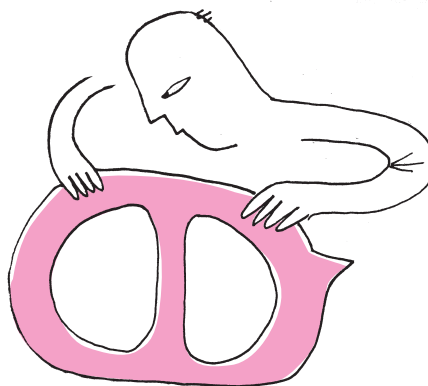
str. 24

 Funkcja Eulera

*Bartłomiej Bzdęga*

str. 25

W następnym numerze:  
Poznajemy topologię przez dotyk



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

**Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej, doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz, dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin, prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński, prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz, dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak, dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN, prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmołek.

**Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac., Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński, Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz, Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

**Adres do korespondencji:** Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Okladki i ilustracje:

Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

**Prenumerata:**

Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

**Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub zamówić przez e-mail.

Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze egzemplarze 3 zł



Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

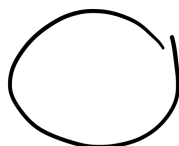
Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# Czy dobrze rysuję obwarzanki?

Michał MIŚKIEWICZ

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW; Instytut Matematyczny PAN

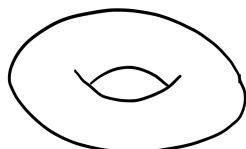
Tworząc odręczne rysunki, większość znanych mi matematyków rzadko sięga po cyrkiel i linijkę. W związku z tym ich typowy rysunek okręgu wygląda tak:



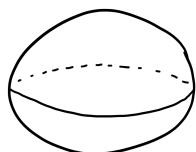
Może i bliżej temu do elipsy, może i pętla się nie domyka, ale przecież nie o to chodzi, prawda? Takie nierówne kółko zazwyczaj w zupełności nam wystarczy podczas rozwiązywania zadania olimpijskiego. Czasem może nawet posłużyć do zilustrowania sfery w nieskończonej wymiarowej przestrzeni, czemu nie.

(Precyzyjne rysunki oczywiście mają swoje zalety, ale nie o tym tutaj).

W tym właśnie duchu nauczono mnie kiedyś rysowania torusa, czyli typowego obwarzanka. Zaczynam od elipsy (takiej szerszej niż wyższej), rysuję w jej środku „uśmiech” w kształcie łuku, a wreszcie nad uśmiechem dodaję krótszy łuk – „czapeczkę”. O tak:



To bardzo typowy obrazek, który Czytelnik najpewniej już gdzieś widział. Niedawno nabrałem jednak wątpliwości, czy aby ten ostry kąt między uśmiechem a czapeczką nie jest wynikiem pomyłki. Tego typu błędy naprawdę się ludziom zdarzają – popularnym przykładem jest następujący szkic kuli:

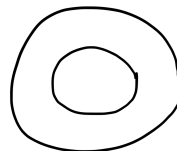


Taki szkic stara się przedstawić rzut prostokątny kuli na płaszczyznę kartki (ew. ekranu, zależnie od medium wybranego przez Czytelnika). Ponieważ sam rzut ma kształt koła, dla podkreślenia trójwymiarowości zaznaczono też równik (czyli pojedyncze koło wielkie). Żeby dobrze oddać równik na rysunku, należy odpowiedzieć sobie na pytanie, jak wygląda jego rzut prostokątny. Poza zdegenerowanym przypadkiem – gdy punkt obserwacji znajduje się w płaszczyźnie równika – zawsze ma on kształt elipsy. Elipsa taka może być bardzo spłaszczona (gdy patrzymy tuż nad płaszczyznę równika), i wówczas „zakręty” na końcach długiej osi mogą być dowolnie ciasne, ale jednak zawsze gładkie. Rysunek wyżej jest więc pod tym jednym względem zwodniczy.

Zakładamy tu, że punkt obserwacji znajduje się (nieskończenie) daleko od obserwowanego obiektu – inaczej widziany obraz nie jest rzutem prostokątnym, lecz środkowym. Zresztą założenie to zwyczajowo

obowiązuje przy rysowaniu sześcianu na lekcjach matematyki. Na lekcjach plastyki już niekoniecznie (na ten temat pisał Marek Kordos w  $\Delta_{74}^2$  i  $\Delta_{13}^5$ ).

Wróćmy do torusa. Moje wątpliwości podsycił obraz torusa widzianego „z góry”, czyli na wprost dziury:

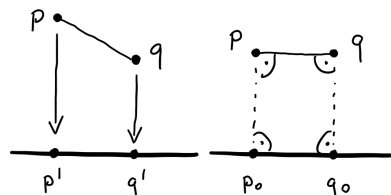


Są tu dwa koncentryczne okręgi i o żadnych kantach nie może być mowy. Coś więc jest na rzeczy!

Żeby rozstrzygnąć zagadkę, nie unikniemy formalnego opisu. Zaczniemy od znajdującego się w przestrzeni trójwymiarowej okręgu  $o$  (o promieniu  $R > 0$ ). Ustalając drugi promień  $r$ , możemy wprowadzić (pełny) torus  $\mathcal{T}$  jako zbiór tych wszystkich punktów, które są odległe od  $o$  o co najwyżej  $r$ ; inaczej mówiąc, jako  $r$ -otoczkę  $o$ . Oczywiście dobieramy  $0 < r < R$ , by powstały obwarzanek miał dodatnią grubość, a jednocześnie, by jego dziurka nie była zaklejona ciastem.

Można – choć nie trzeba – przekonać się, że dla okręgu  $o = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = R^2\}$  odpowiada to dokładnie zbiorowi  $\mathcal{T} = \{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leq r^2\}$ .

Rozważmy rzut prostokątny na wybraną przez nas płaszczyznę  $P$ , oznaczając przy tym obrazy punktów i figur znakiem prim ( $'$ ). Obraz  $\mathcal{T}$  przy rzutowaniu jest wtedy niczym innym jak  $r$ -otoczką  $o'$  (obrazu  $o$ ) rozumianą jako podzbiór  $P$ . To stwierdzenie brzmi jak tautologia, jednak należy je uzasadnić. Otóż jeśli punkt  $\mathbf{p}$  należy do torusa  $\mathcal{T}$ , to zgodnie z definicją istnieje punkt  $\mathbf{q} \in o$  spełniający  $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \leq r$ . Rzutowanie nie zwiększa odległości (może ją najwyżej zmniejszyć, zob. rysunek niżej), więc punkty  $\mathbf{p}' \in \mathcal{T}'$  i  $\mathbf{q}' \in o'$  również są odległe o  $r$  lub mniej. To dowodzi zawierania  $\mathcal{T}'$  w  $r$ -otoczce  $o'$ . Dowód przeciwnego zawierania jest podobny. Zaczynamy od punktu  $\mathbf{p}_0 \in P$  w  $r$ -otoczce  $o'$  oraz odpowiadającego mu punktu  $\mathbf{q}_0 \in o'$  (takiego, że  $|\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0| \leq r$ ), a następnie rozważamy punkt  $\mathbf{q} \in o$  spełniający  $\mathbf{q}' = \mathbf{q}_0$  oraz punkt  $\mathbf{p} := \mathbf{p}_0 + (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$  (czyli dopełniający  $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}$  do prostokąta). Pozostaje wówczas sprawdzić, że  $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_0$  oraz  $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \leq r$ .

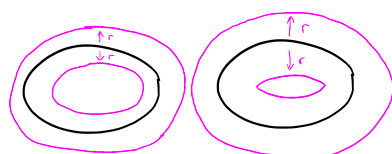


Podsumujmy:  $\mathcal{T}'$  jest  $r$ -otoczką  $o'$ . Od stworzenia poprawnego rysunku  $\mathcal{T}'$  dzieli nas więc dwa kroki, musimy ustalić:

- (1) Jaki kształt ma  $o'$ ?
- (2) Jak wygląda otoczka tego zbioru?

Szczęśliwie na pierwsze pytanie odpowiedzieliśmy już przy okazji analizy błędnego rysunku sfery – mianowicie  $o'$  jest rzutem prostokątnym okręgu, a więc elipsą.

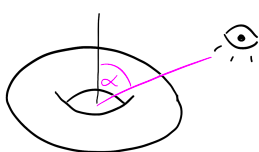




Rys. 1.  $r$ -otoczki elipsy dla różnych  $r$



Rys. 2. Koło rowerowe toczone po nierównym terenie



Rys. 3. Oznaczenie kąta obserwacji

## Zadania

1. Wykazać, że jeśli patrzymy na torus pod kątem  $\alpha$ , to dziurę widzimy dokładnie wtedy, gdy  $\cos \alpha < \frac{r}{R}$ .
2. Jaki kształt ma torus widziany z boku (czyli z kąta  $\alpha = 90^\circ$ )?
3. Nasz rysunek torusa różni się nieznacznie od otrzymanej otoczki elipsy, a mianowicie „uśmiech” wystaje nieco poza „czapeczkę”. Jakie jest matematyczne uzasadnienie wystającej części uśmiechu?
4. Wykazać, że zewnętrzny zarys torusa – tj. kształt, od którego zaczynamy rysunek – tak naprawdę nigdy nie jest elipsą, z oczywistym wyjątkiem obserwacji pod kątem  $\alpha = 0^\circ$ .
5. W przypadku  $r > R$  powstaje „torus”  $\mathcal{T}$  z zaklejoną dziurką, więc jego dowolny rzut jest gładki. Czy oznacza to, że sama bryła  $\mathcal{T}$  ma gładką powierzchnię?

Rozwiązania na str. 6.

## Wuja słuchać będziesz!

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Ssaki mają dość dobrze rozwinięte systemy intuicyjnego wyczuwania pokrewieństwa po zapachu. Świetny wykład Roberta Sapolsky'ego ze Stanford University na ten temat można obejrzeć tu: [https://youtu.be/P388gUPSq\\_I](https://youtu.be/P388gUPSq_I).

Wojciech CZERWIŃSKI\*

Przeczytałem jakiś czas temu w znakomitej książce Jareda Diamonda *The World Until Yesterday*, że w pewnej kulturze tradycyjnej małym chłopcem opiekuje się raczej wuj (brat matki) niż ojciec. Uzasadnieniem tego zwyczaju ma być fakt, że ojciec nigdy nie jest pewny, natomiast wuj jako krewny ze strony matki z pewnością dzieli z chłopcem wspólne geny. Z pewnością zgodziłby się z taką tezą Sienkiewiczowski Onufry Zagłoba, tłumaczył przecież Rochowi Kowalskiemu, że „gdzie ojca nie ma, tam, pismo mówi, wuja słuchać będziesz...”. Mimo wszystko trudno nie zapytać – czy taki zwyczaj faktycznie ma jakiś sens? A może lepiej – kiedy taki zwyczaj można uzasadnić z genetycznego punktu widzenia?

Wydaje się ewolucyjnie korzystne, żeby chłopcem opiekował się mężczyzna, który dzieli z nim możliwie najwięcej genów. Taki mężczyzna jest najbardziej podobny do chłopca, więc może mu przekazać schematy zachowania najbardziej adekwatne dla danego zestawu cech. Ale, co pewnie o wiele ważniejsze, taki mężczyzna wyczuwa, że jest z chłopcem spokrewniony (patrz uwaga na marginesie). A zatem można się spodziewać, że wyczuwając to pokrewieństwo, w wielu przypadkach będzie okazywał chłopcu więcej uwagi, co będzie oczywiście korzystne. Można więc zapytać: w jakich sytuacjach należy zakładać, że raczej wuj jest bliżej spokrewniony z chłopcem niż ojciec? Łatwo zauważyć, że takie założenie ma sens jedynie, jeśli naprawdę wiele dzieci nie jest genetycznymi dziećmi swoich domniemyanych ojców. Trochę dla intelektualnej rozrywki, a trochę dla próby zrozumienia tej tradycyjnej społeczności spróbujemy wyznaczyć liczbę  $p$  taką, że: jeśli mniej niż dla frakcji  $p$  dzieci domniemyany

**Rozwiązanie zadania F 1055.**

W dużej odległości od naładowanej kulki pole elektryczne  $\vec{E}$  pochodzące od ładunku  $q$  ma wartość:

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3},$$

$\epsilon_0$  oznacza przenikalność elektryczną próżni. Pole to spowoduje polaryzację dielektryka drugiej kulki i wyindukowanie w niej momentu dipolowego  $\vec{p}$  o wartości proporcjonalnej do wartości pola  $\vec{E}$ :

$$\vec{p} = \alpha\vec{E}.$$

Energia  $\mathcal{E}$  dipola  $\vec{p}$  wyindukowanego polem  $\vec{E}$  w polu  $\vec{E}$  wynosi  $\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot \vec{E}/2$ , czyli

$$\mathcal{E} = -\frac{\alpha}{2} E^2 \propto \frac{1}{r^4}.$$

Poszukiwana siła  $\vec{F}$  jest równa gradientowi  $\mathcal{E}$ :  $\vec{F} = -\nabla\mathcal{E} \propto 1/r^5$ , a więc  $k$ -krotne zwiększenie  $r$  spowoduje zmniejszenie siły przyciągania kulek  $k^5$  razy.

ojciec jest genetycznym ojcem, to wychowywanie chłopca przez wujka można wytłumaczyć mechanizmami ewolucji.

W tym miejscu powinniśmy uściślić nieco terminologię: ojcem będziemy od tej pory nazywać faktycznego genetycznego ojca dziecka, natomiast domniemanym ojcem będziemy nazywać męża matki, czyli człowieka, który może być lub nie być genetycznym ojcem. Zakładamy, że matka zawsze jest pewna, bo urodziła dziecko i dzieci nie są podmieniane po urodzeniu. Zakładamy również dla uproszczenia, że w rozważanej społeczności zawsze istnieje domniemany ojciec, co wydaje się dosyć naturalnym założeniem.

Dla obliczenia, ile średnio procent genów chłopiec ma wspólnych z domniemanym ojcem, a ile z wujem, będziemy stosować następujący model, który jest zresztą bardzo bliski rzeczywistości. Zakładamy, że dziecko otrzymuje dokładnie połowę swoich genów od matki i dokładnie połowę swoich genów od ojca. To, które geny matki i ojca odziedziczy dziecko, jest losowe, czyli pewna losowo wybrana połowa genów matki jest przekazywana dziecku, podobnie dzieje się z genami od ojca. A zatem dziecko dzieli zawsze 50% genów z matką i 50% genów z ojcem. Możemy w pewnym uproszczeniu myśleć, że każdy gen rodzica jest z prawdopodobieństwem 50% przekazywany dziecku i że dla każdego genu jest to losowane niezależnie. Nim zajmiemy się bardziej skomplikowanymi pokrewieństwami, obliczmy najpierw, ile genów dzieli pomiędzy sobą rodzeństwo. Jeśli Ania i Bartek są rodzeństwem, to wśród genów Ani odziedziczonych po matce średnio 50% jest wspólnych z Bartkiem oraz wśród genów Ani odziedziczonych po ojcu średnio 50% jest wspólnych z Bartkiem. A więc rodzeństwo dzieli średnio 50% swoich genów. Co ciekawe, o ile ze swoimi rodzicami dzielimy zawsze *dokładnie* 50% genów, to z rodzeństwem dzielimy *średnio* 50% genów, ale możemy dzielić mniej (powiedzmy 45%) lub więcej (powiedzmy 55%). A ile genów dzieli między sobą przyrodnie rodzeństwo? Średnio 25%, bo jest to średnio połowa genów pochodzących od wspólnego rodzica, a te od drugiego rodzica są różne.

Licząc pokrewieństwo z domniemanymi ojcem i wujem, przyjrzyjmy się najpierw przypadkom skrajnym. W społeczeństwie, w którym domniemany ojciec to zawsze genetyczny ojciec, chłopiec dzieli zawsze 50% genów z domniemanym ojcem, 50% genów z matką, a więc 25% genów z wujem (skoro matka i wuj są rodzeństwem, to dzielą 50% genów). Z kolei w społeczeństwie, w którym domniemany ojciec nigdy nie jest genetycznym ojcem, chłopiec oczywiście dzieli 0% genów z domniemanym ojcem. W takim społeczeństwie natomiast chłopiec dzieli 12,5% genów z wujem: istotnie, chłopiec dzieli 50% genów ze swoją matką, a ta dzieli 25% genów ze swoim przyrodnim bratem, czyli wujem chłopca (pomijamy tu mało prawdopodobny przypadek, że matka i wuj mają tego samego ojca, który nie jest ich domniemanym ojcem). Widać więc, że w zależności od tego, dla ilu procent dzieci ich domniemany ojciec jest ich genetycznym ojcem, bliżej spokrewniony może być albo domniemany ojciec, albo wuj. Niech  $p \in [0, 1]$  oznacza frakcję dzieci, dla których domniemany ojciec to ojciec. Chłopiec dzieli więc średnio  $p/2$  swoich genów z domniemanym ojcem. Chłopiec dzieli też 50% genów ze swoją matką. Jeśli matka oraz wuj mają wspólnego ojca (co jest prawdą z prawdopodobieństwem  $p^2$ ), to dzielą 50% genów, natomiast jeśli nie, to jako przyrodnie rodzeństwo dzielą 25% genów. A więc matka dzieli średnio ze swoim domniemanym bratem frakcję  $1/4 + p^2/4$  genów, co oznacza, że średnio chłopiec dzieli frakcję  $1/2 \cdot (1/4 + p^2/4) = 1/8 + p^2/8$  genów z wujem. A więc żeby wuj był średnio bardziej spokrewniony z chłopcem niż domniemany ojciec, musi zachodzić  $1/8 + p^2/8 > p/2$ , czyli innymi słowy  $p^2 - 4p + 1 > 0$ . Równanie  $x^2 - 4x + 1 = 0$  rozwiązujemy, obliczając  $\Delta = 16 - 4 = 12$ , a więc mamy

$$x \in \{(4 + \sqrt{12})/2, (4 - \sqrt{12})/2\} = \{2 + \sqrt{3}, 2 - \sqrt{3}\}.$$

Ponieważ  $p \in [0, 1]$ , to dostajemy  $p < 2 - \sqrt{3} < 0,268$ , czyli dla co najwyżej 26,8% dzieci ich domniemany ojciec był ich ojcem genetycznym. Czy tak było naprawdę w tej społeczności – trudno powiedzieć, ale to najlepsze wytłumaczenie, jakie zdołałem znaleźć. Matematyka, której użyliśmy, jest stosunkowo prosta, ale, jak widać, i taką czasem warto zastosować dla ciekawych moim zdaniem wniosków na temat świata, w którym żyjemy.

**Rozwiązanie zadania F 1056.**

Po połączeniu kul przez drucik prąd będzie płynął dotąd, aż przepływ ładunku nie doprowadzi do wyrównania potencjałów obu kul. Podczas przepływu prądu całkowity ładunek zgromadzony na obu kulach pozostaje stały. Ładunki zgromadzone początkowo na przewodnikach wynosiły:  $Q_1 = 4\pi\epsilon_0 r_1 U_1$ ,  $Q_2 = 4\pi\epsilon_0 r_2 U_2$ . Po ustaniu przepływu prądu potencjały obu kul będą równe. Przyjmijmy, że w stanie końcowym na kuli  $r_2$  zgromadzony jest ładunek  $Q$  (ładunek zgromadzony na cienkim druciku jest zaniedbywalnie mały). Mamy:

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{Q_1 + Q_2 - Q}{4\pi\epsilon_0 r_1}.$$

Oznacza to, że

$$Q = \frac{(Q_1 + Q_2)r_2}{r_1 + r_2}.$$

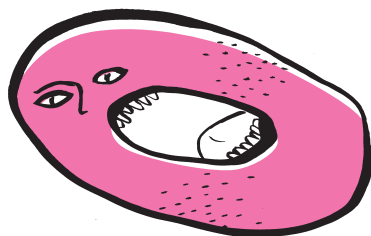
Podczas przepływu prądu w druciku wydzieli się ciepło  $\Delta\mathcal{E}$  równe różnicy energii początkowej ładunków i ich energii końcowej:

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E} &= \frac{Q_1 U_1}{2} + \frac{Q_2 U_2}{2} - \\ &\quad - \frac{QU + (Q_1 + Q_2 - Q)U}{2} = \\ &= 2\pi\epsilon_0 \left( r_1 U_1^2 + r_2 U_2^2 - \frac{(r_1 U_1 + r_2 U_2)^2}{r_1 + r_2} \right). \end{aligned}$$

Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy  $\Delta\mathcal{E} \approx 2,8\mu\text{J}$ .

\*Doktorant w Instytucie Fizyki PAN

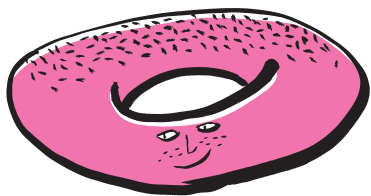
Na przełomie XX i XXI wieku nastąpił ogromny postęp w przygotowywaniu układów atomowych i manipulowaniu nimi. Z jednej strony rozwinięte zostały techniki pułapkowania gazów atomowych w małej przestrzeni za pomocą pól magnetycznych i laserów. Z drugiej strony wynaleziono i udoskonalono chłodzenie laserowe, pozwalające na schładzanie atomów do temperatur bardzo bliskich zera bezwzględnego (tak niskich, że nazwano je ultrazimnymi). Postęp ten umożliwił otrzymanie słynnego kondensatu Bosego–Einsteina (a później również tzw. zdegenerowanego gazu Fermiego) dla różnych pierwiastków. Co więcej, używając pól magnetycznych, można również zmieniać efektywną siłę oddziaływań pomiędzy atomami (opisuje to tzw. rezonans Feshbacha). Wszystko to pozwala na daleko idącą kontrolę nad stanem i właściwościami układu wieloatomowego. Parametrem, który nie był precyzyjnie kontrolowany w przeprowadzanych w przeszłości eksperymentach, była liczba atomów. Zmieniło się to w roku 2011, kiedy grupa profesora Selima Jochima z Heidelbergu opublikowała wyniki eksperymentu, w którym badacze pułpkowali kilka atomów (do 10), ściśle kontrolując ich liczbę.



Więcej o kondensacie Bosego–Einsteina pisali Krzysztof Pawłowski w  $\Delta_{14}^{10}$  i Kazimierz Rzążewski w  $\Delta_{16}^3$ .

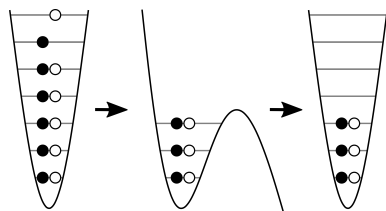
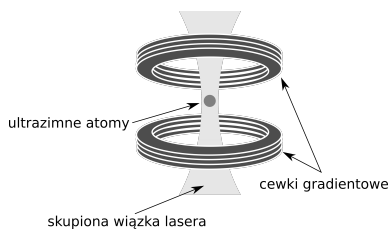
Aby wyjaśnić, jak uzyskano kontrolę nad liczbą atomów w pułapce, potrzebujemy wprowadzić pojęcie *atomów fermionowych*. Okazuje się, że wszystkie atomy można podzielić na dwa typy, posiadające zupełnie różne własności statystyczne, które można obserwować w bardzo niskich temperaturach. O typie atomu decyduje parzystość sumarycznej liczby protonów, neutronów i elektronów. Jeżeli całkowita liczba tych cząstek, z których składa się atom, jest parzysta, to wtedy wiele identycznych atomów może znajdować się w tym samym stanie. Tego typu atomy, zwane *bozonowymi*, tworzą w bardzo niskiej temperaturze kondensat Bosego–Einsteina. Jeżeli całkowita liczba cząstek jest nieparzysta, to identyczne atomy podlegają zakazowi Pauliego – podobnie jak elektrony w atomie – nie mogą znajdować się w tym samym stanie kwantowym. Takie atomy nazywamy *fermionowymi*. W bardzo niskiej temperaturze atomy fermionowe z dużym prawdopodobieństwem zajmują stany o najniższych możliwych energiach (po jednym atomie na stan). Taki układ nazywa się *zdegenerowanym gazem Fermiego*. Nazewnictwo, „gaz bozonowy” oraz „gaz fermionowy”, nawiązuje do dwóch rodzajów cząstek elementarnych: *bozonów* i *fermionów*, które posiadają opisane wyżej własności statystyczne.

W eksperymencie grupy profesora Jochima użyto atomów izotopu litu  ${}^6\text{Li}$  złożonych z 3 protonów, 3 neutronów i 3 elektronów, czyli atomów fermionowych. Co więcej, ich stan wewnętrzny był ściśle kontrolowany, w szczególności każdy z atomów mógł znajdować się tylko w jednym z dwóch rozróżnialnych stanów wewnętrznych. Atomy  ${}^6\text{Li}$  w tym samym stanie wewnętrznym są identyczne, natomiast atomy w różnych stanach nie są. Oznacza to, że w praktyce badacze pracowali z mieszaniną dwóch rodzajów atomów fermionowych i mogli mieć co najwyżej dwa atomy w jednym stanie. Sytuacja ta znowu przypomina problem elektronów w atomie, ponieważ elektron również może znajdować się w jednym z dwóch stanów wewnętrznych (może mieć jedną z dwóch wartości spinu).



O pułapkach optycznych i innych narzędziach zrobionych ze światła pisał Piotr Fita w  $\Delta_{20}^4$  i  $\Delta_{20}^5$ .

Na początku eksperymentu badacze dysponowali rezerwuarem zawierającym dużą liczbę schłodzonych atomów litu. Z tego rezerwuaru pobierali około 600 atomów i umieszczali je w mikropułapce utworzonej z pojedynczej skupionej wiązki laserowej. Działanie tej mikropułapki polega na tym, że oscylujące pole elektryczne w wiązce laserowej polaryzuje atomy i jeżeli częstotliwość lasera jest odpowiednio dobrana, to atomy są wciągane do obszaru, gdzie natężenie światła jest większe, czyli do centrum wiązki. W takiej pułapce optycznej szerokość pułapkującego potencjału może być różna w kierunkach równoległych i prostopadłych do osi wiązki lasera. Taka możliwość została wykorzystana do tego, aby przygotować pułapkę znacznie węższą w kierunkach prostopadłych. W konsekwencji uzyskano pułapkę, która dla małej liczby atomów efektywnie była jednowymiarowa (poszczególne stany okupowane przez atomy różniły się od siebie tylko w kierunku równoległym do wiązki).



Atomy w pułapce przed i po użyciu cewek gradientowych

Na tym etapie eksperymentu atomy w mikropułapce miały temperaturę około  $3 \mu\text{K}$  (mikrokelwinów), a liczba atomów w pułapce nadal nie była dokładnie określona. W następnym kroku wokół wiązki lasera włączano cewki wytwarzające gradient pola magnetycznego. Takie zmieniające się wzdłuż osi pole magnetyczne było odczuwane przez atomy jako dodatkowy, liniowy potencjał, który powodował częściowe otwarcie pułapki, co umożliwiało ucieczkę większości atomów. Tylko kilka atomów zajmujących najniższe poziomy energetyczne pozostawało w pułapce po wyłączeniu pola magnetycznego. Ponieważ wszystkie najniższe poziomy energetyczne w tak niskich temperaturach są zajęte z prawdopodobieństwem bliskim jedności, liczba pozostających w pułapce atomów mogła być kontrolowana z dużą precyzją poprzez odpowiednie dobieranie parametrów pola magnetycznego. Na koniec eksperymentu badacze potrzebowali zmierzyć, ile atomów pozostało w mikropułapce. Robili to, oświetlając atomy i mierząc fluorescencję, czyli światło wyemitowane przez atomy po wzbudzeniu światłem padającym, przy użyciu kamery CCD. Eksperyment i pomiar były powtarzane wielokrotnie w celu obliczenia prawdopodobieństwa wytworzenia układu o z góry zadanej liczbie atomów. Prawdopodobieństwo sukcesu zmieniało się z tą liczbą. Jeżeli na przykład zadaną liczbą atomów w układzie było 2, to taki układ uzyskiwano z prawdopodobieństwem 96%. Natomiast dla układu złożonego z 8 atomów było to 87%. Uzyskane prawdopodobieństwa były więc bardzo wysokie, zwłaszcza biorąc po uwagę, że był to pierwszy tego rodzaju eksperyment.

Tego typu techniki eksperymentalne mogą znaleźć zastosowanie w symulacjach kwantowych. Idea takich symulacji polega na tym, aby wykorzystać dobrze kontrolowalne układy kwantowe do symulowania innych układów kwantowych, takich które są zbyt trudne do badania w laboratorium, albo do modelowania na klasycznym komputerze. Układy ultrazimnych atomów, w których można precyzyjnie kontrolować zarówno liczbę atomów, jak i własności międzyatomowych oddziaływań, są idealnym kandydatem na takie kwantowe symulatory.



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1720.** Dodatnie liczby  $x_1, x_2, \dots, x_n$  spełniają nierówności

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 < \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{2} \quad \text{oraz} \quad x_1 + x_2 + \dots + x_n < \frac{x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3}{2}.$$

Udowodnić, że  $n > 50$ .

Rozwiązanie na str. 15

**M 1721.** Wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze  $p$ , dla których ciąg liczb  $1, 2, \dots, p$  (w tej kolejności) można podzielić na kilka (więcej niż jeden) bloków kolejnych liczb tak, że suma liczb w każdym bloku jest taka sama.

Rozwiązanie na str. 10

**M 1722.** Dany jest wielokąt wypukły  $\mathcal{F} = A_1 A_2 \dots A_n$ . Dla dowolnego punktu  $P$  wewnątrz wielokąta punkty  $B_i$  to punkty przecięcia prostych  $PA_i$  z obwodem  $\mathcal{F}$  (różne od  $A_i$ ). Wielokąt  $\mathcal{F}$  nazwiemy *zbalansowanym*, jeśli dla pewnego punktu  $P$  w jego wnętrzu punkty  $B_1, B_2, \dots, B_n$  leżą wewnątrz różnych boków  $\mathcal{F}$ . Rozstrzygnąć, czy  $\mathcal{F}$  musi być zbalansowany dla (a) parzystego  $n$ , (b) nieparzystego  $n$ .

Rozwiązanie na str. 21

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1055.** Dwie identyczne, niewielkie kulki, każda o średnicy  $d$ , wykonane są z dielektryka. Odległość środków kulek wynosi  $r \gg d$ . Jedną z kulek naładowano ładunkiem  $q$ . Ile razy zmaleje siła wzajemnego przyciągania kulek, gdy odległość ich środków zostanie zwiększona  $k$  razy?

Rozwiązanie na str. 3

**F 1056.** Dwa izolowane, oddalone od siebie, kuliste przewodniki o promieniach  $r_1 = 3 \text{ cm}$  i  $r_2 = 9 \text{ cm}$  naładowano do potencjałów  $U_1 = 1,5 \text{ kV}$  i  $U_2 = 3 \text{ kV}$ , a następnie połączono cienkim drucikiem. Ile ciepła wydzieli się w druciku?

Przenikalność elektryczna próżni  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

Rozwiązanie na str. 3



# O podciągach i palindromach słów kilka

Radostaw ŻAK\*

\* Student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Jagielloński

Autor prezentuje część wyników ze swojej pracy *Podciągi*, nagrodzonej złotym medalem (*ex aequo* z pracą *Szczególne podgrupy skończonego indeksu w grupie warkoczy  $B_3$*  autorstwa Bartłomieja Bychawskiego) w 43. Konkursie Uczniowskich Prac z Matematyki im. Pawła Domańskiego. (przyp. red.)

## Rozwiązania zadań z artykułu Czy dobrze rysuję obwarzanki?

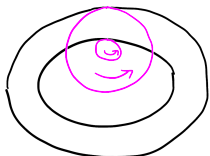
1. Dziury nie widzimy dokładnie wtedy, gdy  $r$ -otoczka elipsy  $o'$  wypełnia całe jej wnętrze, co z kolei ma miejsce, jeśli  $r$  jest nie mniejsze od krótszej półosi  $o'$ . Elipsa ta ma półosie długości  $R$  i  $R \cos \alpha$ , więc otrzymujemy warunek  $r \geq R \cos \alpha$ .

2. W takim przypadku płaszczyzna rzutu  $P$  jest prostopadła do płaszczyzny okręgu  $o$ , więc obserwowany obraz  $o'$  jest odcinkiem. A  $r$ -otoczka odcinka ma kształt parówki – prostokąta zakończonych półkami.

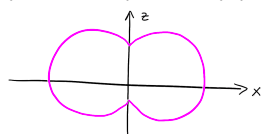


3. Punkty po przeciwnych stronach „wystającej części uśmiechu” leżą na rysunku blisko siebie, ale odpowiadające im punkty na właściwym torusie są daleko. Chodzi o to, że jedna część torusa niejako zasłania nam drugą.

4. Należy uzasadnić, że zewnętrzny zarys  $r$ -otoczki  $o'$  nie może być elipsą. Przyjmijmy, że elipsa  $o'$  ma półosie  $a > b$ . Wówczas od wewnętrznej strony toczy się po niej bez uskoków koło o promieniu  $\frac{b^2}{a}$ . Po jej  $r$ -otoczce toczy się więc koło o  $r$  większe, czyli o promieniu  $r + \frac{b^2}{a}$  – najłatwiej to zauważyć, łącząc dwa takie koła na sztywno i tocząc razem (jedno po elipsie, drugie po otoczce, jak na rysunku). Z drugiej strony, gdyby tą  $r$ -otoczką była elipsa, to musiałaby mieć półosie  $a + r$  i  $b + r$ , więc największe toczące się koło miałyby promień  $\frac{(b+r)^2}{a+r}$ . Ta wartość jest jednak ostro mniejsza od  $r + \frac{b^2}{a}$ .



5. Nie wynika – w dwóch punktach na osi „torusa” powstają wklęsłe dzióbki. Taki „torus” nadal jest bryłą obrotową, więc dzióbki łatwo zobaczyć w przekroju dowolną płaszczyzną zawierającą oś.



Na I etapie XXVI Olimpiady Informatycznej pojawiło się zadanie o mniej więcej takiej treści:

**Zadanie.** Dla liczby naturalnej  $N \leq 10^{18}$  wypisać słowo o dokładnie  $N$  różnych podciągach i nie więcej niż 1000 znakach.

Słowem jest tu dowolny ciąg znaków, zaś jego *podciąg* to dowolny ciąg, który możemy dostać, usuwając z naszego słowa pewne znaki, nie zmieniając przy tym kolejności pozostałych.

Dla wyrobienia sobie intuicji przed wyruszeniem w dalszą wędrówkę przedstawię kilka przykładów. Pojedyncza litera „a” ma dwa podciągi – siebie samą oraz słowo puste, czyli „” (będziemy je oznaczać przez 0). Słowo „baca” ma ich już 14 – w kolejności leksykograficznej są to: 0, a, aa, ac, aca, b, ba, baa, bac, baca, bc, bca, c, ca. Musimy uważać, by podciągów nie mylić z pojęciem, które nazywa się czasem *pod słowami* bądź po prostu podciągami spójnymi, dla których znaki brane do podciągu muszą tworzyć spójny fragment słowa. Zerkać na nasz przykład – chociażby „bc” jest podciągiem, ale już nie pod słowem, słowa „baca”.

Wróćmy do naszego zadania. Informatycy rozwiązali je informatycznie. Ja tak nie umiałem, więc wymyśliłem inny sposób – zająłem się słowami zawierającymi tylko dwa różne znaki A, B (i tylko takie będziemy rozważać w tym artykule).

**Definicja.** Dla dwóch względnie pierwszych liczb  $a, b \geq 1$  niech słowo  $\text{gen}(a, b)$  będzie zdefiniowane w następujący, rekurencyjny sposób:

$$\text{gen}(a, b) = \begin{cases} 0, & \text{jeśli } a = b = 1, \\ A \circ \text{gen}(a - b, b), & \text{jeśli } a > b, \\ B \circ \text{gen}(a, b - a), & \text{jeśli } b > a, \end{cases}$$

gdzie  $\circ$  oznacza konkatenację (czyli zwykle złączenie) słów.

W pewnym sensie słowo  $\text{gen}(a, b)$  jest zapisem algorytmu Euklidesa dla liczb  $a$  i  $b$  – w każdym momencie zapisujemy, od której z liczb jest odejmowana druga. Dla przykładu  $\text{gen}(11, 7)$  to ABABB – dostajemy kolejno pary (4, 7), (4, 3), (1, 3), (1, 2) oraz (1, 1), na której proces się kończy. Warto w tym momencie zwrócić uwagę, że przedstawioną procedurę można odwrócić: mając dowolne słowo dwuliterowe, możemy, czytając je od końca, dojść do generującej to słowo pary liczb względnie pierwszych. Na przykład dla słowa BABA mamy

$$(1, 1) \xrightarrow{A} (2, 1) \xrightarrow{B} (2, 3) \xrightarrow{A} (5, 3) \xrightarrow{B} (5, 8),$$

skąd  $\text{gen}(5, 8) = \text{BABA}$ .

Może nie być jasne, do czego słowa  $\text{gen}(a, b)$  będą nam w ogóle przydatne, ale pokazuje to następująca własność:

**Twierdzenie 1.** Słowo  $\text{gen}(a, b)$  ma dokładnie  $a + b - 1$  podciągów. Ponadto dokładnie  $a - 1$  z nich zaczyna się od A, zaś  $b - 1$  od B.

*Dowód.* Pierwsze zdanie wynika z drugiego, które znowuż jest symetryczne – wystarczy więc, że pokażemy część o liczbie podciągów zaczynających się od A. Dowodzimy indukcyjnie po długości  $\text{gen}(a, b)$ , dla słowa pustego nietrudno to sprawdzić. Jeśli  $b > a$ , to  $\text{gen}(a, b)$  ma na początku B, i usunięcie tej litery nie zmienia liczby podciągów zaczynających się od A, pozostawi zaś słowo  $\text{gen}(a, b - a)$ , które ma ich dokładnie  $a - 1$  z założenia indukcyjnego. Jeśli zaś  $a > b$ , to pierwszą literą  $\text{gen}(a, b)$  jest A. Każdy podciąg zaczynający się od A można zapisać tak, by składał się z tej właśnie pierwszej litery oraz jakiejś pozostałej części – która, jako iż  $\text{gen}(a, b) = A \circ \text{gen}(a - b, b)$ , będzie podciągiem  $\text{gen}(a - b, b)$ . Ich jest zaś, z założenia indukcyjnego,  $(a - b) + b - 1 = a - 1$ , czyli dokładnie tyle, ile chcemy.  $\square$

A zatem nasze zadanie ma bardzo proste rozwiązanie – dla danego  $N$  wybierzmy dowolne  $a$  względnie pierwsze z  $N + 1$  i zapiszmy  $\text{gen}(a, N + 1 - a)$ . I to prawie



wszystko. Prawie, bo musimy zatroszczyć się jeszcze o długość słowa, co w teorii jest trudniejsze niż w praktyce – da się wykazać, że większość słów otrzymanych w ten sposób ma długość  $O(\log N \log \log N)$ , ale dowód jest bardzo trudny.

Teraz jednak rozejrzyjmy się po nowych możliwościach, jakie otwiera przed nami powyższe twierdzenie. Wprowadźmy garść oznaczeń:  $P(\mathfrak{s})$  będzie oznaczało po prostu liczbę podciągów słowa  $\mathfrak{s}$ .  $P^A(\mathfrak{s})$  oraz  $P^B(\mathfrak{s})$  będą oznaczały liczbę podciągów słowa  $\mathfrak{s}$  zaczynających się odpowiednio od A i od B, zaś gdy będziemy zapisywali literę w indeksie dolnym:  $P_A(\mathfrak{s})$  i  $P_B(\mathfrak{s})$ , będziemy zliczali podciągi kończące się na odpowiednią literę – we wszystkich tych przypadkach wliczamy słowo puste. Nasze twierdzenie możemy teraz zgrabnie zapisać jako  $P^A(\text{gen}(a, b)) = a$ . W ten sposób dostajemy bijekcję między słowami o  $N$  podciągach a elementami  $\mathbb{Z}_{N+1}^*$ , czyli resztami z dzielenia przez  $N + 1$  względnie pierwszymi z  $N + 1$ . W jedną stronę jest to  $P^A(\cdot)$ , w drugą zaś  $a \mapsto \text{gen}(a, N + 1 - a)$ . Za darmo dostajemy więc, że słów o  $N$  podciągach zawierających co najwyżej dwa różne znaki jest dokładnie  $\varphi(N + 1)$ .

Przykład dla  $N = 8$ :  
 $1 \leftrightarrow \text{gen}(1, 8) = \text{BBBBBBBB}$   
 $2 \leftrightarrow \text{gen}(2, 7) = \text{BBBA}$   
 $4 \leftrightarrow \text{gen}(4, 5) = \text{BAAA}$   
 $5 \leftrightarrow \text{gen}(5, 4) = \text{ABBB}$   
 $7 \leftrightarrow \text{gen}(7, 2) = \text{AAAB}$   
 $8 \leftrightarrow \text{gen}(7, 2) = \text{AAAAAAA}$

Mając dane słowo  $\mathfrak{s}$ , możemy zapisać je od tyłu i dostać  $\bar{\mathfrak{s}}$ . Możemy także zamienić wszystkie litery A na B i *vice versa* – powstałe tak słowo oznaczymy przez  $\mathfrak{s}^*$ . Ostatnią opcją jest wykonanie obu tych operacji naraz; rezultat będziemy oznaczali przez  $\tilde{\mathfrak{s}}$ . Wszystkie te działania, jak nietrudno zauważyć, zachowują liczbę podciągów słowa – te symetrie muszą zatem odpowiadać pewnym symetriom  $\mathbb{Z}_{N+1}^*$ . Nie jest trudno zauważyć, że jeśli  $\mathfrak{s} = \text{gen}(a, b)$ , to  $\mathfrak{s}^* = \text{gen}(b, a)$ , ta sytuacja nie jest więc aż tak skomplikowana. Okazuje się, że i w drugim przypadku odpowiednia symetria nie jest trudna do zapisania.

**Twierdzenie 2.**

$$P^A(\mathfrak{s})P^A(\bar{\mathfrak{s}}) \equiv 1 \pmod{N + 1}.$$

Dla przykładu: dla naszego wcześniej wspomnianego słowa  $\mathfrak{s} = \text{ABABB} = \text{gen}(11, 7)$ , zapisując je od tyłu, dostaniemy  $\text{BBABA} = \text{gen}(5, 13)$ . Te słowa odpowiadają resztom, odpowiednio, 11 i 5. Mamy  $11 \cdot 5 \equiv 1 \pmod{18}$ , a zapisując inaczej:  $11^{-1} \equiv 5 \pmod{18}$ . Zatem odwracanie w znaczeniu potocznym i liczbowym jest, w pewnym (dziwnym) sensie, tym samym.

*Palindrom* to słowo, które wygląda tak samo od przodu jak i od tyłu. Poprzedni fakt daje nam dobry opis takich słów – odpowiadają resztom w  $\mathbb{Z}_{N+1}^*$ , które podniesione do kwadratu dają 1. W ten sposób na przykład dowiemy się, że każde słowo binarne o 23 podciągach jest palindromem, i nie tak trudno pokazać, że to największa liczba o tej własności. Prawdopodobnie wydawałoby nam się to zaskakujące, gdybyśmy usłyszeli o tym fakcie przed rozpoczęciem lektury niniejszego artykułu, ale teraz już domyślamy się, że jest to spowodowane tym, że każda odwracalna reszta modulo 24 podniesiona do kwadratu daje resztę 1.

Podobnie *antypalindromem* nazwiemy takie słowo  $\mathfrak{s}$ , że  $\mathfrak{s} = \tilde{\mathfrak{s}}$  – po odwróceniu go oraz zamianie liter A na B i *vice versa* dostaniemy wyjściowe słowo. Takimi słowami są na przykład  $\text{AABB}$  czy  $\text{ABBAAB}$ . Nietrudno zauważyć, że każdy antypalindrom ma parzystą liczbę liter – inaczej byłby problem ze środkową z nich – i że możemy go zapisać jako  $\mathfrak{s} = \mathfrak{t} \circ \tilde{\mathfrak{t}}$ .

Potrzebujemy jeszcze jednej obserwacji: jak wygląda liczba podciągów złączenia dwóch słów? Odpowiedź na to pytanie wyraża poniższy wzór:

$$P(\mathfrak{s} \circ \mathfrak{t}) + 1 = P_A(\mathfrak{s})P^B(\mathfrak{t}) + P_B(\mathfrak{s})P^A(\mathfrak{t}).$$

Dowód opiera się na przesuwaniu liter z  $\mathfrak{t}$  do  $\mathfrak{s}$  po kolei i pokazaniu, że prawa strona nie zmienia się przy tej operacji (co można zrobić, bo wiemy już, jak zmienia się

liczba podciągów odpowiedniego typu po dodaniu jednej litery).

Czas na finał. Weźmy dowolną liczbę pierwszą  $p$  postaci  $4k + 1$ . Wiemy już, że istnieje dokładnie  $p - 1$  słów binarnych o dokładnie  $p - 1$  podciągach. Możemy pogrupować je w czwórki  $\{\mathfrak{s}, \mathfrak{s}^*, \bar{\mathfrak{s}}, \tilde{\mathfrak{s}}\}$ . Taka czwórka może się zdegenerować, jeśli któreś dwa z tych słów są takie same, ale  $\mathfrak{s} \neq \mathfrak{s}^*$ , czyli  $\mathfrak{s}$  do tego celu musiałyby być palindromem albo antypalindromem. Palindromy mamy tylko dwa, tworzące jedną parę:  $\text{A} \dots \text{A}$  i  $\text{B} \dots \text{B}$ , oba po  $p - 2$  liter. Istotnie, palindromy odpowiadają rozwiązaniom równania  $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$ , czyli  $p \mid (x - 1)(x + 1)$  – jedyne opcje to  $x \equiv 1$  lub  $x \equiv -1 \pmod{p}$ .

W takim razie, ponieważ wszystkich słów jest  $4k$ , dla zachowania podzielności przez 4 musimy mieć jeszcze co najmniej jedną zdegenerowaną czwórkę, odpowiadającą  $\mathfrak{s}$  będącemu antypalindromem. Taki antypalindrom możemy zapisać jako  $\mathfrak{s} = \mathfrak{t} \circ \tilde{\mathfrak{t}}$ , i ze wzoru powyżej dostajemy

$$p = P_A(\mathfrak{t})P^B(\tilde{\mathfrak{t}}) + P_B(\mathfrak{t})P^A(\tilde{\mathfrak{t}}) = P_A(\mathfrak{t})^2 + P_B(\mathfrak{t})^2,$$

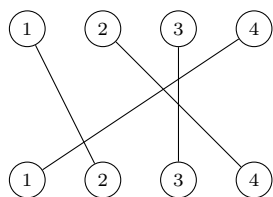
co oznacza, iż  $p$  jest sumą dwóch kwadratów.

Nie jest to może ani oryginalny, ani niespodziewany wynik, ale ciekawe, że można go otrzymać, wychodząc od czysto kombinatorycznych rozważań.

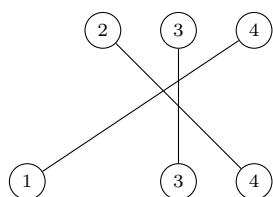
# O klasach permutacji

Wojciech PRZYBYSZEWSKI\*

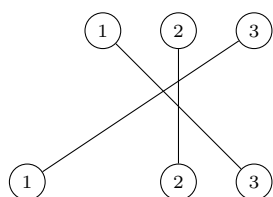
\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

W tym artykule będziemy rozważali permutacje zbioru  $n$ -elementowego, czyli funkcje  $\sigma : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ , które są bijekcjami. Dla ustalonego  $n$  zbiór wszystkich takich funkcji będziemy oznaczać przez  $S_n$ . Daną permutację można reprezentować na różne sposoby, na przykład poprzez wypisanie jej wartości na kolejnych elementach. Permutację  $\sigma \in S_4$  taką, że  $\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 3$  i  $\sigma(4) = 1$ , możemy zapisać jako 2431. W ten sposób możemy utożsamiać permutacje w  $S_n$  z  $n$ -elementowymi ciągami o różnych wyrazach ze zbioru  $\{1, \dots, n\}$ , dostając  $|S_n| = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 1 = n!$ .

Inny pomysł polega na narysowaniu dwóch rzędów liczb i połączeniu krawędziami każdej liczby z górnego rzędu z przyporządkowaną jej liczbą z dolnego rzędu. Rysunek 1 przedstawia permutację 2431.

Taki graficzny sposób prezentowania permutacji ma kilka zalet. Na przykład pozwala łatwo obliczyć złożenie permutacji, tj. dla danych permutacji  $\sigma, \tau \in S_n$  obliczyć permutację  $\tau \circ \sigma$ , która ma tę własność, że  $\tau \circ \sigma(k) = \tau(\sigma(k))$ . Inną jego zaletą jest możliwość zdefiniowania naturalnej relacji zawierania jednej permutacji przez drugą, w dość podobny sposób do relacji bycia podgrafem. Zastanówmy się, co się stanie, jeśli z rysunku 1 usuniemy jakąś krawędź wraz z jej końcami (na przykład tę między 1 na górze i 2 na dole). Dostaniemy wtedy rysunek 2. Teraz przenumerujmy po kolei wierzchołki na górze i na dole. Widzimy, że rysunek 3 przedstawia permutację 321  $\in S_3$ . Możemy więc stwierdzić, że permutacja 2431 zawiera permutację 321, co będziemy zapisywać  $321 \preceq 2431$ . Tę obrazkową definicję możemy sformalizować.

**Definicja 1.** Niech  $k \leq n$  będą dwoma dodatnimi liczbami całkowitymi i niech  $\sigma \in S_k$  i  $\tau \in S_n$  będą dwoma permutacjami. Jeśli istnieją takie  $1 \leq x_1 < \dots < x_k \leq n$ , że dla każdych  $1 \leq i < j \leq k$  warunek  $\sigma(i) < \sigma(j)$  zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi warunek  $\tau(x_i) < \tau(x_j)$ , to powiemy, że  $\tau$  zawiera  $\sigma$ , co zapiszemy  $\sigma \preceq \tau$ .

Czytelnik Zaznajomiony z definicją częściowego porządku natychmiast dostrzeże, że relacja  $\preceq$  spełnia jego aksjomaty. W szczególności zaznaczmy, że relacja  $\preceq$  jest przechodnia, tj. jeśli dla pewnych permutacji zachodzi  $\sigma \preceq \tau$  i  $\tau \preceq \psi$ , to także  $\sigma \preceq \psi$ . Dowód tego faktu pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Warto tutaj dodać, że według Vaughana Pratta (informatyka, którego Czytelnik Zainteresowany algorytmiką kojarzy na pewno z algorytmu KMP)  $\preceq$  zdaje się być jedynym porządkiem częściowym na permutacjach, który pojawia się w prosty i naturalny sposób. W tym artykule zajmiemy się pewnym problemem informatycznym, w którym pojęcie zawierania się permutacji okaże się pomocne.

## Permutacje na stosie

Załóżmy, że mamy na wejściu permutację z  $S_n$  zapisaną jako ciąg  $123 \dots n$  (tę permutację będziemy nazywać identycznością i oznaczać przez  $id_n$ ). Chcemy za pomocą jednego stosu przekształcić ją w jakąś inną permutację. W tym celu w każdym ruchu możemy:

- zdjąć liczbę ze szczytu stosu i dopisać ją do wyjściowej permutacji albo
- wziąć liczbę z początku wejściowej permutacji i umieścić ją na szczycie stosu.

Wykonujemy ruchy tak długo, aż wszystkie liczby z wejściowej permutacji zostaną przeniesione do wyjściowej permutacji. Przykładowy proces przekształcania 123 w 231 jest przedstawiony na rysunkach na marginesie.

W swojej książce *Sztuka programowania* Donald Knuth zadał następujące pytanie – jakie permutacje możemy uzyskać w opisany powyżej sposób z permutacji  $id_n$ ? Wiemy póki co, że z permutacji 123 możemy uzyskać 231. Zachęcam Czytelnika do ręcznego sprawdzenia, że możemy uzyskać także permutacje 123, 213, 132 i 321, ale nie możemy uzyskać 312. Okazuje się, że tę obserwację da się uogólnić, ujmując w następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 1.** Permutację  $\sigma \in S_n$  da się uzyskać z permutacji  $id_n$  przy użyciu jednego stosu w sposób opisany powyżej wtedy i tylko wtedy, gdy  $312 \not\preceq \sigma$ .





Dowód tego twierdzenia nie jest szczególnie skomplikowany, ale wymaga pewnych intuicji dotyczących procesu przekształcania permutacji z użyciem stosu. Zachęcam więc Czytelnika do samodzielnej próby udowodnienia powyższego twierdzenia, a dopiero potem do przeczytania poniższego dowodu.

Stos

(a) Zaczynamy z permutacją 123 na wejściu



*Dowód.* Najpierw pokażemy, że jeśli  $312 \preceq \sigma \in S_n$ , to  $\sigma$  nie da się uzyskać w opisany sposób. Załóżmy nie wprost, że  $\sigma$  jednak da się jakoś uzyskać. Skoro  $312 \preceq \sigma$ , to mamy takie  $1 \leq i < j < k \leq n$ , że  $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$ .

To daje nam, że liczby  $\sigma(j)$  i  $\sigma(k)$  muszą być zdjęte z wejścia przed  $\sigma(i)$ . Z drugiej strony, skoro  $i < j < k$ , to  $\sigma(i)$  musi być zdjęta ze stosu przed  $\sigma(j)$  i  $\sigma(k)$ . Nietrudno zauważyć, że liczby na stosie leżą posortowane, więc kiedy zdejmujemy  $\sigma(i)$  ze stosu, to  $\sigma(j)$  leży pod  $\sigma(k)$ . W związku z tym  $\sigma(k)$  będzie wypisana na wyjściu przed  $\sigma(j)$ , co jest w sprzeczności z tym, że  $j < k$ .

1  
Stos

(b) Zdejmujemy 1 z wejścia na stos



Teraz pokażemy, jak uzyskać permutację  $\sigma \in S_n$  taką, że  $312 \not\preceq \sigma$ . W tym celu wystarczy zastosować następujący algorytm. Po kolei dla  $j = 1, 2, \dots, n$  wkładamy na stos 0 lub więcej kolejnych liczb z wejścia, aż na jego wierzchołku pojawi się  $\sigma(j)$ . Wtedy liczbę tę zdejmujemy ze stosu i zapisujemy na wyjściu.

2  
1  
Stos

(c) Zdejmujemy 2 z wejścia na stos



Zauważmy, że ten algorytm nie zadziała tylko wtedy, gdy dojdziemy do jakiegoś  $j$  i liczba  $\sigma(j)$  będzie już na stosie, ale nie na jego szczycie. To znaczy, że wyżej od  $\sigma(j)$  będzie jakieś  $\sigma(k)$  dla pewnego  $k > j$ . Ponadto musi też być  $\sigma(k) > \sigma(j)$ , bo liczby na stosie są posortowane. Liczba  $\sigma(k)$  została umieszczona na stosie, kiedy rozważaliśmy pewne  $i < j$  i zachodziło  $\sigma(k) < \sigma(i)$ . Łącząc te nierówności, dostajemy  $i < j < k$  oraz  $\sigma(j) < \sigma(k) < \sigma(i)$ , czyli  $312 \preceq \sigma$ . To kończy dowód drugiej implikacji. □

### Klasy permutacji

1  
Stos

(d) Przenosimy 2 ze stosu na wyjście



Niech  $\mathcal{C}$  będzie dowolnym zbiorem permutacji. Powiemy, że  $\mathcal{C}$  jest *klasą permutacji*, jeśli jest zamknięty w dół, tj. spełnia następujący warunek:

dla każdego  $\sigma \in \mathcal{C}$  jeśli  $\tau \preceq \sigma$ , to  $\tau \in \mathcal{C}$ .

Pierwszym przykładem klasy permutacji jest po prostu zbiór wszystkich permutacji. Taką klasę permutacji nazwiemy niewłaściwą, zaś każdą inną będziemy nazywać właściwą.

3  
1  
Stos

(e) Zdejmujemy 3 z wejścia na stos



Naturalnym przykładem właściwych klas permutacji są zbiory permutacji, które nie zawierają ustalonej permutacji (czasem mówi się *unikają ustalonego wzorca*). Dla ustalonej permutacji  $\tau$  przez  $Av_n(\tau)$  (od angielskiego *avoid*) definiujemy zbiór tych wszystkich permutacji z  $S_n$ , które nie zawierają  $\tau$ .

Formalnie  $Av_n(\tau) = \{\sigma \in S_n : \tau \not\preceq \sigma\}$ . Przez  $Av(\tau)$  oznaczamy sumę  $Av_n(\tau)$  po wszystkich  $n$ , tj.  $Av(\tau) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Av_n(\tau)$ . Nietrudno zobaczyć, że dla dowolnego  $\tau$  zbiór  $Av(\tau)$  jest właśnie klasą permutacji.

1  
Stos

(f) Przenosimy 3 ze stosu na wyjście



To podejście można uogólnić i dla dowolnego zbioru permutacji  $T$  (być może nawet nieskończonego) przez  $Av_n(T)$  oznaczamy wszystkie te permutacje z  $S_n$ , które nie zawierają żadnej permutacji z  $T$ . Formalnie  $Av_n(T) = \{\sigma \in S_n : \forall \tau \in T \tau \not\preceq \sigma\}$ . Znow możemy napisać:  $Av(T) = \bigcup_{n=1}^{\infty} Av_n(T)$ . Jako zadanie dla Czytelnika pozostawiamy sprawdzenie następującej obserwacji – jeśli  $\mathcal{C}$  jest klasą permutacji, zaś  $T$  jest zbiorem wszystkich tych permutacji, które nie należą do  $\mathcal{C}$ , to  $\mathcal{C} = Av(T)$ .

Stos

(g) Przenosimy 1 ze stosu na wyjście

Na koniec tej części zauważmy jeszcze, że twierdzenie 1 mówi, że zbiór permutacji, które przy użyciu jednego stosu da się uzyskać z  $id_n$ , to dokładnie  $Av_n(312)$ .

### Zliczamy permutacje

Dość ciekawym problemem kombinatorycznym jest zbadanie, jak dla ustalonego zbioru permutacji  $T$  rośnie  $|Av_n(T)|$  wraz ze wzrostem  $n$ . Obliczmy teraz dokładnie  $|Av_n(312)|$ , wykorzystując nasze poprzednie rozważania o przetwarzaniu permutacji przy użyciu jednego stosu.

Zastanówmy się, jak w zwięzły sposób można opisać procedurę uzyskiwania permutacji 231 z permutacji 123. Mieliśmy do dyspozycji dwie operacje – wkładania z wejścia na stos ( $S$ ) i zdejmowania ze stosu na wyjście ( $X$ ). Ciąg



Zauważmy, że jeśli zamiast  $S$  i  $X$  pisalibyśmy  $($  i  $)$ , to poprawne ciągi operacji odpowiadają poprawnym nawiasowaniom.



O liczbach Catalana pisaliśmy w  $\Delta_{11}^{02}$  w artykule „Jak zaparkować samochód?” i w  $\Delta_{14}^{03}$  w artykule „Bardzo oszczędne drzewa”.



#### Rozwiązanie zadania M 1721.

Łatwo przekonać się, że  $p > 2$ . Oznaczmy przez  $b$ , gdzie  $1 < b < p$ , liczbę bloków, na jakie podzieliłmy nasz ciąg, i załóżmy, że suma w każdym takim bloku jest równa  $S$ . Wtedy

$$bS = 1 + 2 + \dots + p = \frac{p(p+1)}{2} \equiv 0 \pmod{p},$$

skąd  $p \mid S$ , gdyż  $p > b$ .

Weźmy teraz pod uwagę pierwszy blok liczb:  $1, 2, \dots, k$ , dla pewnego  $k < p$  o sumie  $S$  równej  $\frac{k(k+1)}{2}$ . W tej sytuacji  $p \mid S$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $p \mid (k+1)$  (gdzie  $k < p$ ), a zatem, ponownie korzystając z nierówności  $k < p$ , dostajemy  $k = p - 1$ . W związku z tym następny blok może zawierać tylko liczbę  $p$ , skąd i z równości sum wynika  $p = \frac{(p-1)p}{2}$ , a zatem musi być  $p = 3$ . Łatwo sprawdzić, że następujący podział  $\{1, 2\}, \{3\}$  liczb  $1, 2, 3$  spełnia warunki zadania.

operacji, który wykonaliśmy, możemy zapisać jako ciąg długości 6 składający się z 3 operacji  $S$  i 3 operacji  $X$ , konkretnie  $SSXSSX$ . Łatwo zauważyć, że procedurę uzyskiwania permutacji  $\sigma \in S_n$  z permutacji  $\text{id}_n$  możemy zapisać jako ciąg długości  $2n$  składający się z  $n$  operacji  $S$  i  $n$  operacji  $X$ . Ponadto nie możemy wykonać operacji  $X$ , kiedy stos jest pusty. W związku z tym w żadnym prefiksie takiego ciągu (czyli podciągu długości  $k$  składającego się z  $k$  pierwszych operacji) liczba  $X$ 'ów nie jest większa od liczby  $S$ 'ów. Ciągi spełniające te warunki nazwiemy *poprawnymi*. Zauważmy, że oczywiście każdy poprawny ciąg operacji opisuje jakąś procedurę, którą da się wykonać i która wyprodukuje jakąś permutację.

Rozważmy teraz dwa różne poprawne ciągi  $c_1, c_2$  i spójrzmy na pierwszą od lewej pozycję, na której się różnią. Jeden z nich ma wtedy operację  $X$ , drugi zaś operację  $S$ . Ten z  $X$ 'em wypisze na wyjście jakąś liczbę, która zostanie w tym drugim przykryta na wierzchołku stosu przez inną, co pokazuje, że  $c_1$  i  $c_2$  generują różne permutacje. Skoro każde dwa poprawne ciągi generują różne permutacje, to żeby obliczyć  $|\text{Av}_n(312)|$ , musimy policzyć, ile jest poprawnych ciągów długości  $2n$ . Przedstawimy tutaj tylko wskazówki, jak wykonać odpowiednie obliczenia, pozostawiając Czytelnikowi doprecyzowanie szczegółów (lub sięgnięcie do artykułu *Tożsamość Cauchy'ego, iloczyn Wallisa i wzór Stirlinga* z  $\Delta_{22}^8$ , gdzie szczegóły te są dokładnie przedstawione).

Oczywiście mamy  $\binom{2n}{n}$  wszystkich ciągów długości  $2n$  zawierających  $n$  operacji  $X$  i  $n$  operacji  $S$ . Policzymy, ile spośród nich nie jest *poprawnych*. W każdym takim ciągu możemy znaleźć pierwszą pozycję  $k$  z operacją  $X$  taką, że do pozycji  $k$  (włącznie z nią) liczba  $X$ 'ów jest większa od liczby  $S$ 'ów. Zamieńmy w prefiksie danego ciągu do tego  $X$ 'a włącznie wszystkie  $X$ 'y na  $S$ 'y, a wszystkie  $S$ 'y na  $X$ 'y. W ten sposób dostajemy ciąg, który zawiera dokładnie  $(n+1)$  operacji  $S$  i  $(n-1)$  operacji  $X$ . Zauważmy, że ten proces można odwrócić – dla każdego ciągu z  $(n+1)$   $S$ 'ami i  $(n-1)$   $X$ 'ami możemy znaleźć niepoprawny ciąg, w którym jest po  $n$  operacji  $X$  i  $S$ , z którego on powstał. Na przykład ciąg  $XXSXSSSXSSSS$  musiał powstać z ciągu  $SSXSSXXXXSSS$ . To daje nam, że wszystkich poprawnych ciągów jest:

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n} - \frac{n}{n+1} \binom{2n}{n} = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Jako ciekawostkę powiedzmy, że otrzymany wzór opisuje  $n$ -tą liczbę Catalana, oznaczaną  $C_n$ . Liczby te pojawiają się w naturalny sposób w różnych problemach kombinatorycznych, o których można by napisać wiele kolejnych artykułów.

### Hipoteza Stanleya–Wilfa

Udało nam się już udowodnić, że  $|\text{Av}_n(312)| = C_n$ . Okazuje się, co pokazali Donald Knuth i Percy MacMahon, że dla dowolnej permutacji  $\sigma \in S_3$  (nie tylko 312) zachodzi  $|\text{Av}_n(\sigma)| = C_n$ . Ogólnie jednak dla większych  $n$  nie ma analogicznych równości dla wszystkich permutacji z  $S_n$  – już dla  $S_4$  mamy  $|\text{Av}_6(1342)| = 512 \neq 513 = |\text{Av}_6(1234)|$ .

Wracając do  $S_3$  i liczb Catalana, można łatwo wykazać, że:

$$C_{n+1} = \frac{4n+2}{n+2} C_n,$$

co daje nam  $C_n \leq 4^n$ . Mamy więc  $|\text{Av}_n(\sigma)| \leq 4^n$  dla każdego  $\sigma \in S_3$ . Zwróćmy uwagę, że wszystkich permutacji w  $S_n$  jest  $n!$  zaś  $4^n < o(n!)$ , więc jest to znacząco lepsze oszacowanie od oszacowania naiwnego, przez liczbę wszystkich permutacji w  $S_n$ .

W późnych latach 80. XX wieku Richard Stanley i Herbert Wilf niezależnie postawili hipotezę, że dla dowolnego  $k$  i dowolnej permutacji  $\sigma \in S_k$  istnieje stała  $K$  taka, że  $|\text{Av}_n(\sigma)| \leq K^n$  dla każdego  $n$ . Hipoteza ta była otwarta przez kilkanaście lat, aż w końcu została udowodniona w 2004 roku przez Adama Marcusa i Gábor Tardosa. Mimo tak długiego czasu, który upłynął od postawienia hipotezy do jej rozwiązania, dowód przedstawiony przez Marcusa i Tardosa okazał się zaskakująco prosty i elegancki. Będzie on tematem kolejnej części tego artykułu, która zostanie opublikowana w następnym numerze *Delty*.

## Biotechnolog na wakacjach

Co roku nadchodzi ten sam krytyczny moment: wyjeżdżam na wakacje w miejsce nieodległe od Warszawy, ale do domku w głębokiej dolince, bez internetowego zasięgu. Trzeba więc pisać z głowy, czyli z niczego. Za rok będę miała połączenie światłowodowe, to może jakieś dodatkowe informacje do mnie dotrą...

W latach 70. poprzedniego stulecia umówiłam się sama ze sobą, że jestem biologiem molekularnym, wymiennie z biotechnolożką, choć studia skończyłam jako... fizjolog zwierząt! „Molekularny” jest nadal aktualny, okazuje się jednak, że biotechnologia może mieć dużo nowych znaczeń. W 1976 roku zadzwoniłam do jedynego wówczas w Polsce wydawnictwa książek popularnonaukowych z pytaniem, czy nie interesowałaby ich książka o biotechnologii. Pani redaktor zapytała: a co to takiego, a mnie minęła ochota na plany wydawnicze. Z satysfakcją odebrałam po roku telefon z tego samego wydawnictwa podejmującego moją ofertę. Książeczka nosi niewyszukany tytuł „Biotechnologia”, jest zielona, a na okładce ma sześcienne pomidora...

W tamtych czasach *bio-* oznaczało głównie pomysły, jak skonstruować odmianę jakiegoś mikroorganizmu wytwarzającego pożyteczną substancję, a *-technologie* to był przepis na wytwarzanie jej na dużą skalę. Pierwszy przypadek: do bakterii *E. coli* biotechnolodzy-genetycy wprowadzili gen ludzkiej insuliny, dzięki czemu bakteria wytwarzała ten hormon na skalę przemysłową (Genentech, Eli Lilly, 1978). Minęło dużo dni, tygodni i lat, zmieniały się stroje, swój interes komercyjny zauważyły wielkie koncerny, ale też małe firmy, i oczywiście liczne i różnorodne uczelnie wyższe. Ludzką insuliną leczono miliony ludzi. Stopniowo, wykorzystując te doświadczenia, opracowano wiele protokołów uzyskiwania leków białkowych w hodowlach różnych bakterii i drożdży, np. *Saccharomyces cerevisiae*. Publiczności procedura wydawała się bezpieczna. Biotechnologia stała się wspianiałym, podniecającym osiągnięciem nauki i techniki.

Kolejne sensacyjne wyniki pojawiły się wraz z opracowaniem roślin, do których w doświadczalnych laboratoriach wprowadzono obce geny, nadające np. cechę odporności na patogeny lub szkodniki. Szybko te nowe gatunki ochrzczono nazwą genetycznie modyfikowanych organizmów (GMO). Podstawy naukowe komplikował fakt, że struktura genów roślinnych była inna niż genów wprowadzonych przy konstruowaniu przez producenta. Ta nowa w przyrodzie kombinacja u podejrzliwych, ale niewykształconych w zakresie biologii konsumentów spowodowała wątpliwości i strach. Czy te obce geny podziałają negatywnie na zdrowie spożywających? może zmienią ich genotypy? może przeniosą się spontanicznie na chwasty?... Scenariuszy było dużo, także najbardziej nonsensowne. GMO wzbudziły nawet rozruchy uliczne, debaty parlamentarne, zmiany w prawie. Stopniowo wprowadzano w tej dziedzinie ograniczenia, wymogi zachowania bezpieczeństwa, a jednocześnie nie obserwowano żadnych skutków negatywnych dla konsumentów i biosfery. Pozostałością z tamtego okresu

(przełom wieków) są dopiski na etykietach żywności „nie zawiera GMO”. Soja odporna na herbicyd stosowana w paszach jest aktualnie tańsza od soi niemodyfikowanej.

Jednak, co łatwo przewidzieć, poważne wątpliwości biologiczne i etyczne wzbudziły wyniki badań możliwości modyfikacji genomu człowieka dziedziczonych lub ograniczonych do życia określonego osobnika. Te ostatnie to łatwiej akceptowane publicznie procedury lecznicze w wielu schorzeniach (sama jestem leczona w zakresie okulistycznym). W przypadku chorób genetycznych, dziedzicznych, poszukuje się technik umożliwiających terapię danego pacjenta i wykluczających przekazywanie kolejnym pokoleniom danej mutacji wywołującej zmiany chorobowe. W tych badaniach opór wielu biologów i etyków w krajach anglosaskich i Unii Europejskiej jest znaczny i badania te nie wychodzą poza eksperymenty na modelowych zwierzętach i izolowanych ludzkich komórkach i tkankach. Inna jest sytuacja w strefie zaawansowanych projektów azjatyckich, w Chinach, Korei Południowej, Japonii, poddawanych mniej rygorystycznym niż w USA i UE restrykcjom. Myślę, że sfera ta będzie nadal się rozwijać, ale też podlegać dalszej kontroli.

Rozpoczyna się formułowanie zakresu dopuszczalnych doświadczeń nad kontrolą aktywności genotypów ludzi i perspektyw ich modyfikacji. Ten etap wymaga dalszego rozwoju wielu nauk: biologii, technologii, informatyki czy filozofii. Pragnę zasygnalizować pojawienie się na polskim rynku książki profesora Uniwersytetu Jagiellońskiego, Łukasza Kamińskiego, „Mimowolne cyborgi” (Wydawnictwo Czarne) opisującej postępy i wyzwania współczesnej biotechnologii. W skrócie, możliwą do realizacji jest konstrukcja interfejsu mózg-komputer tak, żeby algorytm mógł kierować działaniem człowieka (nie wiem, czy jeszcze *sapiens*). Specjaliści w dziedzinie sztucznej inteligencji budują także mikroskopijne twory (Xenoboty), które można by nazwać żywymi robotami: wpuszczone do naszego ciała mogłyby diagnozować lokalną sytuację biochemiczną, naprawiać lub wręcz zmieniać przebieg zachodzących w nim reakcji.

Strach się bać! Komu podobne konstrukty mogłyby się przydać? Najczęściej uważa się, że najbardziej zainteresowani są wojskowi. W uproszczeniu mówi się o projektowaniu hybryd ludzi i sieci informatycznych. Takie istoty byłyby maksymalnie wydajne, sterowalne i sprawne. Co z nimi robić, gdy konflikt wojenny się skończy. Czy dałyby sobie wymontować niepotrzebne już czipy?

Biotechnologu, wracaj z wakacji.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

# Zagadkowe i złowróżbne komety

Lech FALANDYSZ

Pojawiają się na niebie – niektóre w czasie, gdy się ich spodziewamy, a inne zupełnie nieoczekiwanie. Najpiękniejsze są te, które mają dużą jasność i długi warkocz. Komety – skąd przybywają i dokąd zmierzają? Poćwiczmy na początku naszą wyobraźnię.

Załóżmy, że chcielibyśmy wykonać model Układu Słonecznego z zachowaniem skali odległości pomiędzy poszczególnymi planetami. W centrum modelu jest Słońce będące kulą o średnicy 1,09 m. W odległości 117 m od tej kuli znajduje się model Ziemi o średnicy 1 cm. Ta odległość odpowiada więc teraz jednostce astronomicznej (1 AU). Gdyby kulę „słoneczną” w opisanej przez nas skali umieścić pośrodku piłkarskiego stadionu, to kulka ziemską okrężałaby ją gdzieś na trybunach, pomiędzy miejscami dla kibiców.

**W rzeczywistości jednostka astronomiczna równa jest dokładnie 149 597 870 700 m. Jest to średnia odległości Ziemi od Słońca.**

Planetka Pluton jest w tym modelu kulką o średnicy około 2 mm krążącą w odległości około 4,5 km od środka stadionu. Przyjmując, że analizowanym przez nas stadionem jest PGE Narodowy w Warszawie, to pomiędzy parkiem Morskie Oko (w którym chwilowo przebywa Pluton) a parkiem Arkadia (ok. 6,5 km od centrum stadionu) znajdziemy pas przestrzeni zwany Pasem Kuipera. Obszar ten wypełniony jest drobnymi ciałami niebieskimi, część z nich to komety. Pod tą dość potoczną nazwą kryją się zamrożone relikty materii, która formowała się w początkach istnienia Układu Słonecznego.

## Czym są komety?

Komety znajdujące się w Pasie Kuipera (w liczbie setek milionów) mają zazwyczaj średnice od kilku do kilkuset kilometrów.

**Ciekawostka. Kometa jest ciałem stałym przy temperaturze poniżej około  $-240^{\circ}\text{C}$ .**

Są ciałami stałymi składającymi się ze skalnych brył zespolonych w całość lodem wodnym, amoniakalnym i metanowym oraz w niewielkich ilościach lodem z różnych innych związków chemicznych.

Komety mają zróżnicowane orbity. Te o orbitach w kształcie elipsy zbliżają się do wewnętrznych obszarów Układu Słonecznego, gdzie znajdują się planety najbliższe Słońcu (w tym i Ziemia). Nazywamy je kometami okresowymi, mają zamknięte orbity, a ich pojawienie się przeważnie można przewidzieć. Inne komety mają orbity w kształcie paraboli (orbity otwarte) i po okrążeniu Słońca oddalają się w przestrzeń kosmiczną. Tych nigdy więcej już nie zobaczymy – nazywane są kometami jednopojawieniowymi. Pozostałe komety przebywają stale w pasie Kuipera i nie wykazują „ochoty” do odwiedzin okolic Słońca.

Ale zdarza się, że na skutek zbliżenia lub zderzenia się dwóch komet ich orbity zmieniają się. Po takim incydencie nowa orbita poprowadzi komety w stronę

przestrzeni bliskiej Słońca, i po kilku wiekach być może zobaczymy ją na niebie.

Poza Pasem Kuipera niezmiernie rzadko można napotkać komety. Jednak prawie stukrotnie dalej istnieje ich kolejne nagromadzenie. Jest to kometarny Obłok Oorta. W naszym modelu znajduje się on w odległości około 1100 km od metrowej kuli (naszego modelowego Słońca) położonej pośrodku stadionu.

**Zakładając, że Słońce o średnicy 1,09 m wciąż jest na stadionie Narodowym w Warszawie, obłok Oorta zobaczymy mniej więcej tam, gdzie leży Moskwa lub Luksemburg.**

Są tam setki miliardów komet, ale rzadko zdarza się, aby któraś z nich przybyła w okolice Słońca.

## Komety zbliżające się do Słońca

W miarę jak kometa zbliża się do Słońca, otrzymuje coraz więcej energii promieniowania i coraz intensywniej działa na nią wiatr słoneczny. W odległości od Słońca mniejszej niż 2 AU zaczyna sublimować lód kometarny. Wokół komety gromadzi się, powiększa i gęstnieje gazowa otoczka. Z czasem może osiągnąć ona duże rozmiary, nawet większe od Słońca! Słoneczne światło oraz wiatr działają na pył i cząsteczki gazu otaczające komety. Ciśnienie wywierane na pył powoduje, że oddala się on od otoczki, tworząc długi i wygięty warkocz. Zjonizowane światłem cząsteczki również oddalają się od otoczki, tworząc drugi, dłuższy warkocz (widziano też komety z kilkoma warkoczami). W ten sposób powstaje znany nam obraz komety. Jasna otoczka zwana jest głową komety. W jej centrum znajduje się jądro komety. Od głowy komety rozciągają się warkocze długości nawet do kilkudziesięciu milionów kilometrów.

**Niektórzy zamiast słowa „warkocz” używają określenia „ogon komety”. Ale jeśli kometa ma ogon, to zamiast głowy należałoby użyć innej nazwy. Wolę, gdy kometa ma głowę z warkoczem, a nie „coś” z ogonem.**

Zdarza się, że jądro komety rozluźnia się, gdy lodowe spoiwo zaczyna się topić. Wtedy mnóstwo małych skał luźno pędzi obok siebie, otaczając skalne jądro komety. Po ominięciu Słońca kometa stygnie, jej głowa i warkocz zmniejszają się i wreszcie, gdzieś poza orbitą Marsa, zanikają. Przy następnym powrocie komety luźne skaliste bryłki są już daleko od siebie i część z nich pod wpływem pola grawitacyjnego Ziemi wpada do atmosfery ziemskiej. Powstaje wówczas piękny efekt „spadających gwiazd”. Są to tzw. roje meteoroidów.

Jako jeden z pierwszych połączył te zjawiska austriacki miłośnik astronomii Wilhelm Biela. W 1826 roku odkrył on komety. Gdy kometa ta powróciła w 1846 roku, zaobserwował jej podział na dwie części, które powoli oddalały się od siebie, będąc prawie na takiej samej orbicie. Każda z tych części miała głowę i warkocz. Przy jednym z następnych powrotów komety odległość między nimi wynosiła już 2,4 mln km. Później rozpadły się, a w roku 1877 zamiast powrotu



komety w ziemskiej atmosferze zaobserwowano gęsty „deszcz spadających gwiazd”.

### Zwiastunki nieszczęść

W starożytności i w średniowieczu nie wiadomo, czym są komety. Sądzono, że są to zjawiska zachodzące w atmosferze. Co więcej, obawiano się ich, gdyż miały zapowiadać nieszczęścia, kataklizmy, epidemie, napaści, przegrane wojny oraz śmierci książąt i królów. Komety miały przepowiedzieć śmierci m.in. cesarza rzymskiego Konstantyna, proroka Mahometa i króla angielskiego Ryszarda. I chociaż nieszczęścia zdarzały się równie często, gdy komet nie widziano, to jednak ich widok był w przekonaniu ludzi wróżbą złą. Dowodów było niemało. Dla przykładu już w starożytności, w 373 roku p.n.e. na niebie widać było komety podzieloną na 2 części. Niedługo po tym morze pochłonęło dwa achajskie miasta – Bure i Helice. Pisał o tym grecki historyk Eforos. Podczas pogrzebu Juliusza Cezara, nad Rzymem widoczna była duża kometa – niechybnie zapowiadająca nadchodzące nieszczęścia. Rzymski poeta Owidiusz pisał, iż Rzymianie widząc komety, wierzyli, że to dusza Juliusza Cezara została przeniesiona przez Wenus na niebo.

W 837 roku, gdy we Francji panował Ludwik Pobożny, ukazała się kometa, która później rozwinęła duży warkocz. Wzbudziła powszechne przerażenie, a niespokojny król obawiał się utraty tronu, choroby, a nawet śmierci. Radził się więc biskupów, a ci kazali mu modlić się, budować kościoły i klasztory. Wszystko to zrobił, ale i tak trzy lata później zmarł.

Śmierć zapowiedziana przez pojawienie się komety nie ominęła również naszych królów. Polski dziejopisarz Jan Długosz napisał o komecie widzianej w 1024 roku. Miała ona zapowiadać śmierć księcia Bolesława Chrobrego. Jak wiemy, król zmarł w 1025 roku, dwa miesiące po swojej koronacji.

Jednak komety były zwiastunami nie tylko nieszczęść (a przynajmniej nie dla wszystkich). W 1066 roku kometa mocno zaniepokoiła księcia Normandii Wilhelma I Zdobywcę. Nadworni astrologowie w trosce o swoje głowy prognozowali księciu, że kometa jest dobrym dla niego znakiem. W tym samym roku książę wyruszył do brzegów Anglii, wygrał bitwy, zajął Londyn i w następnym roku koronował się na króla Anglii. Jeszcze przez 20 lat sprawował silne rządy. Kronikarze wówczas pisali: „Normanowie prowadzeni przez komety podbili Anglię”.

Jedna z komet wpłynęła dość poważnie na bieg historii. Karol V, cesarz niemiecki i król Hiszpanii, przeraził się komety, która pojawiła się w 1556 roku. Ze strachu wyrzekł się korony. Tron cesarski Niemiec oddał bratu, a Hiszpanię synowi. Sam zaś zamknął się w klasztorze, oczekując śmierci. Zupełnie inną postawę wobec tej samej komety przyjął portugalski król Alfons VI, który widząc ją w roku 1664, wcale się nie przeraził. Wyskoczył przed pałac, krzychał na nią, wyzywał najgorszymi słowami i groził pistoletem. Widocznie

odniosło to skutek, gdyż po pewnym czasie kometa przestała się ukazywać, a król żył jeszcze długo.

Komet obawiano się jeszcze w XX wieku. Gdy w 1910 roku pojawiła się kometa Halleya, w Ameryce sprytni ludzie postanowili zrobić na niej interes. W gazetach ukazały się opinie, że Ziemia znajdzie się w warkoczu komety, a jej wyziewy będą trujące. Reklamowano wtedy pastylki (po dolarze za sztukę), które miały chronić przed kometarnym zatruciem.

### Współczesne badania komet

W czasach współczesnych wiemy, czym są komety, i nie obawiamy się ich. Przeciwnie – spieszymy na obserwację komety, która się pojawiła i wzbogaca swym pięknym gwiazdny firmament. Tak jak to miało miejsce w 1986 roku, gdy ponownie na niebie pojawiła się Kometa Halleya.

*Kometa Halleya ma jądro o wymiarach 16 × 8 km. Pojawia się co około 76 lat i po raz kolejny zobaczymy ją w lipcu 2061 roku. To od niej pochodzą roje meteorytów o nazwach „Akwaridy” i „Orionidy”.*

W 1986 roku w jej pobliżu „przeleciało” kilka sond kosmicznych – 2 japońskie i 2 rosyjskie. Ale więcej danych o tej komecie uzyskano dzięki sondzie kosmicznej „Giotto” wysłanej przez Europejską Agencję Kosmiczną (ESA) w 2009 roku. Sonda ta znalazła się w odległości zaledwie 600 km od jądra komety! Okazało się, że powierzchnia jądra komety jest bardzo ciemna i odbija zaledwie 3% światła słonecznego. Kolejnym ogromnym krokiem w badaniu komet było wysłanie w 2014 roku sondy kosmicznej Rosetta. Znalazła się ona blisko komety 67P, a jej lądownik osiadł na powierzchni komety w celu przeprowadzenia doświadczeń naukowych.

Możemy też obserwować komety spadające na inne planety. W 1994 roku 8 dużych odłamków komety Shoemaker-Levy 9 uderzyło w atmosferę Jowisza.

*Być może kibice piłkarscy wyciągną z nazwy wniosek, że jest to kometa Lewandowskiego.*

Każde z tych uderzeń było spektakularną eksplozją. Odłamki komety dostarczyły do atmosfery Jowisza takich związków chemicznych, jak: dwusiarczek węgla, siarka, siarkowodór i amoniak.

Do dzisiaj komety są nieco zagadkowe, a kolejne misje kosmiczne starają się zbadać ich cechy fizyczne i pochodzenie. Do tej pory nie przeanalizowano wszystkich danych zebranych przez sondę Rosetta, ale wydaje się, że komety to pozostałości z początków formowania się Układu Słonecznego. Możemy w takim razie „użyć” komet jako kosmicznych świadków narodzin naszego Układu. Jeszcze wciąż wiele badań i odkryć przed nami, jednak jedno jest pewne – komety możemy podziwiać, badać, ale nie musimy się ich bać.

Artykuł powstał na podstawie książek: A. Marks, „Pod znakiem komety”, Wyd. Śląsk, 1985, R. K. Janiczek, J. Mietelski, M. Zawilski, „Kalendarz astronomiczny na XXI wiek”, str. 136, Wyd. Prószyński i S-ka, M. H. Malewicz, „Zjawiska przyrodnicze w relacjach dziejopisarzy polskiego średniowiecza”, Polska Akademia Nauk, 1980, P. Artymowicz, „Astrofizyka układów planetarnych”, str. 326 i 327, PWN, 1995; oraz czasopisma „Copernicus”, Wyd. Eaglemoss Polska sp. z oo. Izabelin.

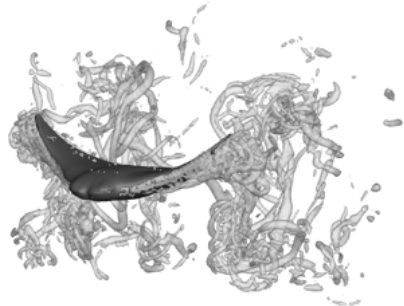
# Hydrodynamika i topologia

Grzegorz ŁUKASZEWICZ\*, Krzysztof MIZERSKI\*\*

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski  
 \*\* Instytut Geofizyki, Polska Akademia Nauk



Wir powietrzny (rurka wirowa) w tornadzie



Ryba płaszczka i struktury węzłowe rurek wirowych w wodzie wywołane jej ruchem

Hydrodynamika ma głębokie związki z topologią, i to od dawna, zanim jeszcze powstała nazwa „topologia” (zob. *Leonardo da Vinci i topologia*,  $\Delta_{22}^4$ ). Celem tego artykułu jest zwrócenie uwagi Czytelnika na współczesne powiązania tych dwóch dziedzin, które są ważną częścią badań hydrodynamicznych, mającą własną nazwę – „hydrodynamika topologiczna”.

Opowiemy o związkach hydrodynamiki z teorią węzłów (dziś częścią topologii), dla rozwoju której poważne motywacje znajdujemy w rozważaniach dziewiętnastowiecznych uczonych (takich jak Kelvin, Maxwell, Tait), między innymi właśnie w kontekście badań ruchu płynów, ale też elektromagnetyzmu i ogólniej – budowy materii (zwłaszcza wirowej teorii atomu Kelvina) [Epple].

Rozważmy model płynu nielepkiego i nieściśliwego, o stałej gęstości, wypełniającego całą dostępną przestrzeń. Można taki płyn rozważać w języku pola wektorowego prędkości płynu  $\vec{v}$  i ciśnienia płynu  $p$ , badając dynamikę pola prędkości płynu przy użyciu równania Eulera (zob. artykuł autorów w  $\Delta_{22}^5$ ). Alternatywnie, płyn można opisać poprzez pole wektorowe prędkości  $\vec{v}$  i pole wektorowe wirowości płynu  $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$  (o którym niżej), sięgając po równania opisujące dynamikę tego ostatniego. Okazuje się, że to drugie podejście jest bardzo owocne i pozwala na zdefiniowanie pewnych niezmienników topologicznych ruchu płynu. Zajmiemy się tu jednym z nich, a mianowicie *skrętnością* (*helicity*).

Wirowość  $\vec{\omega}$  pola wektorowego prędkości to nowe pole wektorowe, które opisuje rotację cząsteczek płynu wywołaną jego ruchem. Gdy stoimy na moście nad rzeką i patrzymy w dół jej nurtu, to możemy zaobserwować, że przy prawym brzegu ruch jest wolniejszy niż w głównym nurcie, stąd cząsteczki płynu obracają się tu w prawo, podobnie przy lewym brzegu, ale z tą różnicą, że tam cząsteczki obracają się w lewo. Wirowość to po prostu dwukrotność prędkości kątowej obrotu cząsteczek w płynie. Jest to wielkość określona osobno dla każdego punktu obszaru przepływu, a gdy prędkość płynu zmienia się w czasie, to również wirowość zależy od czasu.

Sama wirowość ma bardzo ważne dla zrozumienia hydrodynamiki własności – odkryte przez Williama Kelvina i Hermanna Helmholtza w połowie XIX wieku – mówiące o niezmiennikach ruchu. Będziemy z nich korzystać w dalszej części artykułu.

Odpowiednikiem pola wirowości w elektromagnetyzmie jest pole magnetyczne  $\vec{B}$ , stąd zainteresowanie nim Jamesa Maxwella i Williama Kelvina badających analogie pomiędzy hydrodynamiką a elektromagnetyzmem. Okazuje się, że pola wirowości  $\vec{\omega}$  oraz indukcji magnetycznej  $\vec{B}$  w przypadku płynów przewodzących prąd elektryczny (jak np. płynne żelazo czy plazma) spełniają analogiczne równania, zatem mając intuicje w zakresie dynamiki jednego z tych pól, można lepiej zrozumieć pewne aspekty dynamiki drugiego z nich.

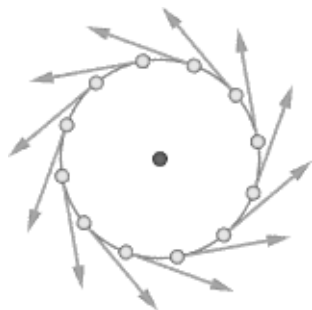
Ważnym pojęciem wiążącym hydrodynamikę (magnetohydrodynamikę) z topologią jest *skrętność* (odpowiednio: *skrętność magnetyczna*) ruchu płynu w obszarze  $V$ , zdefiniowana jako

$$\mathcal{H} = \int_V \vec{v} \cdot \vec{\omega} \quad (\text{skrętność}), \quad \mathcal{H}_M = \int_V \vec{A} \cdot \vec{B} \quad (\text{skrętność magnetyczna}).$$

$\vec{A}$  jest tu potencjałem wektorowym – analogonem wektora prędkości w hydrodynamice – a pole magnetyczne  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  odpowiada wirowości. Wielkości  $\mathcal{H}$  i  $\mathcal{H}_M$  są niezmiennikami ewolucji czasowej  $t$ , jak pokażemy poniżej, wiążą się z zachowywaniem topologicznych własności linii wirowości w przepływach.

Co mamy przez to rozumieć? Skupmy się na hydrodynamice.

Jeśli np. ruch płynu jest płaski,  $\vec{v} = (v_1, v_2, 0)$ , to wektor wirowości ma postać  $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ , tzn. jest prostopadły do płaszczyzny ruchu i  $|\omega|$  jest dwukrotnością

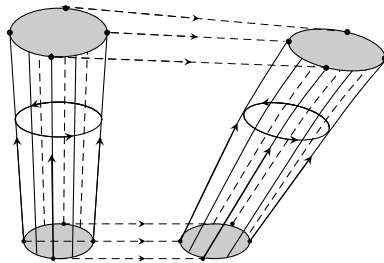


Pole wektorowe prędkości  $\vec{v}$  wokół rurki wirowej skierowanej prostopadle do płaszczyzny (por. zdjęcie tornada powyżej)

wartości prędkości kątowej obrotu hipotetycznej cząsteczki znajdującej się w danym punkcie przepływu. Zauważmy, że w przypadku takiego ruchu jego skrętność jest zerowa niezależnie od wielkości  $|\omega|$ , gdyż iloczyn skalarny wektorów prostopadłych jest równy zero.

Prosty przykład ruchu o niezerowej skrętności opisuje pole prędkości zadane w punkcie  $(x, y, z)$  jako  $\vec{v} = (-y, x, 1)$ . Składowa ruchu  $(-y, x, 0)$  odpowiada za obrót w płaszczyźnie  $xy$ , a składowa  $(0, 0, 1)$  za jednostajny ruch prostopadle do tej płaszczyzny. Złożenie tych dwóch ruchów daje ruch spiralny prawoskrętny. Jednocześnie możemy w tym przypadku obliczyć, że  $\vec{\omega} = (0, 0, 2)$ , więc skrętność ruchu jest dodatnia ( $\vec{v} \cdot \vec{\omega} = 2$ ). Gdybyśmy rozważyli  $\vec{v} = (-y, x, -1)$  z przeciwnym znakiem na ostatniej współrzędnej, to wówczas ruch byłby lewoskrętny, a skrętność ujemna. Ta geometryczna asymetria została zauważona przez Kelvina i nazwana *chiralnością* – obiekt chiralny to taki obiekt, który nie jest identyczny ze swoim odbiciem zwierciadlanym. Zjawisko chiralności jest powszechne w przyrodzie (i niejednokrotnie było opisywane na łamach *Delty*, patrz lista artykułów na marginesie). Warto zaznaczyć, iż skrętność jest wyznacznikiem chiralności (czyli braku symetrii odbiciowej), innymi słowy niezerowa skrętność oznacza chiralność przepływu.

W lustrzanym świecie cząsteczek  $\Delta_{14}^6$ ,  
Co zobaczyła Alicja po drugiej stronie  
lustra?  $\Delta_{17}^5$ ,  
Jakie fale nas kręcą?  $\Delta_{18}^2$ ,  
Jak zrobić z fal pułapkę?  $\Delta_{18}^3$ ,  
O chiralności  $\Delta_{22}^1$ .



Rurka wirowa unoszona przez przepływ, w chwilach  $t = t_1$  i  $t = t_2$

Rozważmy teraz pewien obszar  $V_0$  wypełniony w chwili początkowej płynem, np. dość dużą kulę o tej własności, że na jej brzegu  $S_0$  wektor wirowości jest styczny do  $S_0$ . W dowolnej późniejszej chwili  $t$  obszar  $V_0$  może ulec zniekształceniu do  $V_t$  (mówiąc językiem technicznym, ruch poddaje obszar *homeomorfizmowi*  $V_0 \rightarrow V_t$ ), ale twierdzenie Helmholtza mówi, że własność styczności wektora wirowości do obrazu  $S_0$  pozostanie zachowana. Korzystając z tej własności oraz równania Eulera, wraz z twierdzeniem Kelvina o transporcie i twierdzeniem Greena, da się wykazać, że całkowita skrętność  $\int_{V_t} \mathcal{H}$  określona wyżej nie zależy od czasu, czyli jest niezmiennikiem ruchu.

Co ciekawe, zaobserwować to mógł już sam Kelvin, dysponując wspomnianymi twierdzeniami, ale mimo to w literaturze pojęcie skrętności pojawiło się dopiero w 1958 roku, też nie do końca zauważone przez następne 10 lat. Jego znaczenie jako niezmiennika topologicznego odkrył dopiero Keith Moffat w 1969 roku w kontekście ewolucji i oddziaływań struktur wirowych.

Wyobraźmy sobie *rurki wirowości*, czyli struktury wirowe stworzone z przylegających linii wirowości (takie jak na rysunku obok lub rysunku z płaszczką). Ponieważ linie wirowości są wmrózone w przepływ, tzn. unoszone przez przepływ (zgodnie z twierdzeniem Helmholtza), rurki pozostają rurkami wirowości w ewoluującym przepływie. Z wmrózenia wynika także, że rurki z „połączeniami” oraz „węzłami” (czyli „spiecione”) są także wmrózone i unoszone przez przepływ poprzez homeomorfizmy, zatem zachowują przynależność do topologicznych klas równoważności. Innymi słowy: typy węzłów i połączeń nie zmieniają się – wykluczone jest na przykład, by dwie splecione rurki się rozplotły. Ponadto z nieściśliwości przepływu wynika zachowanie objętości (a więc i masy) rurek strumieniowych, czyli objętość rurek jest również niezmiennikiem ewolucji. Kolejnym niezmiennikiem (będącym treścią twierdzenia Kelvina) jest strumień wirowości przez powierzchnię przekroju poprzecznego w dowolnym punkcie. Stąd nazwa – rurki strumieniowe. Do kolekcji fizycznych niezmienników poza wymienionymi (całkowita skrętność, objętość i strumień wirowości w rurkach) należy dodać jeszcze całkowitą energię – przy założeniu, że płyn jest idealny, brak w nim tarć lepkich powodujących dyssypację energii. Naturalnie powstaje pytanie: w jaki sposób te fizyczne niezmienniki są związane z niezmiennikami topologicznymi, czyli np. rodzajami węzłów czy złączeń lub liczbą złączeń?

Badaniem ewolucji topologicznych struktur rurek wirowych zajmuje się wspomniana na początku hydrodynamika topologiczna. Najprostszym przykładem jest rozciąganie – jeśli mamy rurkę w kształcie torusa, który zostanie rozciągnięty, czyli zwiększy swój obwód, konieczność zachowania strumienia i objętości rurki skutkuje zmniejszeniem się pola poprzecznego torusa



#### Rozwiązanie zadania M 1720.

Nierówności można zapisać w równoważnej postaci

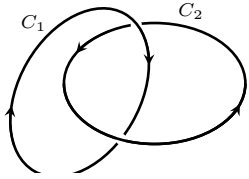
$$4(x_1^2 + \dots + x_n^2) < 2(x_1 + \dots + x_n) < x_1^3 + \dots + x_n^3,$$

z której wynika, że przynajmniej jedna z liczb  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (niech to będzie  $x_1$ ) spełnia nierówność  $4x_1^2 < x_1^3$ . Zatem  $x_1 > 4$ , skąd

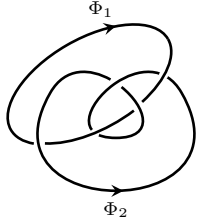
$$(2x_2^2 - x_2) + \dots + (2x_n^2 - x_n) < x_1 - 2x_1^2 < 4 - 2 \cdot 4^2 = -28.$$

Ponieważ minimum funkcji  $2x^2 - x$  jest równe  $-1/8$ , to  $n - 1 > 8 \cdot 28 > 50$ .

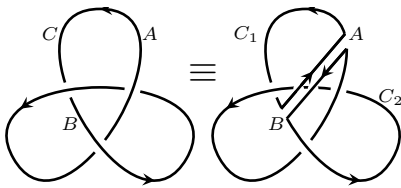




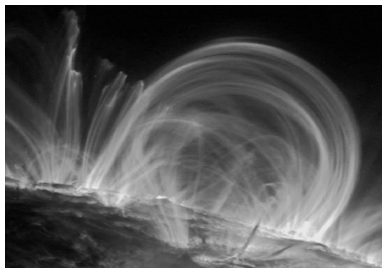
Rys. 1. Pojedyncze złączenie



Rys. 2. Zerowa liczba złączeń



Rys. 3. Pojedyncze samozłączenie



Pętle koronalne w atmosferze słonecznej

Uwaga dla miłośników topologii: hydrodynamika topologiczna opiera się w dużej mierze na teorii homologii i kohomologii, szczególnie w opisie ewolucji bardziej skomplikowanych struktur niż rurki wirowości (kontury), takich jak powierzchnie czy objętości.

#### Literatura

- M. A. Berger (2009), *Topological Magnetohydrodynamics and Astrophysics*, w: *Encyclopedia of Complexity and Systems Science*. Springer, New York.
- M. Epple: *Topology, Matter, and Space, I: Topological Notions in 19th-century Natural Philosophy*, Arch. Hist. Exact Sei. 52 (1998) 297–392.
- J. C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, MacMillan & Co., Oxford, 1873.
- H. K. Moffatt, A. Tsinohar: *Helicity in laminar and turbulent flow*, Annu. Rev. Fluid Mech. 1992.24: 281–312.
- H. K. Moffatt 1969, *The degree of knottedness of tangled vortex lines*, J. Fluid Mech., **35**, 117–129.
- R. L. Ricca 1998, *Applications of knot theory in fluid mechanics*, Banach Center Publications **42**, 321–346.

i jednoczesnym zwiększeniu natężenia pola wektorowego wirowości. W ten sposób ewolucja struktur wirowych odbywa się przy jednoczesnym zachowaniu topologii oraz wielkości fizycznych.

Istnieje twierdzenie wiążące całkowitą skrętność układu rurek wirowych  $\mathcal{H}_{tot}$  z parametrem topologicznym zwanym „liczbą złączeń” w następujący sposób:

$$\mathcal{H}_{tot} = \sum_i \mathcal{Z}_i \Phi_i^2 + 2 \sum_{i \neq j} \mathcal{Z}_{ij} \Phi_i \Phi_j,$$

gdzie  $\Phi_i$  to strumień wirowości związany z  $i$ -tą rurką,  $\mathcal{Z}_i$  to tzw. „liczba samozłączeń” (patrz rys. 3 i jego opis poniżej) osi  $i$ -tej rurki, zaś  $\mathcal{Z}_{ij}$  jest liczbą złączeń pomiędzy rurkami  $i$  oraz  $j$ . Interpretacja geometryczna powyższych parametrów topologicznych  $\mathcal{Z}_i$  oraz  $\mathcal{Z}_{ij}$  przedstawiona jest na rysunkach obok, pochodzących z prac [Moffatt, 1969] oraz [Ricca, 1998] (zob. również [Berger, 2009]), gdzie w sposób przystępny objaśnionych jest wiele ciekawych dodatkowych przypadków. Przykładowo dla układu z rysunku 1 żaden ze złączonych pierścieni nie ma „samozłączeń”, zatem mamy  $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}_2 = 0$ , zaś  $\mathcal{Z}_{12} = -1$ , ponieważ mamy jedno złączenie pierścieni, a znak ujemny bierze się z relacji zwrotów strumieni wirowości w obu pierścieniach (orientacja konturu  $C_2$  ma przeciwny znak do strumienia wirowości  $C_1$  wewnątrz  $C_2$ ). Z kolei w sytuacji z rysunku 2 rurki wirowe również nie mają samozłączeń, jednak w tym przypadku mamy nietrywialne złączenie obu rurek, dla którego liczba złączeń wynosi zero,  $\mathcal{Z}_{12} = 0$ , i całkowita skrętność układu znika. Warto nadmienić, iż z możliwości wystąpienia takich sytuacji zdawał sobie sprawę już Maxwell (1873, tom II, str. 43) w swoich badaniach dotyczących złączeń obwodów elektrycznych.

Zajmijmy się teraz opisem samozłączeń dla jednej struktury wirowej. Rozważając jedną rurkę wirowości, samozłączenia można zrozumieć, analizując węzeł koniczynowy przedstawiony na rysunku 3. Aby określić liczbę samozłączeń, wprowadzamy dwa odcinki AB o równej co do wartości, ale przeciwnej co do znaku wirowości, co pozwala zachować cyrkulację po konturze  $C$ , zgodnie z twierdzeniem Kelvina. Wówczas widzimy, że wydzielone w ten sposób kontury  $C_1$  oraz  $C_2$  są ewidentnie niesplątane, ale złączone, i w rezultacie liczba samozłączeń w wyjściowym węźle to  $\mathcal{Z} = 1$ . Liczbę samozłączeń konturu  $\mathcal{Z}$  można rozłożyć na dwie składowe:

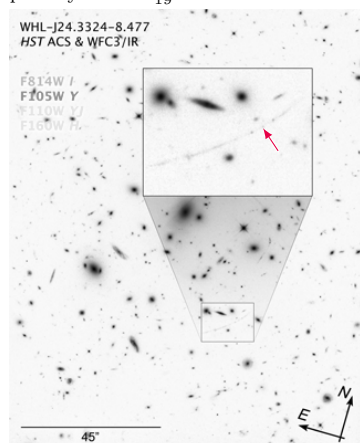
$$\mathcal{Z} = \text{Wr} + \text{Tw},$$

gdzie  $\text{Wr}$  (z ang. *writhe*) określa zawijanie osi rurki, zaś  $\text{Tw}$  (z ang. *twist*) jej całkowite skręcenie (torsje). Chociaż suma  $\text{Wr}$  i  $\text{Tw}$  jest niezmiennikiem topologicznym, to same te wielkości nimi nie są. Oznacza to, że „writhe” i „twist” zmieniają się pod wpływem ruchu płynu (homeomorfizmu), tak wymieniając się wartością, aby ich suma pozostawała stała. „Writhe” związany jest z ilością samoprzecięć rzutu osi rurki wirowej na pewną płaszczyznę, przy uwzględnieniu zwrotu linii, czyli zwrotu wirowości w rurce. Z kolei „twist” składa się z dwóch części – opisuje torsję osi rurki wirowej oraz wewnętrzne skręcenie linii wirowości wewnątrz rurki wirowej.

Jako sukcesy hydrodynamiki topologicznej w opisie ewolucji rzeczywistych układów obserwowalnych należy wymienić przede wszystkim dwa fakty. Wiemy już, że ewolucja płynów idealnych odbywa się przy więzach polegających na zachowaniu skrętności, a w konsekwencji zachowaniu również niezmiennika topologicznego, jakim jest liczba złączeń struktur wirowych. Otóż po pierwsze, istnieje twierdzenie mówiące, że taki więz nałożony na ewolucję prowadzi do „rozprostowywania” wszystkich punktów przegięcia osi rurek wirowych. Innymi słowy w stanie końcowym ewolucji oczekujemy, że rurki wirowe nie będą miały punktów przegięcia, i to niezależnie od stanu początkowego ewolucji. Jest to bardzo silny wynik, charakteryzujący struktury wirowe stanów ustalonych. Po drugie, powyższego więzu można użyć, by udowodnić, iż w stanie końcowym enstrofia (czyli średni kwadrat wirowości) czy też energia pola magnetycznego musi być nie mniejsza niż pewna wartość minimalna, zależna od strumienia związanego ze strukturami wirowymi bądź magnetycznymi (czyli  $\Phi_i$ ) i parametrów topologicznych tych struktur. Fakty te są z powodzeniem wykorzystywane w opisie produkcji oraz dyssypacji energii w koronie słonecznej, gdzie splecione struktury magnetyczne formują tzw. pętle koronalne.

## Prosto z nieba: Earendel – Miłośnik Morza czy jednak Gwiazda Poranna?

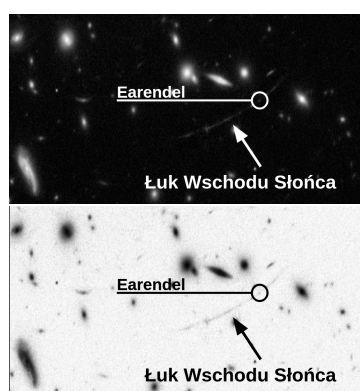
Więcej o przesunięciu ku czerwieni można przeczytać w  $\Delta_{19}^{04}$ .



Rys. 1. Zdjęcie Earendel – najdalszej zaobserwowanej gwiazdy, oznaczonej na zbliżeniu strzałką. Zdjęcie pochodzi z Kosmicznego Teleskopu Hubble’a. Źródło: NASA, ESA, B. Welch (JHU), D. Coe (STScI), A. Pagan (STScI)

Rekordzistka z 2018 roku, MACS J1149 Lensed Star 1, gwiazda znana też pod pseudonimem Icarus, została także zaobserwowana przez Kosmiczny Teleskop Hubble’a. Icarus znajduje się na przesunięciu ku czerwieni równym 1,5 (czyli jest oddalony od nas o 9,4 mld lat).

W jednym z doniesień prasowych Brian Welch przyznał, że nazywając gwiazdę, miał na myśli Earendila, postać stworzoną przez J.R.R. Tolkiena. Historię Earendila można znaleźć w mitologii Śródziemia, *Silmarillionie*. Gwiazdę Earendil ukochali szczególnie elfowie, a flakonik z jej światłem Galadriela podarowała Frodowi.



Rys. 2. Inne ujęcie Earendel oraz Łuku Wschodu Słońca w inwersji

Earendel, zwykła–niezwykła gwiazda, o której pod koniec marca 2022 roku można było przeczytać w miesięczniku *Nature*, oddalona jest od nas o 12,9 mld lat, co przekłada się na wartość przesunięcia ku czerwieni  $z = 6,2$ . Earendel znajduje się w galaktyce o pięknej nazwie Łuk Wschodu Słońca (*Sunrise Arc*). Właśnie w tej galaktyce podczas tzw. kosmicznego poranka, kiedy widzialny Wszechświat wylaniał się powoli z ciemnych wieków, narodziła się nasza bohaterka.

Światło wyemitowane przez Earendel około 900 milionów lat po tym, jak Wszechświat rozpoczął swoją ekspansję, podróżowało przez prawie 13 mld lat, aby zostać zauważone przez Kosmiczny Teleskop Hubble’a. Dlaczego o tym piszemy? Przecież już nie raz na łamach  $\Delta$  pisaliśmy o bardzo odległych galaktykach, o rekordzistach obserwowanych na skraju naszego Wszechświata, znajdujących się na przesunięciach ku czerwieni rzędu 11 (czyli około 13 mld lat temu), które powstały tuż po zakończeniu ciemnych wieków spowijających nasz Wszechświat.

Niezwykła w detekcji Earendel nie jest jedynie odległość, lecz sam obiekt, który na tej odległości został zauważony. Wszystkie odkrycia z początków Wszechświata dotyczą galaktyk, czyli obiektów złożonych z miliardów gwiazd, bądź też niszczycielskich eksplozji, takich jak błyski gamma. Bardzo odległe galaktyki zwykle nie wyglądają efektownie – to jedynie małe plamki światła obserwowane przez wielkie teleskopy. Na te świetne plamy składa się energia emitowana przez wszystkie zamieszkujące daną galaktykę gwiazdy. Tym razem jest inaczej. Po raz pierwszy zaobserwowano pojedynczą gwiazdę, i to nie najnowszym Teleskopem Kosmicznym Jamesa Webba (JWST), o którym wiemy, że całkiem niedługo przyniesie nauce wiele nowych odkryć, ale poczciwym Kosmicznym Teleskopem Hubble’a, który od 32 lat monitoruje nasz Wszechświat. Earendel to najodleglejsza pojedyncza gwiazda, jaką kiedykolwiek zaobserwował człowiek. Zespół naukowców pod kierownictwem doktoranta (!) Briana Welcha z Uniwersytetu Johns Hopkinsa, który odkrył Earendel, oszacował, że gwiazda ta jest 50 do 100 razy masywniejsza i milion razy jaśniejsza od naszego Słońca.

Obserwacja i dalsze pomiary były możliwe dzięki soczewkowaniu grawitacyjnemu. W tym zjawisku masywna gromada galaktyk zakrzywia przestrzeń wokół siebie, działając jak soczewka. To zakrzywienie powoduje powiększanie, zniekształcanie, a czasem nawet powielanie obiektów znajdujących się za nią. Galaktyka macierzysta Earendel została powiększona i zniekształcona w długi półksiężyc właśnie przez soczewkowanie grawitacyjne wywołane przez gromadę galaktyk WHL0137-08 oddaloną od nas jedynie o 5,6 mld lat (przesunięcie ku czerwieni = 0,566). Samą galaktykę w 2016 roku odkrył i nazwał pięknym imieniem Łuku Wschodzącego Słońca promotor Welcha, Dan Coe, a analizę małej plamki na łuku zlecił swojemu studentowi.

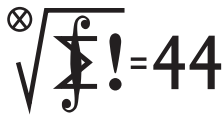
Jak na razie najbardziej ekscytujące jest samo odkrycie pojedynczej gwiazdy, jednak już teraz wiadomo, że będzie ona obserwowana w zakresie fal podczerwonych przez JWST. Dzięki temu dowiemy się, jakiego typu jest to gwiazda i na jakim etapie życia została zaobserwowana. Ponieważ światło tej gwiazdy obserwujemy z okresu, gdy nasz Wszechświat dopiero się tworzył, więc nie spodziewamy się detekcji ciężkich pierwiastków wytworzonych później w procesach ewolucyjnych gwiazd. Jeżeli nie zaobserwujemy ciężkich pierwiastków, wówczas Earendel będzie pierwszym dowodem na istnienie gwiazd III populacji – hipotetycznych, masywnych gwiazd, składających się z wodoru i helu, z możliwą bardzo niewielką domieszką litu ( $\Delta_{22}^{04}$ , M. Figueira).

Czy Earendel jest faktycznie gwiazdą III populacji? Mamy nadzieję dowiedzieć się tego niebawem, właśnie dzięki obserwacjom JWST.

Katarzyna MAŁEK

Więcej na temat odkrycia Earendel można znaleźć w pracy Welch, B., Coe, D., Diego, J.M. et al. *A highly magnified star at redshift 6.2*. *Nature* 603, 815–818 (2022), a także wśród doniesień prasowych na stronach Kosmicznego Teleskopu Hubble’a <https://hubblesite.org/>

# Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2022

## Zadania z matematyki nr 845, 846

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**845.** Udowodnić nierówność dla liczb nieujemnych  $x_1, \dots, x_n$  oraz  $y_1, \dots, y_n$ :

$$\left(\sum_{i \neq j} x_i y_j\right)^2 \geq \left(\sum_{i \neq j} x_i x_j\right) \left(\sum_{i \neq j} y_i y_j\right)$$

(każda z trzech napisanych sum ma  $n(n-1)$  składników odpowiadających wszystkim uporządkowanym parom  $(i, j)$  różnych numerów  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ).

**846.** Ostrosłup ścięty, którego podstawami są podobne wielokąty o znanych polach  $A$  i  $B$ , został podzielony płaszczyznami  $\pi_1, \dots, \pi_{n-1}$ , równoległymi do podstaw, na  $n$  wielościanów o równych objętościach; płaszczyzna  $\pi_k$  leży między płaszczyznami  $\pi_{k-1}$  i  $\pi_{k+1}$  (dla  $k = 1, \dots, n-1$ ), gdzie  $\pi_0, \pi_n$  to płaszczyzny zawierające, odpowiednio, podstawy o polach  $A, B$ . Obliczyć pole przekroju ostrosłupa każdą z płaszczyzn  $\pi_k$ .

Zadanie 846 zaproponował pan Mirosław Matłęga ze Skoczowa.

## Rozwiązania zadań z numeru 5/2022

Przypominamy treść zadań:

**841.** Dla zadanej liczby naturalnej  $n \geq 2$  ustalić, ile jest ciągów liczb rzeczywistych  $(a_1, \dots, a_n)$  o tej własności, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych  $(x_1, \dots, x_n)$  zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i+j} x_j \right| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

gdzie (cyklicznie)  $a_r = a_{r-n}$  dla  $r > n$ .

**842.** Na płaszczyźnie dane są trzy koła (domknięte, tj. rozważane wraz z punktami brzegu). Zakładamy, że ich część wspólna jest niepusta. Przesuwamy każde koło (niezależnie) w taki sposób, że dla każdego dwóch kół odległość ich środków po przesunięciu jest nie większa niż przed przesunięciem. Udowodnić, że przesunięte koła nadal mają niepustą część wspólną.

**841.** Niech  $(a_1, \dots, a_n)$  będzie ciągiem spełniającym podany warunek. Ustalmy liczbę  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  oraz  $\varepsilon \in \{1, -1\}$  i podstawmy w równaniu:  $x_n = 1, x_k = \varepsilon, x_j = 0$  dla  $j \neq k, n$ . Ponieważ  $a_{i+n} = a_i$ , otrzymujemy

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n |\varepsilon a_{i+k} + a_i| = 2.$$

Z kolei weźmy  $x_n = 1, x_j = 0$  dla wszystkich  $j < n$ ; dostajemy

$$(2) \quad \sum_{i=1}^n |a_i| = 1.$$

Szacujemy z góry lewą stronę wzoru (1) (korzystając z cykliczności ciągu  $(a_i)$  oraz ze wzoru (2)):

$$\sum_{i=1}^n |\varepsilon a_{i+k} + a_i| \leq \sum_{i=1}^n (|a_{i+k}| + |a_i|) = \sum_{i=1}^n |a_i| + \sum_{i=1}^n |a_i| = 2.$$

Lewa strona ma wartość 2 (wzór (1)), co oznacza, że ta nierówność musi być równością; czyli że  $|\varepsilon a_{i+k} + a_i| = |a_{i+k}| + |a_i|$  dla wszystkich  $i$ . Po podniesieniu do kwadratu i redukcji mamy

$$\varepsilon a_{i+k} a_i = |a_{i+k} a_i| \quad \text{dla } i = 1, \dots, n.$$

Skoro to prawda zarówno dla  $\varepsilon = 1$ , jak i dla  $\varepsilon = -1$ , zatem  $a_{i+k} a_i = 0$  dla wszystkich  $i$ . Wobec dowolności  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  znaczy to, że w ciągu  $(a_1, \dots, a_n)$  tylko jeden wyraz może być niezerowy. Wobec wzoru (2) ma on moduł 1.

Stąd wynika postać rozważanych ciągów  $(a_1, \dots, a_n)$ : na dowolnie wybranej pozycji liczba  $\pm 1$ , poza tym zera; przy tym każdy ciąg takiej postaci ma własność wymaganą w zadaniu. Jest więc  $2n$  takich ciągów.

**842.** Oznaczmy środki trzech danych kół przez  $A, B, C$ , zaś ich promienie  $r_A, r_B, r_C$ . Wybierzmy i ustalmy punkt  $P$  leżący w części wspólnej tych kół:  $AP \leq r_A, BP \leq r_B, CP \leq r_C$ . Przesunięcia, o jakich mowa, przenoszą środki do położen  $A', B', C'$ . Ustalmy oznaczenia tak, by  $AB$  był tym bokiem trójkąta  $ABC$ , który w najmniejszym stopniu ulega

skróceniu przy tych przesunięciach. Istnieje więc taka liczba  $k \leq 1$ , że

$$(3) \quad A'B' = k \cdot AB, \quad A'C' \leq k \cdot AC, \quad B'C' \leq k \cdot BC.$$

Niech  $D$  będzie punktem leżącym po tej stronie prostej  $AB$ , co punkt  $C$ , i takim, że trójkąt  $ABD$  jest podobny do trójkąta  $A'B'C'$ . Skoro  $A'B' = k \cdot AB$ , znaczy to, że  $A'C' = k \cdot AD, B'C' = k \cdot BD$ , i wobec oszacowań (3):

$$(4) \quad AD \leq AC, \quad BD \leq BC.$$

Będziemy chcieli znaleźć punkt  $Q$  spełniający warunki

$$(5) \quad AQ \leq AP, \quad BQ \leq BP, \quad DQ \leq CP.$$

Wówczas podobieństwo (o skali  $k$ ), przekształcające trójkąt  $ABD$  na trójkąt  $A'B'C'$ , przeniesie ów punkt  $Q$  do położenia  $Q'$ , dla którego, zgodnie z zależnościami (5),

$$A'Q' = k \cdot AQ \leq k \cdot AP \leq k r_A \leq r_A,$$

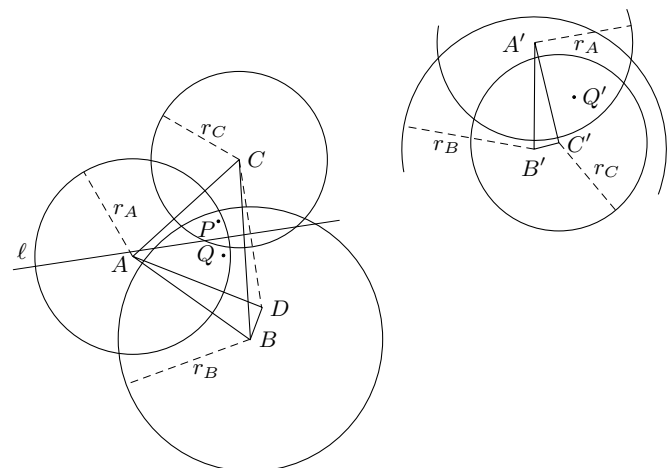
i podobnie

$$B'Q' \leq r_B, \quad C'Q' \leq r_C.$$

Punkt  $Q'$  znajdzie się więc w części wspólnej kół o środkach  $A', B', C'$  i promieniach  $r_A, r_B, r_C$ , co zakończy dowód tezy zadania. Pozostaje wskazać punkt  $Q$  o własnościach (5).

Jeżeli  $DP \leq CP$ , można przyjąć po prostu  $Q = P$ .

W przeciwnym przypadku, tj. gdy  $DP > CP$  (rysunek), niech  $Q$  będzie punktem symetrycznym do  $P$  względem prostej  $\ell$ , symetralnej odcinka  $CD$ . Leży on po tej stronie owej prostej, co punkt  $D$ . Z uwagi na nierówności (4), po tej stronie prostej  $\ell$  leżą także punkty  $A$  i  $B$ . Czworokąt  $CDQP$  jest trapezem równoramiennym ( $DQ = CP$ ), bo prosta  $\ell$  jest też symetralną odcinka  $PQ$ . Z położenia punktów  $A, B, D, Q$  po jednej jej stronie wynikają dwie pierwsze z potrzebnych nam nierówności (5); trzecia zaś, jak zauważyliśmy, staje się równością. Tak określony punkt  $Q$  ma zatem wymagane własności; dowód jest zakończony.

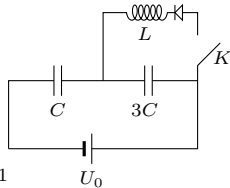




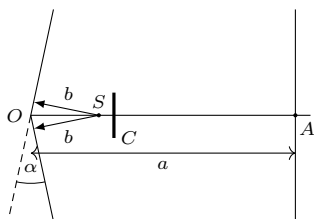
# Klub 44 F



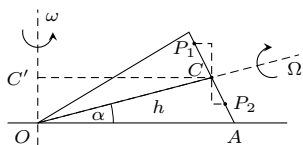
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2022



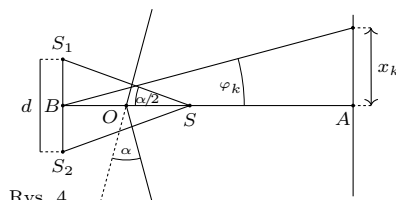
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 835 ( $WT = 2,59$ ) i 836 ( $WT = 1,49$ ) z numeru 2/2022

Witold Bednarek	Łódź	45,02
Andrzej Kurach	Ryjewo	44,89
Kacper Morawski	Warszawa	43,56
Marek Spychała	Warszawa	42,59
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Paweł Najman	Kraków	38,67
Michał Adamaszek	Kopenhaga	37,37
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Radosław Kujawa	Wrocław	33,74
Tomasz Wietecha	Tarnów	32,68
Jerzy Cisło	Wrocław	32,66

Przekroczenia linii 44 podzielne przez 3: pan **Andrzej Kurach** po raz trzeci – więc dołącza do grona Weteranów; zaś pan **Witold Bednarek** po raz dziewiąty – więc jakby „Weteran do kwadratu” (w historii Ligi – piąty uczestnik, który tego dokonał).

## Zadania z fizyki nr 742, 743

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

**742.** Mała drewniana kulka przymocowana jest za pomocą nierozciągliwej nici o długości  $l = 30$  cm do dna cylindrycznego naczynia z wodą. Odległość środka dna do punktu zaczepienia nici  $r = 20$  cm. Naczynie rozkręcono wokół osi pionowej przechodzącej przez środek dna. Przy jakiej prędkości kątowej nić odchyła się od pionu o kąt  $\alpha = \pi/6$ ?

**743.** W obwodzie przedstawionym na rysunku 1 ze źródłem o sile elektromotorycznej  $U_0$  i zaniedbywalnym oporze wewnętrznym połączone są szeregowo kondensatory o pojemnościach  $C$  i  $3C$ . Po zamknięciu klucza  $K$  równoległe do kondensatora o pojemności  $3C$  dołączamy połączone szeregowo cewkę o indukcyjności  $L$  oraz idealną diodę. a) Znaleźć maksymalną wartość natężenia prądu płynącego przez cewkę. b) Jakie będzie napięcie na kondensatorze o pojemności  $C$ , gdy prąd przestanie płynąć przez cewkę? c) Ile czasu prąd będzie płynął przez cewkę?

## Rozwiązania zadań z numeru 5/2022

Przypominamy treść zadań:

**738.** Stożek toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej. Oś stożka obraca się z prędkością kątową  $\omega$  wokół osi pionowej, przechodzącej przez jego wierzchołek. Wysokość stożka wynosi  $h$ , kąt między osią stożka a jego tworzącą jest równy  $\alpha$ . Wyznaczyć prędkość liniową dowolnego punktu średnicy podstawy stożka leżącej w płaszczyźnie pionowej.

**739.** Dwa zwierciadła płaskie tworzą między sobą kąt  $(\pi - \alpha)$ , przy czym kąt  $\alpha$  jest bardzo mały (rys. 2). W równych odległościach  $b$  od obu zwierciadeł znajduje się punktowe źródło światła monochromatycznego  $S$ . Długość fali emitowanej przez źródło wynosi  $\lambda$ . W odległości  $|OA| = a$  od punktu przecięcia zwierciadeł umieszczony jest ekran. Znaleźć odległość między sąsiednimi jasnymi prążkami interferencyjnymi na ekranie. Przesłona  $C$  zapobiega bezpośredniemu padaniu światła ze źródła na ekran.

**738.** Ruch stożka jest złożeniem obrotu jego osi  $OC$  wokół prostej pionowej przechodzącej przez punkt  $O$  oraz obrotu wokół osi stożka z prędkością kątową  $\Omega$  (rys. 3). Ruch odbywa się bez poślizgu, zatem punkt  $A$  na tworzącej stykającej się w danej chwili z podłożem nie porusza się względem podłoża:  $\omega |OA| = \Omega h \tan \alpha$ , gdzie  $|OA| = h/\cos \alpha$ . Stąd  $\Omega = \omega/\sin \alpha$ .

Prędkość dowolnego punktu  $P_1$  leżącego powyżej środka podstawy w odległości  $r$  od niego dana jest wzorem:

$$v_1 = \omega(|CC'| - r \sin \alpha) + \Omega r = \omega(h \cos \alpha - r \sin \alpha) + \omega r/\sin \alpha.$$

Prędkość punktu  $P_2$  leżącego poniżej punktu  $C$  wynosi

$$v_2 = \omega(h \cos \alpha + r \sin \alpha) - \omega r/\sin \alpha.$$

**739.** Oznaczmy obrazy źródła światła w zwierciadłach przez  $S_1$  i  $S_2$  (rys. 4). Odległość między nimi wynosi

$$(1) \quad d = 4b \sin(\alpha/2) \approx 2ba$$

i jest dużo mniejsza od odległości odcinka  $S_1S_2$  od ekranu:  $|BA| \approx a + b$ .

Oznaczając przez  $\varphi_k$  kąt odpowiadający  $k$ -temu maksimum na ekranie, możemy napisać

$$(2) \quad d(\sin \varphi_k - \sin \varphi_{k-1}) = \lambda.$$

Jeżeli ograniczymy się do małych kątów  $\varphi$ , to  $\sin \varphi_k \approx x_k/(a + b)$ , gdzie  $x_k$  jest odległością  $k$ -tego maksimum od środka ekranu. Podstawiając to do (2) i uwzględniając (1), otrzymujemy szukaną odległość między prążkami:

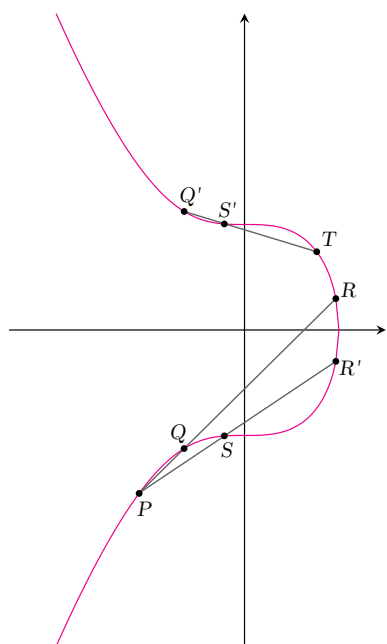
$$(3) \quad \Delta x = x_k - x_{k-1} = \lambda(a + b)/2b\alpha.$$

## Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## List do redakcji: Jak rysować styczne do krzywej $x^3 + y^2 = 1$



Bardzo lubię *Deltę* (choć nie wszystko w niej). Na przykład podobał mi się artykuł z *Delty* 6/2017: *Z samą linijką na okrąg*. Lektura tego tekstu bardzo mnie wciągnęła i zainspirowała. Wiem na przykład, że okręgi, o których jest tam mowa, mogą być opisane równaniami typu  $x^2 + y^2 = 1$ . I profesor Kordos pięknie pokazuje konstrukcje stycznych do takiego okręgu, przechodzące przez uprzednio zadany punkt. Ale w swoim liście przedstawię metodę rysowania stycznej do krzywej  $\mathcal{K}$  danej równaniem  $x^3 + y^2 = 1$  w danym punkcie  $P \in \mathcal{K}$  i proszę, aby mnie poczytać. W tym celu najpierw pokazuję na rysunku obok, jak taka krzywa w ogóle wygląda (proszę na razie nie przejmować się zaznaczonymi tam punktami, opiszę je później). Widać, że jest ona symetryczna względem osi poziomej, gdyż jeśli  $(x, y) \in \mathcal{K}$ , to  $(x, -y)$  też spełnia równanie  $x^3 + y^2 = 1$ , czyli rzeczywiście  $(x, -y) \in \mathcal{K}$ . Dalej często będzie tak, że oprócz punktu  $Z$  na płaszczyźnie rozważam również punkt do niego symetryczny względem osi  $OX$  – będę go oznaczać symbolem  $Z'$ . Przechodzę teraz do konstrukcji stycznej do krzywej  $\mathcal{K}$  w punkcie  $P \in \mathcal{K}$ . Wybieram najpierw punkt  $Q \in \mathcal{K}$ , dbając tylko o to, aby  $Q \neq P$ : to chyba mogę, bo na krzywej jest nieskończenie wiele punktów? Teraz mogę poprowadzić prostą  $PQ$  i właśnie to robię. Przecina ona krzywą  $\mathcal{K}$  jeszcze w trzecim punkcie, nazwę go  $R$ . Na mocy wstępnej obserwacji również  $R' \in \mathcal{K}$ . Prowadzę teraz prostą  $PR'$  (jak nie mam pecha, to  $R' \neq P$ ) i literą  $S$  oznaczam trzeci punkt przecięcia tej prostej z krzywą  $\mathcal{K}$ . Teraz dla odmiany prowadzę prostą  $S'Q'$ . Trzeci punkt przecięcia prostej  $S'Q'$  (o ile dalej szczęście mi sprzyja, to raczej  $S' \neq Q'$ ) z krzywą  $\mathcal{K}$  oznaczam przez  $T$ . Ja uważam teraz, że prosta  $TP$  jest szukaną styczną do  $\mathcal{K}$  w punkcie  $P$  i dlatego tak dokładnie opisałem swoją drogę.

Też słyszałem, że matematycy potrafią udowodnić, że taka konstrukcja jest zawsze poprawna, albo pokazują, że w pewnych przypadkach nie działa. Ale w to drugie to wątpię. Także wątpię w sugestie zawarte w artykule pana Mariusza Skałby *Liczby pierwsze jako niewiadome*, również z *Delty* 6/2017 (na lewo od artykułu Marka Kordosa). Ja preferuję taką matematykę, że można sobie coś wyobrazić i ewentualnie dorysować, a nie taką, że nic się nie dzieje i są tylko równania i wzory. Ale jak zobaczę, o co chodzi w tych równaniach, to może coś dorysuję i odezwę się do Państwa.

Na razie pozostaję z szacunkiem dla prawej matematyki

Jan DOCIEKLIWY

## Odpowiedź Mariusza Skałby

Z dużym zainteresowaniem przeczytałem Pana list i uznałem, że powinienem się do niego ustosunkować. Tym bardziej że naczelną dla mnie zasadą jest poszanowanie różnorodności gustów – również matematycznych. Nic na to nie poradzę, że nie podoba się Panu mój artykuł, ale spróbuję naświetlić przedstawiony w nim problem z nieco innej strony. W rzeczonym tekście tytułowe liczby pierwsze  $p, q$  są niewiadomymi w równaniu diofantycznym

$$(1) \quad p^2 - 2q^2 = -1.$$

W zamieszczonej tam tabelce przytoczyłem przykładowe cztery pary liczb pierwszych, które spełniają to równanie – największa z nich to:

$$p = 19175002942688032928599,$$

$$q = 13558774610046711780701.$$

Przyzna Pan, że te liczby są duże – to pożywiło moją naiwność i skłoniło do sformułowania hipotezy, że **równanie (1) ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach pierwszych  $p, q$** . W pewnym sensie „dorysowałem” dalszą część tabelki rozwiązań, ale ta ekstrapolacja nie musiała się Panu spodobać. Muszę

szczerze wyznać, że gdy spojrzałem na tę tabelkę z innej perspektywy, to i mnie wydała się ona marna i nieobiecująca. Ja nie z tych, co dorysowują, ale chętnie coś dopowiem.

Problemy, w których występują liczby pierwsze, są często bardzo trudne. Tak trudne, że nie ma systematycznych metod ich badania. Dlatego czasem stosuje się namiastki ścisłych metod, czyli tak zwane *heurystyki*. Nie mają one szlachetnego statusu twierdzeń matematycznych, pozwalają jednak na ukształtowanie intuicji i oczekiwań wobec badanego matematycznego problemu – przy pełnej świadomości, że ostatecznie intuicje te mogą okazać się błędne. Jest wśród nich heurystyka następująca:

*Założmy, że ciąg liczb naturalnych  $x_1, x_2, \dots$  spełnia warunek:*

$$(2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log x_n} < \infty.$$

*Wówczas w ciągu tym występuje co najwyżej skończenie wiele liczb pierwszych.*

**Rozwiązanie zadania M 1722.**

Pokażemy, że jeśli  $n$  jest parzyste, to wielokąt  $\mathcal{F}$  nie jest zbalansowany.

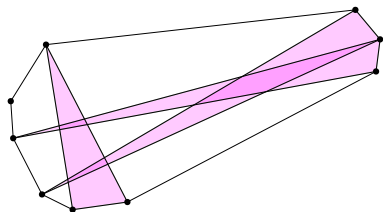
Przekątna  $A_1A_m$ , gdzie  $m = \frac{n}{2} + 1$ , dzieli wielokąt na dwa wielokąty:

$$H_1 = A_1A_2 \dots A_m \text{ i}$$

$$H_2 = A_mA_{m+1} \dots A_nA_1. \text{ Punkt } P \text{ nie może leżeć na przekątnej, gdyż } B_1 \neq A_m.$$

Jeśli  $P$  leży wewnątrz  $H_2$ , to punkty  $B_1, B_2, \dots, B_m$  leżą na  $m - 1$  odcinkach będących jednocześnie bokami wielokątów  $\mathcal{F}$  i  $H_2$ , zatem któryś z boków  $\mathcal{F}$  zawiera dwa punkty  $B_i$  – sprzeczność.

Następujący rysunek pokazuje, że dziewięciokąt wypukły nie musi być zbalansowany, gdyż punkt  $P$  powinien znaleźć się w części wspólnej trzech narysowanych trójkątów.



O błędności przypuszczenia Fermata wiedział już Euler, który udowodnił złożoność liczby  $F_5$ . Pisał o tym Wojciech Guzicki w  $\Delta_{22}^3$ .

Najpierw kilka słów uzasadnienia, a właściwie zaledwie motywacji, bo to tylko heurystyka, a nie twierdzenie matematyczne! Na każdym porządnym kursie rachunku prawdopodobieństwa dość szybko pojawia się twierdzenie zwane czasem *lematem Borela–Cantellego*.

**Lemat.** *Jeśli ciąg zdarzeń  $A_n$  ma tę własność, że*

$$(3) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) < \infty,$$

*to z prawdopodobieństwem 1 zachodzi tylko skończenie wiele spośród nich.*

Również obowiązkowo na każdym wykładzie uniwersyteckim z teorii liczb pojawia się (niekoniecznie z dowodem) trudne i ważne *twierdzenie o liczbach pierwszych*:

**Twierdzenie.** *Jeżeli  $\pi(x)$  oznacza liczbę liczb pierwszych w przedziale  $[2, x]$ , to:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1.$$

„Wyprowadzimy” teraz z obu powyższych prawdziwych twierdzeń matematycznych naszą heurystykę. Niech mianowicie  $A_n$  oznacza „zdarzenie”, że  $x_n$  jest liczbą pierwszą. Oczywiście jest to wielkie udawanie, gdyż fakt bycia liczbą pierwszą nie ma nic wspólnego z losowością, np. jeśli  $x_8 = 67$ , to  $x_8$  jest liczbą pierwszą, a jeśli  $x_8 = 68$ , to nie. Ale brnijmy dalej! Ponieważ na podstawie twierdzenia o liczbach pierwszych

$$\Pr(A_n) \approx \frac{\pi(x_n)}{x_n} \approx \frac{1}{\log x_n},$$

więc na podstawie (2) mamy (3) i stąd teza.

Chyba najsłynniejszym „zastosowaniem” wyprowadzonej przez nas heurystyki jest przypadek *liczb Fermata*:

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Założenia heurystyki są spełnione, gdyż

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\log(2^{2^n} + 1)} < \frac{1}{\log 2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Tak więc konsekwentnie wyszło nam, że liczb pierwszych Fermata jest skończenie wiele, co, jak powszechnie wiadomo, stoi w ostrej sprzeczności ze słynnym przypuszczeniem samego Fermata, że ciąg  $F_n$  zawiera wyłącznie liczby pierwsze!

Spróbujmy teraz zastosować heurystykę do naszego problemu. W tym celu na równanie (1) spojrzmy ogólnie i poszukamy jego wszystkich rozwiązań w liczbach naturalnych  $p, q$ . Nieskończenie wiele takich rozwiązań dają wzory

$$(4) \quad p_n + q_n \sqrt{2} := (1 + \sqrt{2})^n, \text{ gdzie } n = 1, 3, 5, \dots$$

i dość łatwo wykazać, że uzyskujemy w ten sposób wszystkie rozwiązania. Mamy zatem

$$(5) \quad p_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n + (1 - \sqrt{2})^n}{2},$$

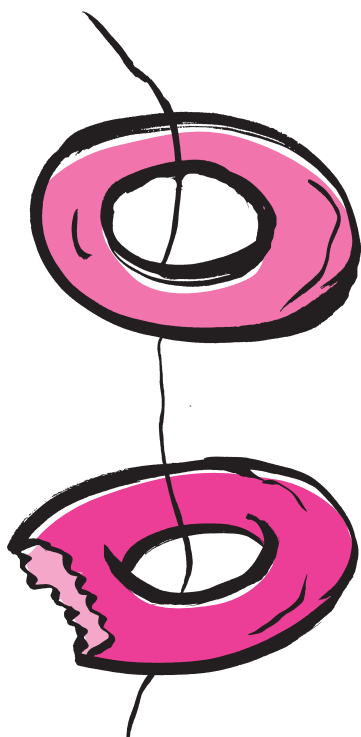
$$q_n = \frac{(1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}, \text{ } n = 1, 3, 5, \dots$$

Niech teraz  $B_n$  oznacza „zdarzenie”, że obie liczby  $p_n, q_n$  są liczbami pierwszymi. Szacujemy

$$\Pr(B_n) \approx \frac{1}{\log p_n} \cdot \frac{1}{\log q_n}.$$

Skorzystaliśmy jakby z „niezależności” odpowiednich „zdarzeń”, ale jeśli  $p_n$  jest liczbą pierwszą, to raczej nie zwiększa to szansy na to, że  $q_n$  też jest liczbą pierwszą. Tak więc w powyższym możemy interpretować  $\approx$  w sensie  $\leq$ . Ze wzorów (5) dostajemy teraz

$$\log p_n \approx n \log(1 + \sqrt{2}), \quad \log q_n \approx n \log(1 + \sqrt{2}),$$



zatem ostatecznie dla pewnej stałej  $C$

$$\sum_n \Pr(B_n) < C \cdot \sum_n \frac{1}{n^2} < \infty,$$

co na podstawie heurystyki pozwala wnioskować, że **równanie (1) ma tylko skończenie wiele rozwiązań w liczbach pierwszych**  $p, q$ . Być może w tabelce reprodukowanej w artykule *Liczby pierwsze jako niewiadome* są wszystkie rozwiązania (?).

Jednak najważniejsze pytanie, jakie sobie teraz zadaję, jest takie: **Czy teraz bardziej się Panu podoba?**

Na koniec odniosę się do Pana metody rysowania stycznych do krzywej  $\mathcal{K} : x^3 + y^2 = 1$ . Zaczęę od gratulacji: Ma Pan świetną intuicję! Przedstawiona przez Pana metoda nigdy nie zawodzi, a oto uzasadnienie.

Rozpatrywana krzywa  $x^3 + y^2 = 1$  jest *eliptyczna*. Ma to szalone konsekwencje. Przede wszystkim pozwala określić sumę dwóch punktów  $P$  oraz  $Q$  naszej krzywej. Mianowicie, niech najpierw  $R$  oznacza trzeci punkt przecięcia prostej  $PQ$  z krzywą  $\mathcal{K}$ . Określamy

$$(6) \quad P \oplus Q = R',$$

używając Pana oznaczeń. Oczywiście w przypadku  $Q = P$  zamiast prostej  $PQ$  trzeba poprowadzić styczną przez  $P$ . Ponadto do krzywej  $\mathcal{K}$  dokładamy „punkt w nieskończoności”  $\infty$ , przyjmując  $P \oplus \infty = P$  oraz  $P \oplus P' = \infty$  dla każdego  $P \in \mathcal{K}$ .

Używając takiego dodawania punktów, operacje z Pana instrukcji można zakodować tak:

- 1  $P \oplus Q = R'$
- 2  $P \oplus R' = S'$
- 3  $S' \oplus Q' = T'$

To, że  $TP$  jest szukaną styczną, jest równoważne równości:

$$P \oplus P = T',$$

którą uzasadniamy, sumując równości 1–3, gdyż działanie dodawania punktów na krzywej  $\mathcal{K}$ , określone przez (6), jest przemienne, w cudowny sposób łączne i dopuszcza skracanie!

Jeśli powyższa odpowiedź zainteresowała Pana tematem krzywych eliptycznych, polecam Panu artykuł Tomasza Kazany *Krzywe eliptyczne w kryptografii* z *Delty* 8/2018. Tymczasem dziękuję za Pański list i życzę wiele radości z odkrywania matematyki.

*Mariusz SKAŁBA*

Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

## Niebo we wrześniu

We wrześniu Słońce kontynuuje szybką wędrówkę na południe, obniżając przez 30 dni miesiąca wysokość swojego górowania o ponad  $11^\circ$ . Przełoży się to na wydłużenie czasu trwania nocy o prawie 100 minut. Słońce przetnie w drodze na południe równik niebieski 23 września i na naszej półkuli Ziemi zacznie się astronomiczna jesień.

Głównymi wydarzeniami września w tym roku są opozycje **Jowisza** 26. dnia miesiąca oraz **Neptuna** 10 dni wcześniej. Jowisz wędruje na tle gwiazdozbioru Ryb i zbliży się do Neptuna na niecałe  $10^\circ$ . Ostatnia planeta od Słońca wędruje zaś na tle gwiazdozbioru Wodnika  $2^\circ$  na zachód od gwiazdy 20 Psc. Niestety w tym roku Jowisz nie stanie się bardzo dobrą wskazówką do odszukania Neptuna, jak to było w lipcu 2009 r., gdy obie planety na krótko dzielił dystans mniejszy niż  $1^\circ$ .

Obecnie przypada wielka opozycja Jowisza, gdyż 20 stycznia przyszłego roku planeta przejdzie przez perihelium swojej orbity i w opozycji zbliży się do nas na mniej niż  $4 AU$ . Jak łatwo zauważyć, w tym roku Jowisz ma największe rozmiary kątowe i jasność. Porównując te wielkości w czasie wielkiej i małej opozycji, otrzymamy znaczną różnicę. W tym roku tarcza Jowisza osiągnie średnicę kątową  $50''$  i jasność  $-2,9^m$ . Podczas gdy za 6 lat w momencie opozycji planeta zbliży się do nas tylko na  $5,2 AU$  i jej średnica kątowa urośnie do  $44''$ , jasność natomiast zwiększy się do  $-2,5^m$ .

Orbita Neptuna znacznie bardziej przypomina okrąg i położenie tej planety na orbicie podczas opozycji nie ma wpływu na wielkość i jasność jego tarczy. Neptun, jak co roku, świeci blaskiem  $+7,8^m$  i do jego dostrzeżenia potrzebna jest jedynie lornetka.



Z pozostałych planet dobrze widoczne są **Saturn**, **Mars** i **Uran** oraz planetoida (4) Westa. Saturn przeszedł przez opozycję w połowie sierpnia i można go obserwować przez większość nocy na tle gwiazdozbioru Koziorożca. Planeta we wrześniu zbliży się do gwiazdy 4. wielkości  $\iota$  Cap na odległość  $1^\circ$ . W tym czasie jej jasność zmniejszy się do  $+0,5^m$ , przy średnicy tarczy  $18''$ . Saturn góruje około godziny 22, wznosząc się na wysokość mniej więcej  $22^\circ$ .

Planetoida Westa przebywa około  $9^\circ$  na południowy wschód od Saturna. Westa także w sierpniu przeszła przez opozycję względem Słońca, a we wrześniu pokona na niebie  $4^\circ$ , zaczynając miesiąc  $1^\circ$  na zachód od gwiazdy 5. wielkości 41 Aqr, by na jego koniec zbliżyć się na niecałe  $3^\circ$  do gwiazdy 41 Cap o podobnej jasności. Westa góruje około godziny 23, wznosząc się na niewiele ponad  $15^\circ$ . We wrześniu jej blask stopniowo spadnie od  $+6^m$  do  $+7^m$ , i do jej dostrzeżenia potrzebna jest przynajmniej lornetka.

Planeta Mars przejdzie przez opozycję względem Słońca 8 grudnia, planeta Uran natomiast miesiąc wcześniej. We wrześniu Mars porusza się ruchem prostym na tle gwiazdozbioru Byka, zaczynając miesiąc  $2^\circ$  na północny zachód od gwiazdy  $\varepsilon$  Tau, stanowiącej północny koniec charakterystycznego kształtu litery V, który tworzą najjaśniejsze gwiazdy Hiad. Ostatniego dnia miesiąca Mars zbliży się na niecały stopień do gwiazdy 5. wielkości 109 Tauri. W tym czasie jego jasność urośnie od  $-0,1^m$  do  $-0,6^m$ , a średnica tarczy zwiększy się od  $10''$  do  $12''$ . Mars 7 września przejdzie nieco ponad  $4^\circ$  na północ od Aldebarana, najjaśniejszej gwiazdy Byka.

Uran wciąż przebywa na tle gwiazdozbioru Barana, około  $3^\circ$  na południowy zachód od gwiazdy Botein ( $\delta$  Ari). Planeta świeci blaskiem  $+5,7^m$  i wraz z Marsem najlepiej obserwować ją w drugiej części nocy. Uran góruje około godziny 4, wznosząc się na wysokość  $55^\circ$ . W tym samym momencie Mars znajduje się na podobnej wysokości, a obie planety dzieli dystans około  $25^\circ$ .

Nad samym ranem do połowy miesiąca można obserwować planetę **Venus**, która zbliża się do koniunkcji górnej ze Słońcem 22 października. Planeta wędruje przez gwiazdozbiór Lwa i 5 dnia miesiąca zbliży się do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy konstelacji, na odległość  $45'$ . Warunki obserwacyjne Wenus są jednak trudne. Na początku miesiąca o świcie planeta zajmie pozycję na wysokości zaledwie  $5^\circ$  i każdego kolejnego poranka znajdzie się coraz niżej, aż pod koniec drugiej dekady września zginie w zorzy porannej. Wygląd tarczy Wenus praktycznie się nie zmienia. Planeta ma jasność  $-3,9^m$ , średnicę tarczy  $10''$  i fazę około 98%.

Księżyc zacznie wrzesień w fazie 29% na tle gwiazdozbioru Wagi. O zmierzchu zajmie on pozycję na wysokości  $6^\circ$ , około  $2^\circ$  od gwiazdy Zuben Elgenubi, drugiej co do jasności gwiazdy konstelacji. Ekliptyka o tej porze roku i doby jest położona bardzo nisko, a dodatkowo Księżyc kieruje się na południe od niej, a zatem w pierwszej części miesiąca może on być zasłaniany przez przeszkody terenowe.

Księżyc przejdzie przez I kwadrę 3 września, zbliżając się na niecałe  $2^\circ$  do Antaresa, najjaśniejszej gwiazdy Skorpiona. Dwa dni później Księżyc zwiększy fazę do 72% i jednocześnie zbliży się do Nuniki, jednej z jaśniejszych gwiazd Strzelca, by 8 dnia miesiąca, prezentując fazę 96%, przeciąć linię łączącą Saturna z Westą.

W południe 10 września Księżyc znajdzie się po przeciwnej stronie Ziemi niż Słońce, zajmując pozycję  $4^\circ$  w kierunku południowym od Neptuna, który również nie przebiję się przez blask Księżyca. Dobę później tarcza Srebrnego Globu zmniejszy fazę do 97% i wszędzie  $3^\circ$  od Jowisza.

W nocy z 14 na 15 września dojdzie do zakrycia Urana przez Księżyc w fazie 78%. Zjawisko da się obserwować z całej Europy, północnej Afryki i północno-zachodniej części Azji. W Polsce Księżyc przesłoni Urana około godziny 23:30, by odsłonić go godzinę później.

Trzy kolejne noce Księżyc spędzi w gwiazdozbiorze Byka, zmniejszając stopniowo fazę od 68% do 50%. Na początku drugiej połowy miesiąca, 16 września, księżycowa tarcza zajmie pozycję między Plejadami a Hiadami, by dobę później minąć jasnego Marsa w odległości  $3^\circ$ .

Okres od ostatniej kwadry do nowiu to najciekawsza część widoczności Księżyca w tym miesiącu. Rano ekliptyka tworzy bardzo duży kąt z widnokregiem, Srebrny Glob świeci wysoko na niebie i jest widoczny prawie do samego nowiu, który przypada 25 września tuż przed północą naszego czasu. Sześć dni przed nowiem, 19 września, tarcza naturalnego satelity Ziemi zmniejszy fazę do 39% i przejdzie niecałe  $2^\circ$  na północ od Meksutu w Bliźniętach. Dobę później faza Księżyca spadnie poniżej 30%, a pokaże się on  $3^\circ$  na prawo od Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt.

Poranek 21 września Księżyc spędzi w gwiazdozbiorze Raka, przechodząc  $5^\circ$  na północ od słynnej gromady gwiazd M44. Tego dnia jego faza zmniejszy się do 21%. Dwa dni później Srebrny Glob dotrze na odległość  $4,5^\circ$  do Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy Lwa. Jednocześnie jeszcze bardziej zbliży się do gwiazdy 3. wielkości  $\eta$  Leonis. Tuż na południe od polskich granic przebiegnie północna granica zakrycia jej przez Księżyc, którego brzeg w południowej Polsce minie  $\eta$  Leo w odległości  $1'$ . W tym momencie tarcza Księżyca zaprezentuje się w fazie 7%.

Księżyc w fazie zaledwie 3% zdąży się wznieść na wysokość  $9^\circ$  24 września o godzinie 5:30. Bardzo cienki sierp Księżyca można próbować dostrzec także 25 września. Około godziny 6:00, na 18 godzin przed nowiem, jego tarcza w fazie mniejszej od 1% pokaże się  $3^\circ$  nad widnokregiem. Przy dobrym stanie atmosfery powinno dać się ją dostrzec przez lornetkę.

*Ariel MAJCHER*

## Swobodne i uśpione czarne dziury

W 2015 roku detektory LIGO zarejestrowały pierwszy raz w historii falę grawitacyjną (*Aktualności*  $\Delta_{16}^4$ ). Uznaje się również, że była to pierwsza *bezpośrednia* obserwacja czarnej dziury. Wcześniej identyfikowano czarne dziury w sposób pośredni, obserwując ich wpływ na otaczającą je materię (np. dyski akrecyjne, czyli materię opadającą na czarną dziurę emitującą silne promieniowanie elektromagnetyczne w różnych zakresach długości fal).

Fale grawitacyjne wystarczająco silne, aby mogły być rejestrowane przez aktualnie działające detektory, są generowane w bardzo specyficznych warunkach – wtedy gdy dwie czarne dziury (ewentualnie czarna dziura i gwiazda neutronowa lub dwie gwiazdy neutronowe) kończą trwające miliony lub nawet miliardy lat opadanie na siebie po powoli zacieśniających się prawie kołowych orbitach. Chwilę przed ostatecznym połączeniem się składników układu podwójnego emitowane przez niego promieniowanie grawitacyjne zaczyna być wystarczająco silne, aby było rejestrowalne dla detektorów, i zaraz po połączeniu znów jego natężenie szybko spada do poziomu poniżej czułości detektorów. Czas takiej obserwacji jest rzędu sekund, lub nawet ułamka sekundy. Obecnie działające detektory fal grawitacyjnych nie są więc w stanie wykryć istnienia czarnej dziury, która nie znajduje się w opisanych powyżej, bardzo specyficznych okolicznościach. Dla takich czarnych dziur pozostają różnego rodzaju metody obserwacji *pośrednich*.

Jeżeli tzw. gwiazdowa czarna dziura (o masie kilku do kilkudziesięciu mas Słońca) nie jest składnikiem układu podwójnego albo jej partnerem jest zwykła gwiazda, ale nie ma znaczącego przepływu materii pomiędzy gwiazdą a czarną dziurą, to wokół czarnej dziury nie będzie świecącego dysku akrecyjnego, który można by „zobaczyć” w teleskopach. Okazuje się jednak, że nawet wtedy sytuacja nie jest zupełnie beznadziejna. Z pomocą przychodzi znowu grawitacja. Taka czarna dziura zakrzywia bowiem czasoprzestrzeń i jeżeli znajdzie się pomiędzy obserwatorem a znajdującym się dalej źródłem światła, to wpływa na bieg światła od źródła do obserwatora. Zjawisko to nazywa się soczewkowaniem grawitacyjnym, o którym wiele razy wspominaliśmy już w *Delcie* (zobacz m.in.  $\Delta_{21}^8$ ). Wykorzystując właśnie zjawisko soczewkowania grawitacyjnego, zespół polskiego projektu OGLE dokonał ostatnio dwóch przełomowych odkryć.

Obserwacja pierwszej swobodnej czarnej dziury w naszej Galaktyce to pierwsze z tych odkryć. Ma ono długą historię. Gwiazdę, której światło było przez tę czarną dziurę wzmocnione, zaczęto obserwować w 2011 roku. Wtedy to zaobserwowano pojaśnienie gwiazdy wskutek przejścia czarnej dziury między gwiazdą a nami, obserwatorami. Ten przypadek mikrosoczewkowania grawitacyjnego oznaczono symbolem OGLE-2011-BLG-0462. Przez kolejne dziewięć lat zjawisko było regularnie obserwowane

przez zespół projektu OGLE. Zebrano 15 545 niezwykle precyzyjnych pomiarów jasności obiektu. Obserwacje te były uzupełnione o precyzyjne pomiary astrometryczne wykonane przez zespół astronomów pod kierunkiem prof. Kailasha Sahu (Space Telescope Science Institute) przy użyciu teleskopu Hubble’a oraz dodatkowe dane zebrane przez niezależny zespół kierowany przez doktorantkę Casey Lam i prof. Jessicę Lu (Uniwersytet Kalifornijski w Berkeley).

Standardowo przy obserwacji mikrosoczewkowania grawitacyjnego obserwuje się pojaśnienie źródła, spowodowane przez przechodzący na jego tle soczewkujący obiekt. W przypadku bardzo masywnych soczewek możliwe jest wykrycie za pomocą niesłychanie precyzyjnych instrumentów astrometrycznych dodatkowego efektu – tzw. mikrosoczewkowania astrometrycznego. Położenie źródła światła na sferze niebieskiej w trakcie zjawiska mikrosoczewkowania ulega bardzo niewielkiej, charakterystycznej zmianie. Jednoczesne obserwacje mikrosoczewkowania – fotometryczne i astrometryczne – umożliwiają wyznaczenie masy obiektu soczewkującego i w ten sposób określenie jego typu. Wyniki modelowania jednoznacznie wskazują, że zjawisko OGLE-2011-BLG-0462 wywołane zostało przez masywny obiekt o masie kilku mas Słońca. Ponieważ światło zwyczajnej gwiazdy o takiej masie byłoby z łatwością zarejestrowane, soczewka musi być obiektem nieświecącym – swobodną czarną dziurą o masie gwiazdowej.

Drugim odkryciem jest pierwsza obserwacja „uśpionej” czarnej dziury o masie gwiazdowej poza naszą Galaktyką. Termin „uśpiona” oznacza czarną dziurę tworzącą układ podwójny ze zwykłą gwiazdą, w którym nie ma znaczącego przepływu masy między gwiazdą a czarną dziurą. Odkrycie było możliwe dzięki sześciolatniemu obserwacjom spektroskopowym wykonanym za pomocą teleskopu VLT należącego do Europejskiego Obserwatorium Południowego (ESO) oraz niemal dwudziestoletniemu obserwacjom fotometrycznym prowadzonym w ramach polskiego projektu OGLE za pomocą Teleskopu Warszawskiego w Chile. Układ VFTS 243 znajduje się w mgławicy Tarantula, będącej ogromnym obszarem gwiazdotwórczym w Wielkim Obłoku Magellana. Składa się on z gorącej, niebieskiej gwiazdy o masie 25 mas Słońca oraz z niewidocznego towarzysza o masie co najmniej 9 razy większej od masy Słońca. Badacze przetestowali różne hipotezy dotyczące natury tego ciemnego składnika układu i doszli do wniosku, że może to być jedynie „uśpiona” czarna dziura. Zasadnicze znaczenie dla udowodnienia tej hipotezy miały obserwacje minimalnych zmian jasności układu będących skutkiem soczewkowania światła emitowanego przez gwiazdę stanowiącą główny składnik układu.

Szymon CHARZYŃSKI

Informacja za serwisem Obserwatorium Astronomicznego UW, gdzie można znaleźć więcej szczegółów oraz zdjęcia i animacje.



# Funkcja Eulera

Bartłomiej BZDEGA

Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Przez  $\varphi(n)$  oznaczamy liczbę tych reszt z dzielenia przez  $n$ , które są względnie pierwsze z  $n$ . Jest to tytułowa funkcja Eulera.

Zachodzi równość  $\varphi(1) = 1$ , gdyż  $\text{NWD}(0, 1) = 1$ . Dalej będziemy rozważać wyłącznie  $n > 1$ .

Jeżeli  $n > 1$  i znamy wszystkie dzielniki pierwsze liczby  $n$  – niech będą nimi  $p_1, p_2, \dots, p_k$  – to wartość funkcji Eulera możemy wyrazić jawnym wzorem. Aby go wyprowadzić, wykorzystamy regułę włączeń i wyłączeń (zob. kącik 43. w  $\Delta_{22}^7$ ). Niech  $A_d$  oznacza zbiór tych reszt z dzielenia przez  $n$ , które są podzielne przez  $d$ . Jeśli  $d | n$ , to  $|A_d| = n/d$ . Ze zbioru reszt z dzielenia przez  $n$  należy wyeliminować te liczby, które mają wspólny dzielnik z  $n$ , więc

$$\varphi(n) = n - |A_{p_1} \cup A_{p_2} \cup \dots \cup A_{p_k}|.$$

Nietrudno zauważyć, że  $A_{p_{i_1}} \cap \dots \cap A_{p_{i_j}} = A_{p_{i_1} \dots p_{i_j}}$  dla  $i_1 < \dots < i_j$ . Na mocy reguły włączeń i wyłączeń

$$\begin{aligned} (*) \quad \varphi(n) &= n - \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} |A_{p_{i_1} \dots p_{i_j}}| \\ &= n - \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_j \leq k} \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_j}} = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right). \end{aligned}$$

Ze wzoru (\*) wynika, że jeśli  $m$  i  $n$  są liczbami względnie pierwszymi, to  $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ . O funkcji spełniającej taki warunek mówimy, że jest moltiplicatywna. Można podać niezależny dowód moltiplicatywności funkcji  $\varphi$  za pomocą chińskiego twierdzenia o resztach, o którym jeszcze kiedyś napiszę.

Zwróćmy uwagę, że dla liczby pierwszej  $p$  mamy  $\varphi(p) = p - 1$ . Małe twierdzenie Fermata (zob. kącik 44. w  $\Delta_{22}^8$ ) można więc zapisać następująco: jeśli  $a$  jest liczbą całkowitą względnie pierwszą z  $p$ , to  $a^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod{p}$ . Naturalnym uogólnieniem tego twierdzenia jest

**Twierdzenie Eulera.** Niech  $n > 1$  będzie liczbą naturalną. Jeżeli  $a$  jest liczbą całkowitą względnie pierwszą z  $n$ , to  $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ .

Dowód jest bardzo podobny do przedstawionego w poprzednim kąciku dowodu małego twierdzenia Fermata, trzeba tylko znaleźć odpowiednik lematu o ciągu arytmetycznym.

**Lemat.** Przy założeniach z twierdzenia Eulera – niech  $r_1 < r_2 < \dots < r_{\varphi(n)}$  będą wszystkimi resztami z dzielenia przez  $n$  względnie pierwszymi z  $n$  i niech  $s_i$  oznacza resztę z dzielenia przez  $n$  liczby  $ar_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, \varphi(n)$ . Wówczas

$$\{s_1, s_2, \dots, s_{\varphi(n)}\} = \{r_1, r_2, \dots, r_{\varphi(n)}\}.$$

**Dowód lematu.** Ponieważ  $a$  oraz  $r_i$  są względnie pierwsze z  $n$ , liczba  $ar_i$ , a w konsekwencji również  $s_i$  jest względnie pierwsza z  $n$ . Pozostaje wykazać, że  $ar_i \not\equiv ar_j \pmod{n}$  dla  $1 \leq i < j \leq \varphi(n)$ . Gdyby było inaczej, to mielibyśmy podzielność  $n | a(r_j - r_i)$ , z której wynika, że  $n | r_j - r_i$ , gdyż  $a$  i  $n$  są względnie pierwsze. Jednak  $0 < r_j - r_i < n$  – sprzeczność.

**Dowód twierdzenia Eulera.** Z lematu wynika, że

$$a^{\varphi(n)} r_1 r_2 \dots r_{\varphi(n)} = (ar_1)(ar_2) \dots (ar_{\varphi(n)}) \equiv s_1 s_2 \dots s_{\varphi(n)} = r_1 r_2 \dots r_{\varphi(n)} \pmod{n},$$

wystarczy więc podzielić obie strony kongruencji przez  $r_1 r_2 \dots r_{\varphi(n)}$ , co można uczynić, gdyż jest to liczba względnie pierwsza z  $n$ .

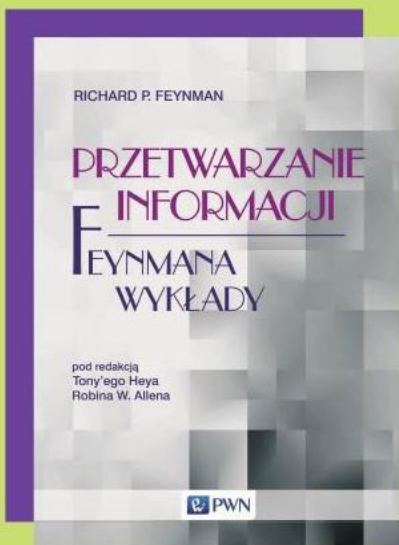
(Dla liczb pierwszych otrzymujemy  $p | a^p - a$  – jest to alternatywna wersja małego twierdzenia Fermata).

1. Udowodnić, że  $2^{16} - 2^4 | n^{16} - n^4$  dla każdego naturalnego  $n$ .
2. Wykazać, że  $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$  dla liczb złożonych  $n$ .
3. Za pomocą definicji funkcji  $\varphi$  i wzoru (\*) wykazać, że liczb pierwszych jest nieskończenie wiele.
4. Niech  $n \geq 2$  będzie liczbą naturalną, a  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$  jej rozkładem na czynniki pierwsze. Połóżmy  $\alpha = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$ . Wykazać, że  $n | a^{\varphi(n)+\alpha} - a^\alpha$  dla każdej liczby całkowitej  $a$ .
5. Ciąg  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$  spełnia następujące warunki:  $a_1$  jest liczbą całkowitą dodatnią oraz  $a_{n+1} = \varphi(a_n) + c$  dla  $n \geq 1$ , przy czym  $c \geq 2$  jest pewną ustaloną liczbą naturalną. Dowieść, że ten ciąg jest od pewnego miejsca okresowy.
6. Wykaż, że iloczyn  $r_1 r_2 \dots r_{\varphi(n)}$  z dowodu twierdzenia Eulera przystaje do 1 lub  $-1$  modulo  $n$ . (Jest to uogólnienie twierdzenia Wilsona).

Wskazówki do zadania  
1.  $2^{16} - 2^4 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$ .  
Sprawdzając podzielność przez nieparzyste czynniki przedstawionego iloczynu, korzystamy z twierdzenia Eulera, natomiast dowodząc podzielności przez  $2^4$ , warto wykorzystać wzory skróconego mnożenia.  
2. Najmniejszy dzielnik pierwszy liczby  $n$  nie przekracza  $\sqrt{n}$ .  
3. Jeśli liczb pierwszych jest skończenie wiele i  $n$  jest ich iloczynem, to z definicji  $n$  jest liczbą pierwszą, co jest sprzecznością.  
4. Niech  $x$  będzie największym wspólnym dzielnikiem liczb  $n$  względnie pierwszych z  $n$  oraz  $y = x/u$ . Wystarczy wykazać, że  $n | a^{\varphi(n)} x | a^{\varphi(n)} y$  w ostatniej podzielności skorzystać z moltiplicatywności funkcji  $\varphi$  oraz twierdzenia Eulera.  
5. Jeśli  $a^n$  jest liczbą pierwszą, to  $a^{n+1} = a^n + a - 1$ , więc wśród  $2c$  kolejnych wyrazów tego ciągu musi wystąpić liczba złożona podzielna przez  $a^n$ . Jeśli  $a^n$  jest złożona, to szacujemy  $a^{n+1}$  za pomocą nierówności z zadania 2.  
Reszta jest kwestią techniki – dowodzimy, że ciąg  $(a)$  ma nieskończenie wiele wyrazów nieprzekraczających pewnej dużej liczby  $M$ , więc pewne dwa jego wyrazy muszą być równe, a to w połączeniu z indukcją daje tezę.  
6. Rozważamy  $n > 2$ . Podobnie jak w dowodzie twierdzenia Wilsona w poprzednim kąciku, parujemy reszty modulo  $n$ . Pozostaje reszty, które są swoimi własnymi odwrotnościami – parujemy każdą taką resztę  $r$  z  $r^{-1}$ . Jeśli  $r$  jest liczbą parzystą, to  $r^{-1} = n - r - 1$  w tym samym zbiorze reszt, gdy  $d \in \{4, 8, 12, 20, 24, \dots\}$  i liczb parzystych pierwszych dodatnich  $d$ .

## Zadania





Jak głęboko powinno sięgać wykształcenie informatyka? Czy powinien wiedzieć, co to jest złącze p-n i jak działa tranzystor? Są to pytania, które zadają sobie poważne gremia odpowiedzialne za kształcenie informatyków na uniwersytetach i politechnikach, nie znajdując odpowiedzi satysfakcjonującej wszystkich. Informatyka, teoria informacji i fizyka są dziedzinami, pomiędzy którymi trudno zarysować wyraźną granicę. Świetnym przykładem przenikania się tych dziedzin jest książka, która powstała na podstawie wykładów Richarda Feynmana wygłoszonych i zarejestrowanych w latach osiemdziesiątych ubiegłego wieku (niedługo przed śmiercią uczonego). Na podstawie taśm i notatek Feynmana powstała książka, której pierwsze wydanie ukazało się w latach dziewięćdziesiątych, i była to kontynuacja legendarnej serii „Wykładów Feynmana”. Książka przedstawia spojrzenie genialnego fizyka na „Możliwości i ograniczenia maszyn obliczeniowych”, jak nazywał się prowadzony przez Feynmana wykład. Autor we właściwy sobie, przystępny, obrazowy, przemawiający

do intuicji i wyobraźni sposób opowiada o podstawach teorii obliczeń oraz o tym, jak te obliczenia są wykonywane przez prawdziwe maszyny. Może się wydawać, że książka o komputerach i przetwarzaniu informacji, która powstała kilka dekad temu, będzie mieć już wyłącznie wartość historyczną. Okazuje się jednak, że tak nie jest. Większość omawianych w niej tematów to zagadnienia na tyle podstawowe, że się nie zdezaktualizowały. Współcześni studenci nadal uczą się o automatach skończonych, maszynach Turinga, twierdzeniu Shannona, termodynamice, półprzewodnikach, złączach p-n czy tranzystorach na różnych kierunkach studiów. Tutaj wszystkie te tematy i wiele innych mamy w jednej publikacji napisanej przez autora słynącego z tego, że w swoich podręcznikach stara się jak najprościej przekazać podstawowe idee stanowiące sedno omawianych zjawisk i teorii. Jest to niewątpliwie podręcznik niestandardowy, który można polecić nie tylko wielbicielom serii „Wykładów Feynmana”.

**Richard P. Feynman, „Przetwarzanie informacji”, pod redakcją Tony'ego Heya i Robina W. Allena, PWN, 2022**

Analiza matematyczna jest piękną, klasyczną teorią matematyczną wykładaną na pierwszych latach studiów kierunków ścisłych: matematyce, fizyce, informatyce, astronomii oraz wielu kierunkach politechnicznych i ekonomicznych. Jeżeli jednak ktoś potrzebuje użyć rachunku różniczkowego, ale nie odebrał tego rodzaju wykształcenia albo od jego odebrania minęło już na tyle dużo czasu, że część wiedzy wyparowała, to czy możliwe jest szybkie samodzielne uzupełnienie tych braków? Książka autora wielu podręczników do fizyki (i artykułów w *Delcie*), Jerzego Gintera, jest dobrą odpowiedzią na tego typu zapotrzebowanie.

Nie jest to klasyczny podręcznik do analizy matematycznej, ale raczej przewodnik, przedstawiający podstawowe pojęcia w taki sposób, aby czytelnika jak najszybciej wprowadzić do praktycznych zastosowań. W tym celu autor ilustruje każde wprowadzane pojęcie przykładami jego użycia. Często odwołuje się do interpretacji geometrycznej prezentowanych zagadnień. Książka jest bogato ilustrowana. Autor omawia również szczegółowo numeryczne metody obliczania pochodnych, całek i szeregów. Uzupełnieniem wydania książkowego są pliki (arkusze kalkulacyjne oraz prezentacje), które można pobrać ze strony wydawnictwa. Każdy rozdział jest zakończony listą zadań wraz ze szczegółowymi rozwiązaniami.

W doborze materiałów, tempie wprowadzania nowych pojęć oraz ilustrujących ich przykładów widać ogromne doświadczenie dydaktyczne autora. Książka jest napisana bardzo przystępnym językiem, i spokojnie można ją polecić już uczniom szkół średnich. Dla studentów będzie ona znakomitym uzupełnieniem akademickich podręczników do analizy (ale ich nie zastąpi). Nauczyciele natomiast znajdą w niej wiele niestandardowych przykładów i zadań do wykorzystania na lekcjach z rachunku różniczkowego.

**Jerzy Ginter, „Nie bój się pochodnej” PWN, 2021**

