Pierwszy stopień do raju

*Mariusz SKAŁBA**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Nauczyciel (**N**):	*Ile jest dwa dodać dwa?*
Jasio (**J**):	*Cztery.*
N:	*Dobrze.*
J:	(uśmiecha się szeroko)
N:	*A ile jest dwa dodać trzy?*
J:	*...też cztery?*
N:	*Źle!*
J:	(robi się bardzo smutny)
N:	*Nie martw się. Musisz to wiedzieć i będziesz wiedział!*[†]
J:	(uśmiecha się nieśmiało)

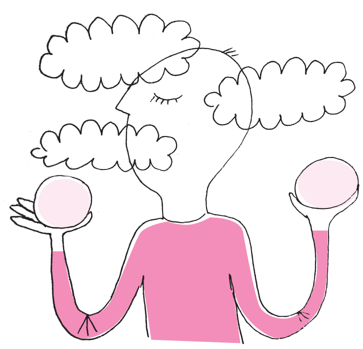
[†] Kreśląc program rozwoju matematyki na XX wiek, David Hilbert miał powiedzieć: *Wir müssen wissen. Wir werden wissen*, czyli *Musimy wiedzieć (i) będziemy wiedzieć.*

Sądząc z powyższej wymiany myśli, mamy tu do czynienia z dobrym nauczycielem, a Jaś też raczej rokuje. Ale dlaczego oceniając odpowiedzi ucznia, nauczyciel użył kwalifikacji moralnych?

Pytanie to pozostawmy bez odpowiedzi. Minęło 12 lat. Jan studiuje teraz na uniwersytecie matematykę wyższą, chociaż jego głównym zainteresowaniem jest ekonomia. Na ćwiczeniach z algebry przerabia równoliczność zbiorów. Przypomnijmy podstawową i ważną definicję:

Zbiory A i B nazywamy **równolicznymi** *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $f: A \to B$, która jest różnowartościowa i „na”.*

Jeśli A i B są równoliczne, to piszemy $|A| = |B|$. W przypadku zbiorów skończonych chodzi o to, że A oraz B mają po tyle samo elementów. Funkcje różnowartościowe i „na”, które pojawiają się w powyższej definicji, nazywamy *bijekcjami.*



W związku z pojęciem równoliczności studenci w grupie Jana przerabiają następujące zadanie:

> *Załóżmy, że A, B, C, D są zbiorami, które spełniają następujące warunki:*
> (W1) $|A| = |C|$ *oraz* $|B| = |D|$,
> (W2) $A \cap B = \emptyset$ *oraz* $C \cap D = \emptyset$.
> *Wykazać, że* $|A \cup B| = |C \cup D|$.

Robi się to tak: Mając bijekcje $f: A \to C$ i $g: B \to D$, określamy funkcję

$$h: A \cup B \to C \cup D$$

w następujący naturalny sposób:

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{gdy} \quad x \in A \\ g(x) & \text{gdy} \quad x \in B. \end{cases}$$

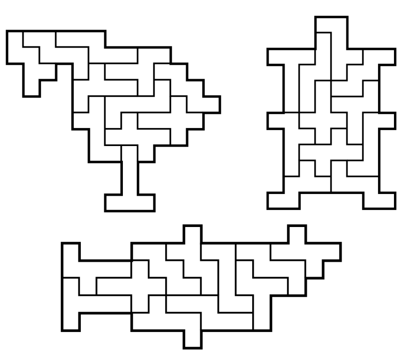
Ma to sens, gdyż każdy element $x \in A \cup B$ należy albo do A, albo do B. Łatwo sprawdzamy, że h jest bijekcją, i to kończy dowód, że $A \cup B$ i $C \cup D$ są równoliczne. Jan odczuwa teraz dyskomfort: *Za dużo tych warunków! Nie ma to nic wspólnego z ekonomią myśli!* Prowadzący wyjaśnia na przykładzie, że bez założenia warunku (W2) teza może nie zachodzić; rozważmy bowiem zbiory

$$A = B = C = \{1, 2\}, \qquad D = \{3, 4\}.$$

Wówczas zbiór $A \cup B = \{1, 2\}$ ma 2 elementy, a zbiór $C \cup D = \{1, 2, 3, 4\}$ ma 4 elementy, a więc $A \cup B$ i $C \cup D$ nie są równoliczne! Sytuacja jest o tyle prymitywna, że w tym przykładzie wszystkie zbiory A, B, C, D są skończone.

I wtedy Jan niepytany przez profesora zabiera głos: *Czy trzeba zakładać (W2) w przypadku, gdy nie wszystkie zbiory A, B, C, D są skończone?* Po krótkiej konsternacji pada odpowiedź i wyjaśnienie:

Wtedy nie trzeba zakładać (W2). *Załóżmy mianowicie, że $|A| \leqslant |B|$. Oznacza to z definicji, że istnieje funkcja różnowartościowa $k: A \to B$. Zatem B jest zbiorem nieskończonym. Można wykazać, że wówczas $|A \cup B| = |B|$. Z założenia* (W1) *wynika teraz łatwo, że $|C| \leqslant |D|$, czyli znowu $|C \cup D| = |D|$. Mamy więc tezę na podstawie* (W1).



Rozwiązania kubominowych zagadek ze strony 2

Student Jan powinien być zadowolony z wyjaśnień swojego ulubionego profesora, ale nie jest: *Rozumiem, że w przypadku* $|B| \leqslant |A|$ *postępujemy analogicznie, ale co zrobić w przypadku, gdy ani* $|A| \leqslant |B|$*, ani* $|B| \leqslant |A|$*?*

A teraz odpowiedź profesora rozpromienionego wobec dociekliwości Jana: *To się nie może zdarzyć! A przynajmniej nie, jeśli przyjmiemy pewnik wyboru, czyli zasadę mówiącą, że dla dowolnej rodziny niepustych zbiorów rozłącznych istnieje zbiór o jednoelementowym przecięciu z każdym zbiorem z tej rodziny. Ujmując rzecz mniej formalnie, ze zbiorów rozłącznych możemy wybrać po jednym elemencie. Opierając się na pewniku wyboru, można udowodnić, że dla dowolnych zbiorów* A, B *mamy* $|A| \leqslant |B|$ *lub* $|B| \leqslant |A|$*. Dowód implikacji*

$$|A| \leqslant |B| \Rightarrow |A \cup B| = |B| \quad \text{(gdy } B \text{ jest nieskończony)}$$

też zresztą wymaga zastosowania pewnika wyboru. Mając zresztą pewną wprawę w operowaniu tymi pojęciami, można pokazać, że z twierdzenia:

> Jeśli A, B, C, D spełniają warunki:
> (W1) $|A| = |C|$ oraz $|B| = |D|$,
> (W2)′ nie wszystkie zbiory A, B, C, D są skończone,
> to $|A \cup B| = |C \cup D|$,

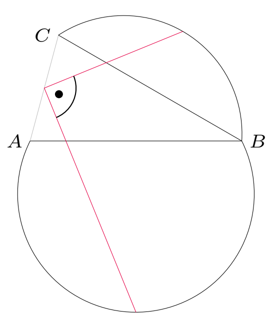
wynika pewnik wyboru! Z tego twierdzenia wynika więc pośrednio, że kulę można podzielić na kilka części, z których można złożyć dwie pełne kule o tym samym promieniu, czyli twierdzenie Banacha–Tarskiego.

Ciekawość to pierwszy stopień do cantorowskiego raju[‡] – uśmiech profesora zasiewa ziarenko wątpliwości w ekonomicznym umyśle Jana: *To mi się chyba nie przyda (?), ale to jest ciekawe. Muszę się tego nauczyć! Nauczę się tego!* Niedoszły ekonomista Jan zaczyna chodzić z głową w chmurach: *Ta wyjściowa kula chyba, niestety, nie jest ze złota...*

[‡]I znowu Hilbertowi przypisuje się powiedzenie, że nikt nie wypędzi matematyków z raju teorii mnogości, który stworzył dla nich Cantor.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK



M 1717. Okrąg został podzielony cięciwą AB na dwa kołowe odcinki i jeden z nich został obrócony o pewien kąt wokół punktu B. W tym obrocie obrazem punktu A jest punkt C. Udowodnić, że odcinki łączące środki łuków odcinków kołowych ze środkiem odcinka AC są prostopadłe.
Rozwiązanie na str. 21

M 1718. Dane są takie liczby rzeczywiste x, y i z, że liczby $x + yz$, $y + zx$ i $z + xy$ są wymierne oraz $x^2 + y^2 = 1$. Udowodnić, że liczba xyz^2 również jest wymierna.
Rozwiązanie na str. 12

M 1719. Wszystkie liczby naturalne zostały ustawione w pewnej kolejności. Czy zawsze mogę wskazać kilka kolejnych liczb (co najmniej dwie), których suma jest liczbą pierwszą?
Rozwiązanie na str. 20

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1053. W grudniu 2021 roku ludność Ziemi osiągnęła $N \approx 7{,}9 \cdot 10^9$ osób. Oszacuj, ile kilogramów powietrza przypada na jednego mieszkańca Ziemi. Promień Ziemi $R \approx 6400$ km, przyspieszenie ziemskie $g \approx 10$ m/s^2, a ciśnienie atmosferyczne $p \approx 10^5$ Pa.
Rozwiązanie na str. 12

F 1054. W sierpniu, z maksimum w dniach 12–13 sierpnia, na nocnym niebie można zaobserwować meteory z roju Perseidów. Pomiary radiolokacyjne pozwalają wyznaczyć prędkość przemieszczania się meteoru względem Ziemi i na tej podstawie określić prędkość jego ruchu względem Słońca. Jak na podstawie pomiaru prędkości v meteoru w znanej odległości r od Słońca wyznaczyć długą półoś a orbity? Masa Słońca M_S i stała grawitacyjna G są znane.
Rozwiązanie na str. 13