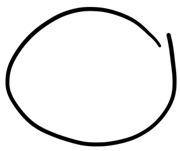
Czy dobrze rysuję obwarzanki?

Michał MIŚKIEWICZ
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW; Instytut Matematyczny PAN

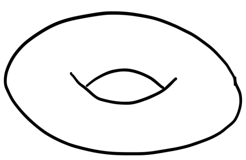
Tworząc odręczne rysunki, większość znanych mi matematyków rzadko sięga po cyrkiel i linijkę.
W związku z tym ich typowy rysunek okręgu wygląda tak:



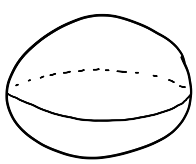
Może i bliżej temu do elipsy, może i pętla się nie domyka, ale przecież nie o to chodzi, prawda?
Takie nierówne kółko zazwyczaj w zupełności nam wystarczy podczas rozwiązywania zadania olimpijskiego. Czasem może nawet posłużyć do zilustrowania sfery w nieskończenie wymiarowej przestrzeni, czemu nie.

(Precyzyjne rysunki oczywiście mają swoje zalety, ale nie o tym tutaj).

W tym właśnie duchu nauczono mnie kiedyś rysowania torusa, czyli typowego obwarzanka. Zaczynam od elipsy (takiej szerszej niż wyższej), rysuję w jej środku „uśmiech” w kształcie łuku, a wreszcie nad uśmiechem dodaję krótszy łuk – „czapeczkę”. O tak:



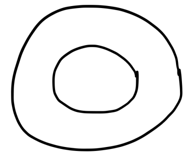
To bardzo typowy obrazek, który Czytelnik najpewniej już gdzieś widział. Niedawno nabrałem jednak wątpliwości, czy aby ten ostry kąt między uśmiechem a czapeczką nie jest wynikiem pomyłki. Tego typu błędy naprawdę się ludziom zdarzają – popularnym przykładem jest następujący szkic kuli:



Taki szkic stara się przedstawić rzut prostokątny kuli na płaszczyznę kartki (ew. ekranu, zależnie od medium wybranego przez Czytelnika). Ponieważ sam rzut ma kształt koła, dla podkreślenia trójwymiarowości zaznaczono też równik (czyli pojedyncze koło wielkie). Żeby dobrze oddać równik na rysunku, należy odpowiedzieć sobie na pytanie, jak wygląda jego rzut prostokątny. Poza zdegenerowanym przypadkiem – gdy punkt obserwacji znajduje się w płaszczyźnie równika – zawsze ma on kształt elipsy. Elipsa taka może być bardzo spłaszczona (gdy patrzymy tuż znad płaszczyzny równika), i wówczas „zakręty” na końcach długiej osi mogą być dowolnie ciasne, ale jednak zawsze gładkie. Rysunek wyżej jest więc pod tym jednym względem zwodniczy.

Zakładamy tu, że punkt obserwacji znajduje się (nieskończenie) daleko od obserwowanego obiektu – inaczej widziany obraz nie jest rzutem prostokątnym, lecz środkowym. Zresztą założenie to zwyczajowo obowiązuje przy rysowaniu sześcianu na lekcjach matematyki. Na lekcjach plastyki już niekoniecznie (na ten temat pisał Marek Kordos w Δ^2_{74} i Δ^5_{13}).

Wróćmy do torusa. Moje wątpliwości podsycił obraz torusa widzianego „z góry”, czyli na wprost dziury:

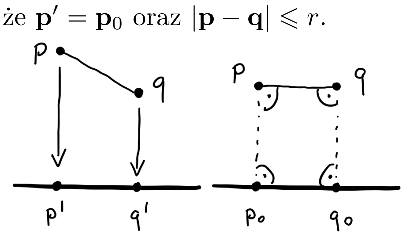


Są tu dwa koncentryczne okręgi i o żadnych kantach nie może być mowy. Coś więc jest na rzeczy!

Żeby rozstrzygnąć zagadkę, nie unikniemy formalnego opisu. Zacznijmy od znajdującego się w przestrzeni trójwymiarowej okręgu o (o promieniu $R > 0$). Ustalając drugi promień r, możemy wprowadzić (pełny) torus $\mathcal{T}$ jako zbiór tych wszystkich punktów, które są odległe od o o co najwyżej r; inaczej mówiąc, jako r-otoczkę o. Oczywiście dobieramy $0 < r < R$, by powstały obwarzanek miał dodatnią grubość, a jednocześnie, by jego dziurka nie była zaklejona ciastem.

Można – choć nie trzeba – przekonać się, że dla okręgu $o = \{(x, y, 0) : x^2 + y^2 = R^2\}$ odpowiada to dokładnie zbiorowi $\mathcal{T} = \{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - R)^2 + z^2 \leqslant r^2\}$.

Rozważmy rzut prostokątny na wybraną przez nas płaszczyznę P, oznaczając przy tym obrazy punktów i figur znakiem prim ($'$). Obraz $\mathcal{T}$ przy rzutowaniu jest wtedy niczym innym jak r-otoczką o' (obrazu o) rozumianą jako podzbiór P. To stwierdzenie brzmi jak tautologia, jednak należy je uzasadnić. Otóż jeśli punkt $\mathbf{p}$ należy do torusa $\mathcal{T}$, to zgodnie z definicją istnieje punkt $\mathbf{q} \in o$ spełniający $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \leqslant r$. Rzutowanie nie zwiększa odległości (może ją najwyżej zmniejszyć, zob. rysunek niżej), więc punkty $\mathbf{p}' \in \mathcal{T}'$ i $\mathbf{q}' \in o'$ również są odległe o r lub mniej. To dowodzi zawierania $\mathcal{T}'$ w r-otoczce o'. Dowód przeciwnego zawierania jest podobny. Zaczynamy od punktu $\mathbf{p}_0 \in P$ w r-otoczce o' oraz odpowiadającego mu punktu $\mathbf{q}_0 \in o'$ (takiego, że $|\mathbf{p}_0 - \mathbf{q}_0| \leqslant r$), a następnie rozważamy punkt $\mathbf{q} \in o$ spełniający $\mathbf{q}' = \mathbf{q}_0$ oraz punkt $\mathbf{p} := \mathbf{p}_0 + (\mathbf{q} - \mathbf{q}_0)$ (czyli dopełniający $\mathbf{p}_0, \mathbf{q}_0, \mathbf{q}$ do prostokąta). Pozostaje wówczas sprawdzić, że $\mathbf{p}' = \mathbf{p}_0$ oraz $|\mathbf{p} - \mathbf{q}| \leqslant r$.

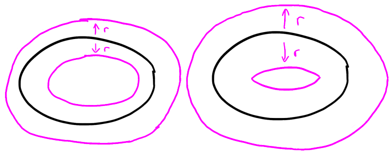


Podsumujmy: $\mathcal{T}'$ jest r-otoczką o'. Od stworzenia poprawnego rysunku $\mathcal{T}'$ dzielą nas więc dwa kroki, musimy ustalić:

(1) Jaki kształt ma o'?
(2) Jak wygląda otoczka tego zbioru?

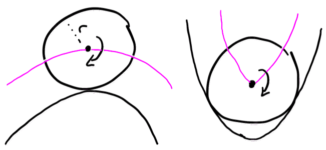
Szczęśliwie na pierwsze pytanie odpowiedzieliśmy już przy okazji analizy błędnego rysunku sfery – mianowicie o' jest rzutem prostokątnym okręgu, a więc elipsą.

Odpowiedź na drugie pytanie brzmi: na dwoje babka wróżyła. Polecam Czytelnikowi naszkicować sobie r-otoczki wybranej elipsy dla różnych wartości r. Okazuje się, że dla małych $r > 0$ figura ta przypomina pierścień o gładkim brzegu – studenci matematyki uczą się nawet *twierdzenia o otoczeniu tubularnym*, którego jest to szczególny przypadek. Dla większych r brzeg przestaje być gładki po swojej wewnętrznej stronie – powstają kanty podobne do tych, które nauczono mnie kiedyś rysować (rys. 1). Dobrze wiedzieć, że nie żyłem w błędzie!



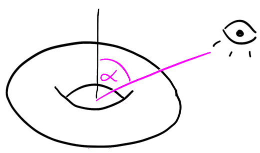
Rys. 1. r-otoczki elipsy dla różnych r

Fenomen powstawania takich kantów jest znany wszystkim amatorom jazdy rowerem. Wyobraźmy sobie, że koło o promieniu r toczymy po podłożu w kształcie elipsy – tor środka koła wyznacza wtedy zarys r-otoczki elipsy. Oczywiście po zewnętrznej stronie elipsy koło jedzie gładko. Gdy jednak toczymy je po stronie wewnętrznej, bywa różnie: odpowiednio duże koło może „zaklinować się” przy końcach długiej osi (punkt styku koła z podłożem robi wówczas skok). Z tego też powodu rowery o mniejszych kołach lepiej się sprawdzają w nierównym terenie.



Rys. 2. Koło rowerowe toczone po nierównym terenie

Czytelnik znający pojęcie *krzywizny* (o której można przeczytać u Jerzego Konarskiego w Δ^4_{19}) zapewne rozpozna, że to krzywizna elipsy decyduje o klinowaniu się lub nie. Konkretnie: że r-otoczka jest gładka dokładnie wtedy, gdy krzywizna jest wszędzie mniejsza od $1/r$. W połączeniu z informacją, że elipsa o półosiach a, b ma krzywiznę pomiędzy a/b^2 i b/a^2 (zależnie od punktu, w którym mierzymy), pomaga nam to rozstrzygnąć, kiedy obserwowany przez nas obwarzanek wydaje się mieć kanty. Otóż jeśli kierunek obserwacji jest odchylony od osi torusa o kąt α (jak na rys. 3), to elipsa o' ma półosie R i $R\cos\alpha$, a maksimum jej krzywizny wynosi $\frac{1}{R\cos^2\alpha}$. Krytyczny kąt α – powyżej którego tracimy gładkość – spełnia więc równość $\cos^2\alpha = \frac{r}{R}$.



Rys. 3. Oznaczenie kąta obserwacji

Zadania

1. Wykazać, że jeśli patrzymy na torus pod kątem α, to dziurę widzimy dokładnie wtedy, gdy $\cos\alpha < \frac{r}{R}$.
2. Jaki kształt ma torus widziany z boku (czyli z kąta $\alpha = 90°$)?
3. Nasz rysunek torusa różni się nieznacznie od otrzymanej otoczki elipsy, a mianowicie „uśmiech” wystaje nieco poza „czapeczkę”. Jakie jest matematyczne uzasadnienie wystającej części uśmiechu?
4. Wykazać, że zewnętrzny zarys torusa – tj. kształt, od którego zaczynamy rysunek – tak naprawdę nigdy nie jest elipsą, z oczywistym wyjątkiem obserwacji pod kątem $\alpha = 0°$.
5. W przypadku $r > R$ powstaje „torus” $\mathcal{T}$ z zaklejoną dziurką, więc jego dowolny rzut jest gładki. Czy oznacza to, że sama bryła $\mathcal{T}$ ma gładką powierzchnię?

Rozwiązania na str. 6.

Wuja słuchać będziesz!

*Wojciech CZERWIŃSKI**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Przeczytałem jakiś czas temu w znakomitej książce Jareda Diamonda *The World Until Yesterday*, że w pewnej kulturze tradycyjnej małym chłopcem opiekuje się raczej wuj (brat matki) niż ojciec. Uzasadnieniem tego zwyczaju ma być fakt, że ojciec nigdy nie jest pewny, natomiast wuj jako krewny ze strony matki z pewnością dzieli z chłopcem wspólne geny. Z pewnością zgodziłby się z taką tezą Sienkiewiczowski Onufry Zagłoba, tłumaczył przecież Rochowi Kowalskiemu, że „gdzie ojca nie ma, tam, pismo mówi, wuja słuchać będziesz...”. Mimo wszystko trudno nie zapytać – czy taki zwyczaj faktycznie ma jakiś sens? A może lepiej – kiedy taki zwyczaj można uzasadnić z genetycznego punktu widzenia?

Wydaje się ewolucyjnie korzystne, żeby chłopcem opiekował się mężczyzna, który dzieli z nim możliwie najwięcej genów. Taki mężczyzna jest najbardziej podobny do chłopca, więc może mu przekazać schematy zachowania najbardziej adekwatne dla danego zestawu cech. Ale, co pewnie o wiele ważniejsze, taki mężczyzna wyczuwa, że jest z chłopcem spokrewniony (patrz uwaga na marginesie). A zatem można się spodziewać, że wyczuwając to pokrewieństwo, w wielu przypadkach będzie okazywał chłopcu więcej uwagi, co będzie oczywiście korzystne. Można więc zapytać: w jakich sytuacjach należy zakładać, że raczej wuj jest bliżej spokrewniony z chłopcem niż ojciec? Łatwo zauważyć, że takie założenie ma sens jedynie, jeśli naprawdę wiele dzieci nie jest genetycznymi dziećmi swoich domniemanych ojców. Trochę dla intelektualnej rozrywki, a trochę dla próby zrozumienia tej tradycyjnej społeczności spróbujemy wyznaczyć liczbę p taką, że: jeśli mniej niż dla frakcji p dzieci domniemany

Ssaki mają dość dobrze rozwinięte systemy intuicyjnego wyczuwania pokrewieństwa po zapachu. Świetny wykład Roberta Sapolsky'ego ze Stanford University na ten temat można obejrzeć tu: `https://youtu.be/P388gUPSq_I`.