Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2022

Zadania z matematyki nr 845, 846

Redaguje Marcin E. KUCZMA

845. Udowodnić nierówność dla liczb nieujemnych $x_1,\ldots,x_n$ oraz $y_1,\ldots,y_n$:
$$\Bigl(\sum_{i\neq j} x_i y_j\Bigr)^2 \geqslant \Bigl(\sum_{i\neq j} x_i x_j\Bigr)\Bigl(\sum_{i\neq j} y_i y_j\Bigr)$$
(każda z trzech napisanych sum ma $n(n-1)$ składników odpowiadających wszystkim uporządkowanym parom (i,j) różnych numerów $i,j\in\{1,\ldots,n\}$).

846. Ostrosłup ścięty, którego podstawami są podobne wielokąty o znanych polach A i B, został podzielony płaszczyznami $\pi_1,\ldots,\pi_{n-1}$, równoległymi do podstaw, na n wielościanów o równych objętościach; płaszczyzna π_k leży między płaszczyznami π_{k-1} i π_{k+1} (dla $k=1,\ldots,n-1$), gdzie π_0, π_n to płaszczyzny zawierające, odpowiednio, podstawy o polach A, B. Obliczyć pole przekroju ostrosłupa każdą z płaszczyzn π_k.

Zadanie 846 zaproponował pan Mirosław Matlęga ze Skoczowa.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2022

Przypominamy treść zadań:

841. Dla zadanej liczby naturalnej $n\geqslant 2$ ustalić, ile jest ciągów liczb rzeczywistych $(a_1,\ldots,a_n)$ o tej własności, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_1,\ldots,x_n)$ zachodzi równość
$$\sum_{i=1}^{n}\Bigl|\sum_{j=1}^{n} a_{i+j}x_j\Bigr| = \sum_{i=1}^{n}\bigl|x_i\bigr|,$$
gdzie (cyklicznie) $a_r = a_{r-n}$ dla $r>n$.

842. Na płaszczyźnie dane są trzy koła (domknięte, tj. rozważane wraz z punktami brzegu). Zakładamy, że ich część wspólna jest niepusta. Przesuwamy każde koło (niezależnie) w taki sposób, że dla każdych dwóch kół odległość ich środków po przesunięciu jest nie większa niż przed przesunięciem. Udowodnić, że przesunięte koła nadal mają niepustą część wspólną.

841. Niech $(a_1,\ldots,a_n)$ będzie ciągiem spełniającym podany warunek. Ustalmy liczby $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ oraz $\varepsilon\in\{1,-1\}$ i podstawmy w równaniu: $x_n=1$, $x_k=\varepsilon$, $x_j=0$ dla $j\neq k,n$. Ponieważ $a_{i+n}=a_i$, otrzymujemy
$$\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon a_{i+k}+a_i| = 2. \tag{1}$$
Z kolei weźmy $x_n=1$, $x_j=0$ dla wszystkich $j<n$; dostajemy
$$\sum_{i=1}^{n}|a_i| = 1. \tag{2}$$
Szacujemy z góry lewą stronę wzoru (1) (korzystając z cykliczności ciągu (a_i) oraz ze wzoru (2)):
$$\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon a_{i+k}+a_i| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\bigl(|a_{i+k}|+|a_i|\bigr) = \sum_{i=1}^{n}|a_i| + \sum_{i=1}^{n}|a_i| = 2.$$
Lewa strona ma wartość 2 (wzór (1)), co oznacza, że ta nierówność musi być równością; czyli że $|\varepsilon a_{i+k}+a_i| = |a_{i+k}|+|a_i|$ dla wszystkich i. Po podniesieniu do kwadratu i redukcji mamy
$$\varepsilon a_{i+k}a_i = |a_{i+k}a_i| \quad \text{dla } i=1,\ldots,n.$$
Skoro to prawda zarówno dla $\varepsilon=1$, jak i dla $\varepsilon=-1$, zatem $a_{i+k}a_i=0$ dla wszystkich i. Wobec dowolności $k\in\{1,\ldots,n-1\}$ znaczy to, że w ciągu $(a_1,\ldots,a_n)$ tylko jeden wyraz może być niezerowy. Wobec wzoru (2) ma on moduł 1.

Stąd wynika postać rozważanych ciągów $(a_1,\ldots,a_n)$: na dowolnie wybranej pozycji liczba ±1, poza tym zera; przy tym każdy ciąg takiej postaci ma własność wymaganą w zadaniu. Jest więc $2n$ takich ciągów.

842. Oznaczmy środki trzech danych kół przez A, B, C, zaś ich promienie r_A, r_B, r_C. Wybierzmy i ustalmy punkt P leżący w części wspólnej tych kół: $AP\leqslant r_A$, $BP\leqslant r_B$, $CP\leqslant r_C$. Przesunięcia, o jakich mowa, przenoszą środki do położeń A', B', C'. Ustalmy oznaczenia tak, by AB był tym bokiem trójkąta ABC, który w najmniejszym stopniu ulega skróceniu przy tych przesunięciach. Istnieje więc taka liczba $k\leqslant 1$, że
$$A'B' = k\cdot AB, \qquad A'C'\leqslant k\cdot AC, \qquad B'C'\leqslant k\cdot BC. \tag{3}$$
Niech D będzie punktem leżącym po tej stronie prostej AB, co punkt C, i takim, że trójkąt ABD jest podobny do trójkąta $A'B'C'$. Skoro $A'B'=k\cdot AB$, znaczy to, że $A'C'=k\cdot AD$, $B'C'=k\cdot BD$, i wobec oszacowań (3):
$$AD\leqslant AC, \qquad BD\leqslant BC. \tag{4}$$
Będziemy chcieli znaleźć punkt Q spełniający warunki
$$AQ\leqslant AP, \qquad BQ\leqslant BP, \qquad DQ\leqslant CP. \tag{5}$$
Wówczas podobieństwo (o skali k), przekształcające trójkąt ABD na trójkąt $A'B'C'$, przeniesie ów punkt Q do położenia Q', dla którego, zgodnie z zależnościami (5),
$$A'Q' = k\cdot AQ \leqslant k\cdot AP \leqslant kr_A \leqslant r_A,$$
i podobnie
$$B'Q'\leqslant r_B, \qquad C'Q'\leqslant r_C.$$
Punkt Q' znajdzie się więc w części wspólnej kół o środkach A', B', C' i promieniach r_A, r_B, r_C, co zakończy dowód tezy zadania. Pozostaje wskazać punkt Q o własnościach (5).

Jeżeli $DP\leqslant CP$, można przyjąć po prostu $Q=P$.

W przeciwnym przypadku, tj. gdy $DP>CP$ (rysunek), niech Q będzie punktem symetrycznym do P względem prostej ℓ, symetralnej odcinka CD. Leży on po tej stronie owej prostej, co punkt D. Z uwagi na nierówności (4), po tejże stronie prostej ℓ leżą także punkty A i B. Czworokąt $CDQP$ jest trapezem równoramiennym ($DQ=CP$), bo prosta ℓ jest też symetralną odcinka PQ. Z położenia punktów A,B,D,Q po jednej jej stronie wynikają dwie pierwsze z potrzebnych nam nierówności (5); trzecia zaś, jak zauważyliśmy, staje się równością. Tak określony punkt Q ma zatem wymagane własności; dowód jest zakończony.