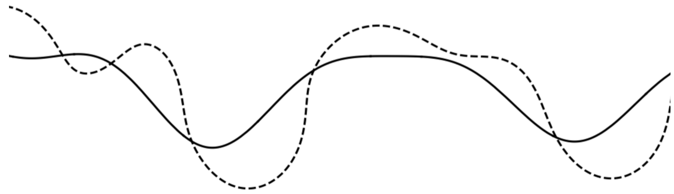
W którą stronę jechał rower?

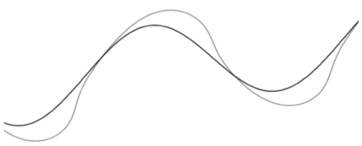
Agnieszka CHUDEK

Ta zagadka pojawiła się podczas Świątecznego Maratonu *Delty* w grudniu 2021 roku. Nagranie można obejrzeć na YouTube pod linkiem youtu.be/ndI8Enf-t-k?t=6703

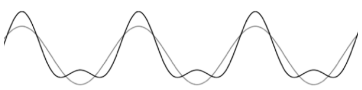
Wyobraźmy sobie, że zostaliśmy wezwani na miejsce napadu, z którego właśnie na rowerze zbiegł złodziej z torbą pełną łupów. Zostawił jednak na śniegu taki oto ślad



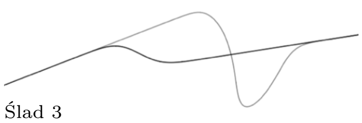
Pytanie tylko, w którą stronę odjechał…?



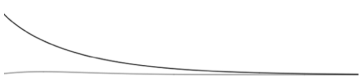
Ślad 1



Ślad 2



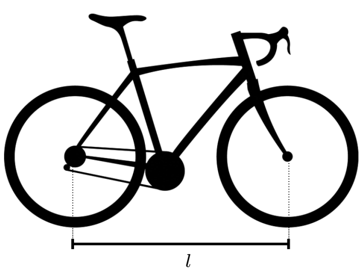
Ślad 3



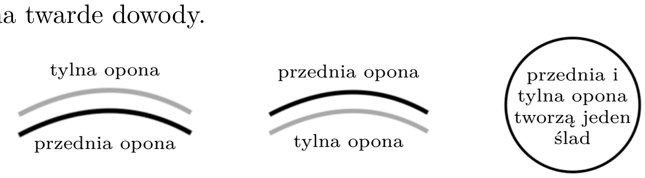
Ślad 4

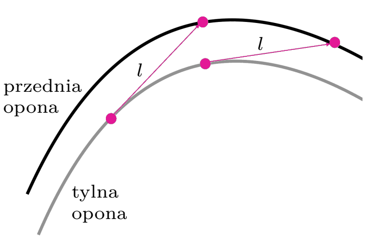
Oczywiście możemy próbować zgadywać, ale prawdziwy detektyw rzadko zdaje się na przypadek, zwłaszcza jeśli wie, że można być pewnym odpowiedzi. Spróbujmy zebrać narzędzia, które pozwolą nam jednoznacznie i dość szybko określić kierunek jazdy. W tym celu przyjrzyjmy się kilku innym śladom (ślady 1–4 naszkicowane na marginesie) i zastanówmy się, który z nich NIE może przedstawiać śladu roweru.

Żeby to sprawdzić, przeanalizujmy budowę roweru. Zwróćmy uwagę na przednie i tylne koło – są ze sobą sztywno połączone. Można sobie to wyobrazić tak, jakby punkty styku przedniej i tylnej opony z podłożem były końcami sztywnego pręta. Można zatem powiedzieć, że punkt styku tylnego koła z podłożem „patrzy” na punkt styku przedniego koła z podłożem, nieważne, jak to przednie koło jest obrócone. Widać, że w przypadku śladu 2 warunek ten nie jest spełniony. Wystarczy spojrzeć np. na „szczyt górki” czarnego śladu i zauważyć, że nie celuje ona w żaden punkt szarego śladu. Dla szarego śladu analogiczną sytuację mamy na „dnie doliny”. Zatem ślad 2 nie może być śladem jadącego roweru.



No dobrze, skoro tak dobrze nam idzie, to pójdźmy za ciosem i zobaczmy, co jeszcze da się wywnioskować z budowy roweru. Czy jesteśmy w stanie przewidzieć, jak będzie wyglądał ślad roweru jadącego w kółko? Rozważmy trzy najczęściej proponowane ślady i opierając się pokusie zgadywania, po prostu zdajmy się na twarde dowody.

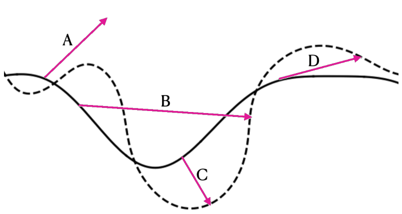




Wiemy już, że przednie i tylne koło są ze sobą połączone na sztywno i odległość między nimi wynosi tyle samo, czyli l, a tylne koło „patrzy” na przednie. Prześledźmy więc ruch roweru po łuku (rysunek obok) i zobaczmy, co z tego wynika.

Jeśli tylne koło porusza się po łuku, to przednie koło również będzie się poruszało po łuku, ale o większym promieniu.

Wspaniale! Wiemy już, który ślad odpowiada której oponie, dlatego pozostaje nam już tylko dopasować do nich długość roweru.



Na początek zastanówmy się, który z odcinków na rysunku obok w ogóle może być taką długością. Skoro wiemy, że odcinek ten musi łączyć oba ślady, to na pewno nie jest to A. Ponadto wiemy, że punkt na śladzie tylnej opony musi patrzeć na ślad przedniej opony, a to oznacza, że linia łącząca te dwa punkty nie może być przypadkowa, tylko jest to styczna do toru ruchu tylnej opony.

Zatem odpadają odcinki B oraz C. Jako możliwa długość roweru pozostaje odcinek D. Dlaczego możliwa? Bo żeby mieć pewność, musielibyśmy sprawdzić, czy ta długość odłożona w każdym miejscu pasuje do naszego śladu.

A teraz Drogi Czytelniku, już w pełni świadomie i na chłodno, niczym Sherlock Holmes, możesz przyjrzeć się śladowi z początku artykułu i wskazać, w którą stronę uciekł złodziej!

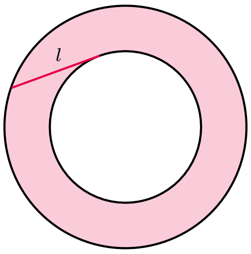
Miejmy nadzieję, że uda się go jeszcze złapać!

Kiedy już udało nam się pojmać złodzieja i ocalić skradzione łupy, przepełnieni dumą i euforią uświadamiamy sobie, że pomimo naszych niewątpliwych zasług, w postaci chłodnego osądu i błyskawicznej dedukcji, również mieliśmy trochę szczęścia.

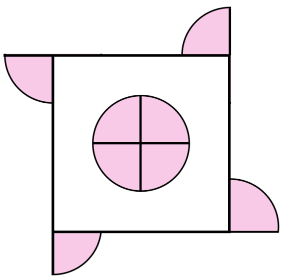
Dociekliwy Czytelnik zauważył na pewno, że gdyby złodziej uciekał, jadąc idealnie przed siebie, jego ślad byłby jedną prostą linią, i moglibyśmy tylko zgadywać, w którą stronę odjechał. Podobnie niemożliwym byłoby określenie kierunku jazdy w przypadku śladów idealnie okrągłych (chociaż trudno wyobrażać sobie złodzieja jeżdżącego w kółko w pobliżu miejsca zbrodni).

Czy są to jedyne dwa przypadki, w których niemożliwe jest stwierdzenie kierunku jazdy? Czy możliwe, żeby para gładkich krzywych miała tę właściwość, że każda linia styczna do jednej krzywej zawsze przecina drugą krzywą w dwóch miejscach, z dodatkowym warunkiem utrzymania stałej odległości po obu stronach punktu styku wzdłuż linii stycznej? Czy każda z krzywych musi mieć wtedy stałą krzywiznę?*

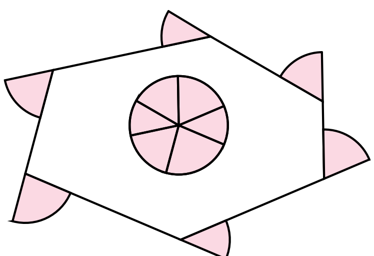
*Ten i kilka innych ciekawych przypadków omówiono w książce Stana Wagona *Mathematica In Action: Problem Solving Through Visualization and Computation* oraz w artykule *Tractrices, Bicycle Tire Tracks, Hatchet Planimeters, and a 100-year-old Conjecture*, którego autorami są Robert Foot, Mark Levi i Serge Tabachnikov.



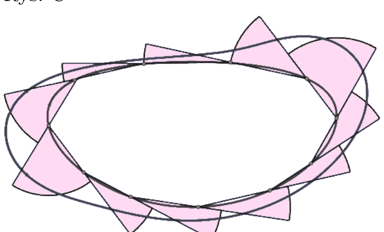
Rys. A



Rys. B



Rys. C



Rys. D

Na koniec wróćmy jeszcze na chwilę do rowerzysty jeżdżącego w kółko (rys. A). Patrząc na powstałe ślady, aż się prosi, żeby policzyć powierzchnię między nimi, a następnie rozszerzyć rozważania o dowolne krzywe. Czytelnik z Podzielną Uwagą na pewno policzył w międzyczasie, że w przypadku śladów okrągłych ta powierzchnia wynosi πl^2, gdzie l to długość roweru. Jak to będzie w przypadku innych krzywych? (Dla uściślenia, mówimy teraz tylko o krzywych zamkniętych.)

Zacznijmy od prostego przypadku. Wyobraźmy sobie, że jeździmy „w kółko" po kwadracie, w taki sposób, że jak tylne koło dojedzie do jego wierzchołka, to obracamy się na nim o 90° i jedziemy dalej przed siebie. Wtedy przednie koło na zakrętach zakreśli łuki jak na rysunku B, a powierzchnia między śladami zsumuje się również do πl^2. Jeśli będziemy poruszać się po dowolnej wypukłej wielokątnej ścieżce (co przedstawione jest na rys. C), to obszar między śladami przedniego koła i tylnego koła składa się z wycinków koła o promieniu l. Ponieważ zewnętrzne kąty wielokąta foremnego sumują się do 360°, wycinki te idealnie do siebie pasują, tworząc jedno pełne koło. Zatem obszar między śladami kół przedniego i tylnego dla rowerzysty jadącego po wypukłej wielokątnej ścieżce wynosi πl^2.

Idąc za ciosem, możemy uzyskiwać coraz lepsze przybliżenia obszaru między śladami – używając do przybliżania śladu tylnego koła wielokąta o coraz większej liczbie coraz krótszych boków (rys. D) – i przekonać się, że obszar pomiędzy dowolnymi zamkniętymi ścieżkami również wynosi πl^2. I to wszystko bez względu na długość ścieżek! Ciekawe, jak to będzie w przypadku ścieżki wklęsłej. . . ?

Język Wszechświata

*Suhani GUPTA**

* Centrum Fizyki Teoretycznej Polskiej Akademii Nauk

Trudno jest spoglądając na nocne niebo, nie zachwycić się pięknem ogromu nad naszymi głowami – od migoczących gwiazd, poprzez planety, aż po iskrzący się Księżyc i okazjonalne pokazy meteorów. Spojrzenie na niebo zawsze skłania do zastanowienia się nad naszym miejscem we Wszechświecie i nad tym, że jesteśmy maleńką częścią tego wielkiego kosmicznego oceanu. Kosmologia – dziedzina astronomii, która zajmuje się pytaniami związanymi z narodzinami, ewolucją i ostatecznym losem naszego Wszechświata – jest jednym z najstarszych kierunków myśli człowieka. Nie jest to zaskakujące, ponieważ nocne niebo było obserwowane od niepamiętnych czasów i zawsze zachęcało do zastanawiania się nad jego rozległością. Od czasów starożytnych Greków przez średniowiecze aż po współczesną naukę kosmologia przeszła długą drogę od nauki fenomenologicznej – pozbawionej danych i ograniczonej do myśli i wyobraźni – do precyzyjnej nauki ilościowej i *big-data*, w której przeprowadzamy eksperymenty i obserwacje, aby przetestować nasze teorie i przewidywania. A to stało się możliwe dzięki szybkiemu rozwojowi tej dziedziny w ubiegłym wieku.