Klub 44 F

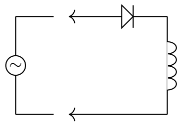
Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2022

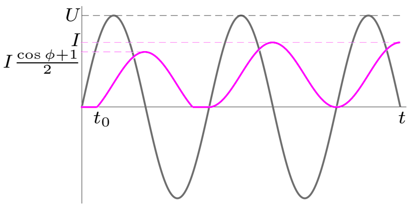
Przypominamy treść zadań:

736. Cewkę o indukcyjności L połączoną szeregowo z idealną diodą podłączono w chwili t_0 do źródła napięcia przemiennego $u = U \sin \omega t$ (rys. 1). Znaleźć natężenie prądu w cewce w funkcji czasu. Opory omowe zaniedbujemy.

737. Lodówka utrzymuje w zamrażalniku stałą temperaturę $-12°$C. Gdy temperatura w pokoju wynosi $25°$C, silnik włącza się co 8 minut, pracuje 5 minut, po czym następuje pauza. Jak często i na jak długo będzie włączać się lodówka, gdy temperatura w pokoju obniży się do $15°$C? Przy jakiej maksymalnej temperaturze w pokoju lodówka może utrzymać w zamrażalniku zadaną temperaturę? Zakładamy, że lodówka jest idealną maszyną cieplną.



Rys. 1



Rys. 2

736. Jeżeli w chwili podłączenia do źródła napięcie jest ujemne, czyli włączone w kierunku zaporowym dla diody, prąd nie popłynie aż do chwili, gdy napięcie zmieni znak.

Rozważmy więc przypadek, gdy w chwili podłączenia napięcie źródła jest nieujemne i wynosi $U \sin \varphi$, $0 \leqslant \varphi = \omega t_0 \leqslant \pi$. Równanie Kirchhoffa dla naszego obwodu ma postać $U \sin \omega t = L di/dt$, a jego rozwiązanie

(1) $$i = -U \cos \omega t/(L\omega) + \text{const}.$$

Stałą wyznaczamy z warunku początkowego $\omega t_0 = \varphi$ oraz $i = 0$ i otrzymujemy

(2) $$i = U(\cos \varphi - \cos \omega t)/(L\omega).$$

Natężenie prądu rośnie do chwili , gdy $\omega t = \pi$ i napięcie źródła spada do zera. Mimo zmiany znaku źródła napięcia prąd w obwodzie nadal płynie kosztem energii pola magnetycznego zmagazynowanej w cewce. Jego natężenie maleje do zera, gdy $\omega t = 2\pi - \varphi$. Prąd przestaje płynąć aż do momentu, gdy rosnące napięcie źródła ponownie osiąga wartość zero. Wtedy $\omega t = 2\pi$, a równanie (2) ma postać

(3) $$i = U(1 - \cos \omega t)/(L\omega).$$

Odtąd dioda cały czas pozostaje otwarta, a natężenie prądu zmienia się od zera do $2U/L\omega$, co ilustruje rysunek 2.

737. Wprowadźmy oznaczenia: T_1– początkowa temperatura w pokoju w skali bezwzględnej, T_2 – ustalona temperatura zamrażalnika, $\tau_1 = 5$ min – czas pracy silnika w jednym cyklu, $\tau_2 = 3$ min – czas trwania pauzy, W– praca wykonana przez silnik w jednym cyklu, Q_2 – ciepło pobrane z zamrażalnika w czasie pracy silnika.

Ponieważ zakładamy, że mamy do czynienia z idealną maszyną chłodzącą, zachodzi związek

$$W/Q_2 = \Delta T/T_2, \quad \text{gdzie } \Delta T = T_1 - T_2,$$

stąd

(1) $$T_2 = Q_2 \Delta T/W.$$

Temperatura zamrażalnika nie zmienia się, więc ciepło pobrane z zamrażalnika w wyniku pracy silnika równe jest ciepłu dostarczonemu do zamrażalnika i jest proporcjonalne do czasu trwania cyklu i różnicy temperatur $Q_2 \sim (\tau_1 + \tau_2)\, \Delta T$, natomiast praca wykonana przez silnik $W \sim \tau_1$. Podstawiając to do równania (1), otrzymujemy

$$T_2 \sim (\tau_1 + \tau_2)\, (\Delta T)^2/\tau_1.$$

Oznaczając przez $\tau_1{}'$ i $\tau_2{}'$ czasy pracy silnika i pauzy po obniżeniu temperatury pokoju do $T_1{}'$, możemy napisać

(2) $$(\tau_1 + \tau_2)\, (\Delta T)^2/\tau_1 = (\tau_1{}' + \tau_2{}')\, (\Delta T')^2/\tau_1{}', \quad \text{gdzie} \Delta T' = T_1{}' - T_2.$$

Gdy silnik nie pracuje, szybkość przepływu ciepła z pokoju do zamrażalnika jest proporcjonalna do różnicy temperatur, stąd

(3) $$\tau_2 \Delta T = \tau_2{}' \Delta T'.$$

Z równań (2) i (3) otrzymujemy: $\tau_1{}' = 2$ min, $\tau_2{}' = 4{,}1$ min. Maksymalną możliwą temperaturę w pokoju znajdujemy z warunku $\tau_2{}'' = 0$ (silnik pracuje cały czas).

$$\Delta T_{\max} = \Delta T \sqrt{8/5} = 45{,}8 \text{ K}, \qquad t_{\max} = 34{,}8°\text{C}.$$

Rozwiązanie zadania M 1719.
Pokażemy indukcyjnie, jak ustawić liczby naturalne w nieskończony ciąg tak, aby każda suma co najmniej dwóch kolejnych wyrazów tego ciągu nie była liczbą pierwszą.

Weźmy $a_1 = 1$, $a_2 = 3$. Załóżmy, że skończony ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_n$ $(n > 1)$ spełniający postulowany warunek został już skonstruowany, i niech m będzie najmniejszą liczbą naturalną, która nie jest wyrazem tego ciągu.

Wprowadźmy oznaczenie

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + m$$

i niech $a_{n+1} = S!$ oraz $a_{n+2} = m$. Ciąg $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}, a_{n+2}$ również spełnia żądany warunek. Rzeczywiście każda suma zawierająca wyraz a_{n+1} jest równa $S! + k$, dla pewnego $1 < k \leqslant S$, i nie jest liczbą pierwszą, ponieważ jest podzielna przez k.

Kontynuując tę konstrukcję, otrzymujemy ciąg nieskończony spełniający założenie indukcyjne. Z konstrukcji wynika również, że każda liczba naturalna pojawia się w tym ciągu dokładnie raz.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 730 ($WT = 2{,}4$), 731 ($WT = 2{,}25$) 732 ($WT = 1{,}64$) i 733 ($WT = 3{,}06$) z numerów 1, 2/2022

Ryszard Baniewicz	Włocławek	43,64
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Tomasz Wietecha	Tarnów	15 – 41,05
Sławomir Buć	Mystków	39,50
Piotr Adamczyk	Warszawa	1 – 36,96
Mateusz Kapusta	Wrocław	35,59
Jacek Konieczny	Poznań	33,42
Ryszard Woźniak	Kraków	32,96
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2 – 29,78