Tożsamość Cauchy'ego, iloczyn Wallisa i wzór Stirlinga

*Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet im. Adama Mickiewicza w Poznaniu

*Bartłomiej BZDĘGA**

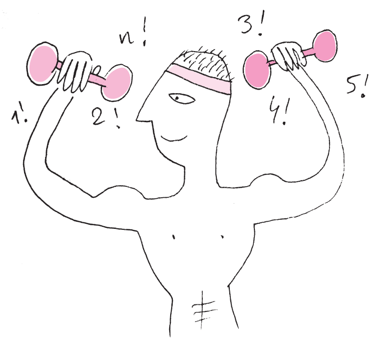
Wstęp

Celem niniejszego artykułu jest wyprowadzenie wzoru Stirlinga przybliżającego $n!$, a przy okazji pokazanie kawałka ładnej matematyki. Umyślnie zatem nie pójdziemy najkrótszą drogą, lecz drogą, która jest możliwie elementarna i pozwala zwiedzającym rozejrzeć się od czasu do czasu.

Punktem wyjścia będzie *tożsamość Cauchy'ego*

$$4^n = \sum_{i+j=n} \binom{2i}{i}\binom{2j}{j}, \tag{1}$$

której przedstawiony tu dowód kombinatoryczny pochodzi z książki *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa* Williama Fellera (jestem bardzo wdzięczny profesorowi Piotrowi Śniademu z Polskiej Akademii Nauk za wskazanie tego źródła).



Dowód równości w *iloczynie Wallisa*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{8^2}{7\cdot 9}\cdot\ldots, \tag{2}$$

który tu zamieszczam, jest lekką modyfikacją dowodu z artykułu Johana Wästlunda zatytułowanego *An elementary proof of Wallis' product formula for pi*. Zmiana polega na wykorzystaniu tożsamości Cauchy'ego.

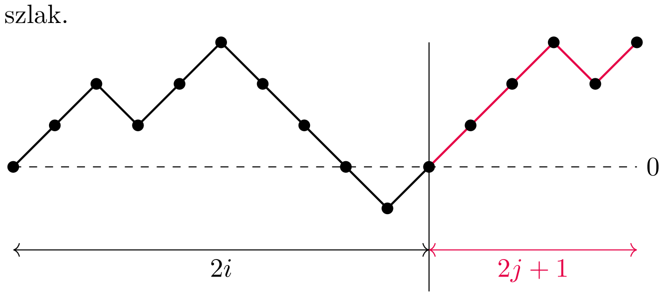
Dowód *wzoru Stirlinga*

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}, \tag{3}$$

korzystający z iloczynu Wallisa, zaczerpnąłem z materiałów dydaktycznych *Stirling approximation formula* profesora Jacka Cichonia z Politechniki Wrocławskiej, czyniąc gdzieniegdzie drobne uproszczenia.

1. Tożsamość Cauchy'ego

Lewą stronę równości (1) można zinterpretować – dość nietypowo – jako liczbę ciągów binarnych długości $2n+1$, z przewagą jedynek nad zerami. Przedstawiamy je graficznie jako *szlaki górskie*, które rozpoczynają się na wysokości 0 i składają się z $2n+1$ *kroków* tej samej długości, wiodących w górę (odpowiednik jedynki) lub w dół (odpowiednik zera) pod kątem 45°. Wszystkie takie szlaki kończą się na nieparzystej wysokości powyżej poziomu 0. Na poniższym rysunku widnieje przykładowy szlak.



Liczbę kroków szlaku będziemy nazywać jego *długością*, a różnicę wysokości pomiędzy końcem i początkiem – jego *względną wysokością*. Wyróżnione punkty na szlaku możemy interpretować jako wartości funkcji określonej na pewnym zbiorze kolejnych liczb całkowitych i przyjmującej wartości całkowite. Każdy punkt znajdujący się na wysokości 0 będziemy nazywać *miejscem zerowym* szlaku, w analogii do funkcji. Oznaczmy pionową linią – *przegrodą* – ostatnie miejsce zerowe. Dzieli ono szlak na dwie części spełniające następujące warunki:

(C1) pierwsza część (szlak długości $2i$) zaczyna się i kończy na wysokości 0;

(C2) druga część (szlak długości $2j+1$), nie licząc początku, znajduje się całkowicie powyżej poziomu 0.

Miejscem podziału może być początek szlaku – wtedy pierwsza część zostaje zdegenerowana do punktu. Zwróćmy uwagę, że suma współrzędnych każdego punktu szlaku jest tej samej parzystości, w szczególności pierwsza część szlaku zawsze ma parzystą długość.

Wykażemy, że liczba szlaków z przegrodą umieszczoną tak jak na rysunku wynosi $\binom{2i}{i}\binom{2j}{j}$. W pierwszej części mamy i kroków w górę i tyle samo w dół, co daje dokładnie $\binom{2i}{i}$ możliwości, nawet jeśli ta część jest zdegenerowana.

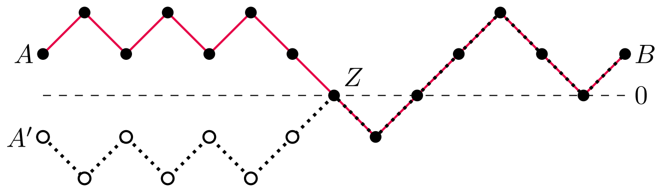
Z drugą częścią nie jest już tak łatwo. Będziemy potrzebować następującej zasady.

Zasada odbicia. *Niech $A = (x_a, y_a)$ i $B = (x_b, y_b)$, przy czym $y_a, y_b > 0$ i $x_a < x_b$. Ponadto niech A' będzie punktem symetrycznym do A względem osi OX. Wówczas zbiory szlaków:*

- *S_1 – łączących A i B mających co najmniej jedno miejsce zerowe,*
- *S_2 – wszystkich łączących A' i B*

są równoliczne.

Dowód. Na każdym szlaku $s \in S_1$ odnajdźmy jego pierwsze miejsce zerowe Z, następnie odbijmy część od A do Z symetrycznie względem osi OX. Złączając odbitą część z pozostałą, otrzymamy szlak $f(s)$, na rysunku zaznaczony linią przerywaną.



Z drugiej strony, każdy szlak $s' \in S_2$ zaczyna się poniżej zera, a kończy powyżej, więc ma miejsce zerowe (można to nazwać *dyskretną własnością Darboux*). Możemy więc, analogicznie jak dla szlaku $s \in S$, odbić względem osi OX część szlaku s' od A' do pierwszego miejsca zerowego. Tak określone odwzorowanie jest odwrotne do f. To dowodzi, że f jest bijekcją, więc $|S_1| = |S_2|$. □

Oznaczmy przez $S_{u,d}$ zbiór szlaków o u krokach w górę i d krokach w dół, które rozpoczynają się w ustalonym punkcie. Oczywiście $|S_{u,d}| = \binom{u+d}{u}$. Nas interesuje liczba szlaków rozpoczynających się w punkcie O, bez miejsc zerowych poza nim. Zbiór takich szlaków oznaczmy przez $S^\star_{u,d}$, przy czym u i d określamy jak wyżej. Poniższe twierdzenie mówi nam, ile ich jest.

Twierdzenie Bertranda. *Zachodzi równość* $|S^\star_{u,d}| = \frac{u-d}{u+d}\binom{u+d}{d}$.

Dowód. Każdy szlak $s \in S^\star_{u,d}$ zaczyna się krokiem w górę, możemy więc rozważać szlaki mające początek w punkcie $A = (1,1)$ i koniec w $B = (u+d, u-d)$. Wszystkich takich szlaków jest $|S_{u-1,d}| = \binom{u+d-1}{d}$ (wykorzystaliśmy jeden krok w górę, by dojść do A). Liczba wszystkich szlaków od $A' = (1,-1)$ do B jest równa $|S_{u,d-1}| = \binom{u+d-1}{d-1}$. Na mocy zasady odbicia taka sama jest liczba szlaków od A do B mających miejsca zerowe. Z tego wynika, że

$$|S^\star_{u,d}| = \binom{u+d-1}{d} - \binom{u+d-1}{d-1}, \tag{4}$$

co po prostych rachunkach daje tezę. □

Tu warto wspomnieć o liczbach Catalana. Można je definiować na wiele sposobów, między innymi za pomocą szlaków. Liczbę szlaków długości $2n$, rozpoczynających się i kończących na wysokości 0, bez punktów poniżej 0, oznaczamy przez C_n. Jeśli na początku takiego szlaku dołożymy krok w górę, otrzymamy szlak, który po wyjściu z punktu startowego nigdy nie wraca do jego poziomu, zatem $C_n = |S^\star_{n+1,n}|$. Z twierdzenia Bertranda

$$C_n = |S^\star_{n+1,n}| = \frac{1}{2n+1}\binom{2n+1}{n} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Wróćmy do dowodu tożsamości Cauchy'ego. Liczba wszystkich szlaków spełniających warunek (C2) jest na mocy (4) równa sumie

$$\sum_{k\geqslant 0} |S^\star_{j+k+1,j-k}| = \sum_{k\geqslant 0}\left(\binom{2j}{j-k} - \binom{2j}{j-k-1}\right),$$

która, niczym teleskop, składa się do $\binom{2j}{j}$.

Pora na krótkie podsumowanie. Łączna liczba szlaków rozpoczynających się na wysokości 0 i kończących na dodatniej wysokości, mających długość $2n+1$, jest równa 4^n. Liczba takich szlaków z przegrodą po $2i$ krokach jest równa $\binom{2i}{i}\binom{2j}{j}$, więc 4^n jest sumą takich liczb po całkowitych nieujemnych i, j, spełniających równość $i + j = n$. To kończy dowód tożsamości Cauchy'ego.

2. Iloczyn Wallisa

Ciąg iloczynów częściowych

$$W_n = \frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\ldots\cdot\frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)} \tag{5}$$

jest rosnący, gdyż wszystkie czynniki są większe od 1. Z analogicznej przyczyny ciąg

$$W'_n = \frac{2n+2}{2n+1}W_n = = 2\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdot\ldots\cdot\frac{2n(2n+2)}{(2n+1)^2}$$

jest malejący. Ponadto $W'_n/W_n \to 1$ przy $n \to \infty$, więc te ciągi mają wspólną granicę W oraz

$$W_n < W < W'_n = \frac{2n+2}{2n+1}W_n. \tag{6}$$

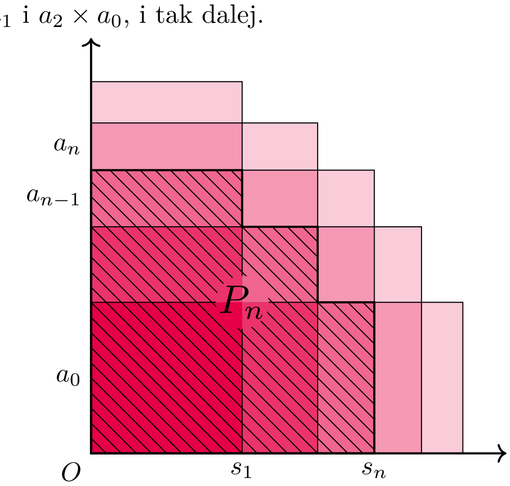
Wykorzystamy tożsamość Cauchy'ego do obliczenia granicy W. Dla liczb całkowitych nieujemnych n określamy

$$a_n = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Na mocy tożsamości Cauchy'ego ciąg (a) spełnia równanie

$$a_0a_n + a_1a_{n-1} + a_2a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}a_1 + a_na_0 = 1.$$

Ma to ciekawą interpretację graficzną. Rozważmy pierwszą ćwiartkę układu współrzędnych i umieśćmy w niej kwadrat o boku a_0 (warstwa nr 0). Obudujmy go dwoma prostokątami o wymiarach $a_0 \times a_1$ i $a_1 \times a_0$ (warstwa nr 1). Kontynuujemy z prostokątami $a_0 \times a_2$, $a_1 \times a_1$ i $a_2 \times a_0$, i tak dalej.



Niech P_n będzie wielokątem utworzonym z warstw od 0 do $n-1$. Skoro każda warstwa ma pole 1, to pole P_n jest równe n. Na pierwszy rzut oka im większe n, tym bardziej wielokąt P_n przypomina ćwiartkę koła o promieniu

$$s_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-1}.$$

Wykażemy, że to nie jest przypadek. Dla wygody przyjmijmy $s_0 = 0$, a wtedy:

Lemat 1. *Dla $n \geqslant 0$ zachodzi równość $s_n = \frac{2n}{4^n}\binom{2n}{n}$.*

Dowód. Dla $n = 0$ jest to oczywiste. Krok indukcyjny jest jednolinijkowy:

$$s_{n+1} = s_n + a_n = \frac{2n+1}{4^n}\binom{2n}{n} = \\ = \frac{2n+2}{4^{n+1}}\binom{2n+2}{n+1}.$$

Pora, by wkroczył do akcji iloczyn Wallisa. Mnożąc licznik i mianownik w iloczynie (5) przez $2^{2n}(n!)^2$, otrzymamy

$$W_n = \frac{4^{2n}(n!)^4}{(2n+1)((2n)!)^2} = \frac{4^{2n}}{(2n+1)\binom{2n}{n}^2}, \tag{7}$$

więc z lematu **1** wynika, że $s_n^2 W_n = \frac{4n^2}{2n+1}$. Korzystając z nierówności (6), otrzymujemy

$$2n-1 < s_n^2 W_n < s_n^2 W < \frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{4n^2}{2n+1} < 2n.$$

Nie licząc punktu O, wierzchołkami wielokąta P_n są punkty $A_{i,j} := (s_i, s_j)$, w których $i + j = n$ lub $i + j = n + 1$. Oczywiście $|OA_{i,j}|^2 = s_i^2 + s_j^2$. Na mocy powyższych nierówności mamy

$$\frac{2n-2}{W} \leqslant \frac{2i-1}{W} + \frac{2j-1}{W} < |OA_{i,j}|^2 < \\ < \frac{2i}{W} + \frac{2j}{W} \leqslant \frac{2n+2}{W},$$

więc wspomniane wierzchołki leżą między okręgami o wspólnym środku O i promieniach $\sqrt{2(n\pm 1)/W}$. Pole wielokąta P_n szacuje się zatem z góry i z dołu przez pola ćwiartek kół o takich promieniach. Przypomnijmy, że wielokąt P_n ma pole n, więc

$$\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2(n-1)}{W} < n < \frac{\pi}{4}\cdot\frac{2(n+1)}{W},$$

a po przekształceniu

$$\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) < W < \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Przechodząc z n do nieskończoności, otrzymujemy $W = \pi/2$.

3. Wzór Stirlinga

Dla $n > 0$ określamy

$$f(n) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n - n.$$

W kolejnych lematach udowodnimy, że istnieje granica $g = \lim_{n\to\infty}(\ln(n!) - f(n))$. W tym celu wprowadzamy funkcje pomocnicze

$$r(k) = \left(k+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1,$$

$$R(n) = \sum_{k=1}^{n-1} r(k).$$

Dobór tych funkcji uzasadnia poniższy lemat.

Lemat 2. *Zachodzi równość*

$$1 - R(n) = \ln(n!) - f(n)$$

dla wszystkich całkowitych $n \geqslant 1$.

Dowód. Dla $n = 1$ mamy równości $1 - R(1) = 1 - 0 = 1$ oraz $\ln(1!) - f(1) = 0 - \frac{1}{2}\ln 1 + 1 = 1$. Indukcyjnie,

$$1 - R(n+1) = 1 - R(n) - r(n) = \\ = \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln n + n - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 = \\ = \ln(n!) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + n + 1 = \\ = \ln((n+1)!) - \left(n+1+\frac{1}{2}\right)\ln(n+1) + n + 1 = \\ = \ln((n+1)!) - f(n+1),$$

co kończy dowód. □

Aby pójść dalej, potrzebujemy dość dokładnego oszacowania wartości funkcji logarytmicznej.

Lemat 3. *Dla każdego $x \geqslant 0$ zachodzą nierówności*

$$x - \frac{1}{2}x^2 \leqslant \ln(1+x) \leqslant x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3.$$

Dowód. Są one równościami, gdy $x = 0$, więc wystarczy udowodnić nierówności między pochodnymi

$$\left(x - \frac{1}{2}x^2\right)' \leqslant (\ln(1+x))' \leqslant \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right)',$$

równoważnie $1 - x \leqslant \frac{1}{1+x} \leqslant 1 - x + x^2$. Ostatnie nierówności otrzymujemy z podzielenia oczywistych nierówności $1 - x^2 \leqslant 1 \leqslant 1 + x^3$ przez $1 + x$. □

Lemat 4. *Istnieje granica $\lim_{n\to\infty} R(n)$.*

Dowód. Na mocy lematu **3**:

$$r(k) \geqslant \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2}\right) - 1 = -\frac{1}{4k^2},$$

$$r(k) \leqslant \left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3}\right) - 1 = \frac{1}{12k^2} + \frac{1}{6k^3} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{4k^2}.$$

Szereg $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ jest zbieżny, gdyż

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2.$$

Mamy $|r(k)| \leqslant \frac{1}{4k^2}$, więc na mocy kryterium porównawczego szereg $\sum_{k=1}^{\infty}|r(k)|$ jest zbieżny. To dowodzi zbieżności szeregu $\sum_{k=1}^{\infty} r(k)$, co jest równoważne tezie lematu. □

Z lematów **2** i **4** wynika, że istnieją również granice

$$g = \lim_{n\to\infty}(1 - R(n)) = \lim_{n\to\infty}(\ln(n!) - f(n)),$$

$$G = e^g = \lim_{n\to\infty} e^{\ln(n!) - f(n)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}.$$

Ostatnia prosta! Granicę G obliczymy za pomocą iloczynu Wallisa, przy wykorzystaniu równości (7):

$$G = \frac{G^2}{G} = \lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{n!}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}}\right)^2}{\left(\frac{(2n)!}{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2n}}\right)} = \lim_{n\to\infty}\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}\sqrt{\frac{2}{n}} = \\ = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2}{n}(2n+1)W_n} = \sqrt{2\pi}.$$

To kończy dowód wzoru Stirlinga.