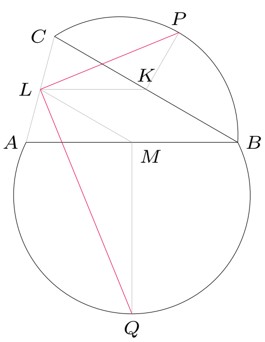
Klub 44 M

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 833 ($WT = 3{,}29$) i 834 ($WT = 1{,}24$) z numeru 1/2022

Witold Bednarek	Łódź	42,13
Kacper Morawski	Warszawa	42,07
Andrzej Kurach	Ryjewo	41,81
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Marek Spychała	Warszawa	38,66
Paweł Najman	Kraków	37,33
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Michał Adamaszek	Kopenhaga	33,29
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,34

Rozwiązanie zadania M 1717.



Niech P i Q oznaczają środki łuków odcinków kołowych odpowiednio BC i AC. Niech K, L i M będą środkami odcinków odpowiednio BC, CA i AB. Wtedy z twierdzenia o linii środkowej w trójkącie mamy

$$\sphericalangle PKL = 90^\circ + \sphericalangle CKL = 90^\circ + \sphericalangle CBA = 90^\circ + \sphericalangle LMA = \sphericalangle LMQ.$$

Ponadto również

$$LK = \tfrac{1}{2}AB = \tfrac{1}{2}BC = LM.$$

Z równości

$$\sphericalangle KPB = \tfrac{1}{2}\sphericalangle CPB = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \sphericalangle BQA) = \sphericalangle MBQ$$

wynika, że trójkąty prostokątne BKP oraz QMB są podobne, więc $\frac{KP}{MB} = \frac{KB}{MQ}$. Wobec tego

$$\frac{KP}{KL} = \frac{KP}{MB} = \frac{KB}{MQ} = \frac{ML}{MQ}.$$

Łącząc powyższą równość z równością kątów PKL i LMQ, wnioskujemy, że trójkąty PKL i LMQ są podobne. W szczególności $\sphericalangle QLM = \sphericalangle LPK$. Zatem

$$\sphericalangle QLP = \sphericalangle QLM + \sphericalangle MLK + \sphericalangle KLP = \sphericalangle QLM + \sphericalangle LMA + \sphericalangle MQL = 90^\circ.$$

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2022

Przypominamy treść zadań:

839. Funkcja f (zmiennej rzeczywistej) nazywa się *wypukła* w przedziale J, gdy dla każdej pary punktów $x, y \in J$ oraz dla każdej pary liczb $p, q \geqslant 0$, których suma wynosi 1, zachodzi nierówność $f(px+qy) \leqslant pf(x) + qf(y)$.

Niech będą dane funkcje $f, F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ związane zależnością $F(x) = xf(1/x)$. Udowodnić, że w przedziale $(0,\infty)$ funkcja F jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest wypukła.

840. Dane są liczby naturalne $n, k > 1$. Niech $M = 1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}$.
(**a**) Dowieść, że jeśli $M \equiv 1 \pmod{n}$, to $k^{M-1} \equiv 1 \pmod{M}$.
(**b**) Wyjaśnić, czy zachodzi implikacja odwrotna (do podanej w części (**a**)).

839. W równaniu wiążącym funkcje f i F podstawiamy $x = 1/z$; otrzymujemy $f(z) = zF(1/z)$. To pokazuje, że zależność f od F wyraża się tym samym wzorem, co zależność F od f. Stąd wniosek, że dla dowodu równoważności (z tezy zadania) wystarczy wykazać wynikanie w jedną stronę: że z wypukłości f wynika wypukłość F; czyli że z własności

$$(1)\qquad f(px+qy) \leqslant pf(x) + qf(y) \quad \text{dla } x,y>0;\ p,q \geqslant 0;\ p+q=1$$

wynika analogiczna własność

$$(2)\quad F(PX+QY) \leqslant PF(X) + QF(Y) \quad \text{dla } X,Y>0;\ P,Q \geqslant 0;\ P+Q=1.$$

Przyjmijmy więc założenie (1); weźmy dowolne liczby $X, Y > 0$, $P, Q \geqslant 0$ takie, że $P+Q=1$, i podstawmy w (1):

$$x = \frac{1}{X},\quad y = \frac{1}{Y},\quad p = \frac{PX}{PX+QY},\quad q = \frac{QY}{PX+QY}$$

(więc $p+q=1$). Wychodzi

$$f\left(\frac{P}{PX+QY} + \frac{Q}{PX+QY}\right) \leqslant \frac{PX}{PX+QY} f\left(\frac{1}{X}\right) + \frac{QY}{PX+QY} f\left(\frac{1}{Y}\right),$$

co (wobec równości $P+Q=1$) przepisujemy w postaci

$$(PX+QY)f\left(\frac{1}{PX+QY}\right) \leqslant PX\cdot f\left(\frac{1}{X}\right) + QY\cdot f\left(\frac{1}{Y}\right).$$

A ponieważ $tf(1/t) = F(t)$, jest to dokładnie nierówność (2), którą chcieliśmy udowodnić.

840. Przedmiotem rozważań są warunki:

$$(3)\qquad M \equiv 1 \pmod{n}$$

oraz

$$(4)\qquad k^{M-1} \equiv 1 \pmod{M}.$$

Nie zakładając spełnienia któregokolwiek z nich, zauważamy, że dla dowolnych liczb naturalnych $n, k > 1$ oraz dla liczby M (określonej w zadaniu) zachodzi równość $(k-1)M = k^n - 1$, wobec czego $k^n \equiv 1 \pmod{M}$. Dzielimy $M-1$ przez n (z resztą); czyli piszemy

$$(5)\qquad M - 1 = qn + r \quad (0 \leqslant r < n).$$

Zatem

$$(6)\qquad k^{M-1} = k^{qn}k^r \equiv k^r \pmod{M}.$$

I teraz:

(**a**) Jeżeli spełniony jest warunek (3), to $r = 0$, więc dowodzona zależność (4) wynika wprost ze związku (6).

(**b**) Odpowiedź *tak*; bowiem jeśli spełniony jest warunek (4), to (zgodnie z (6))

$$(7)\qquad k^r \equiv 1 \pmod{M}.$$

Liczba k^r jest jednym ze składników sumy definiującej M, więc $1 \leqslant k^r < M$, co (wobec (7)) oznacza, że $k^r = 1$. Tak więc $r = 0$ i z równości (5) wynika (3).

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.