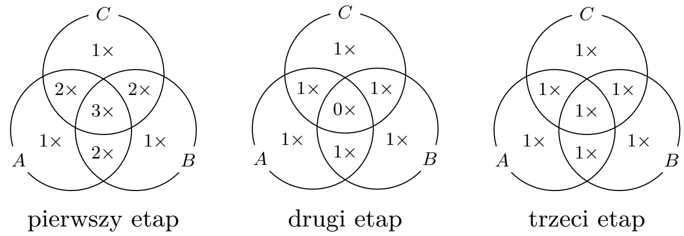
Reguła włączeń i wyłączeń

Bartłomiej BZDĘGA

KĄCIK POCZĄTKUJĄCEGO OLIMPIJCZYKA 43

Uogólnimy równość $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ na większą liczbę zbiorów – zacznijmy od obserwacji tego, co się dzieje dla trzech. Poniższe diagramy Venna pokazują kolejne etapy przybliżeń liczby $|A \cup B \cup C|$.



W sumie $|A| + |B| + |C|$ (pierwszy etap) elementy należące do dokładnie jednego ze zbiorów A, B, C są liczone jednokrotnie, należące do dokładnie dwóch – dwukrotnie, a do trzech – trzykrotnie. Wobec tego naturalnym kolejnym krokiem jest wzięcie $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A|$. Tutaj elementy należące do dokładnie jednego lub do dokładnie dwóch spośród zbiorów A, B, C liczone są raz, ale elementy części wspólnej $A \cap B \cap C$ nie są liczone wcale. Dopiero w trzecim etapie otrzymujemy

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|.$$

Widać tu pewną... *regułę*. Ogólniej, zachodzi równość

$$|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \ldots + (-1)^{n-1} S_n, \tag{4}$$

w której S_k jest sumą liczb elementów wszystkich części wspólnych dokładnie k spośród zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$, czyli $S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$.

Aby to uzasadnić, zdefiniujmy *komórkę* $C_{\{j_1,\ldots,j_m\}}$ jako zbiór elementów należących do $A_{j_1} \cap \ldots \cap A_{j_m}$, ale nienależących do żadnego A_j dla $j \neq j_1, \ldots, j_m$. Komórkom odpowiadają niepodzielne obszary na diagramie Venna. Każdy element komórki $C_{\{j_1,\ldots,j_m\}}$ jest w sumie S_k liczony tyle razy, ile jest zbiorów postaci $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$, zawierających tę komórkę. To zawieranie jest równoważne inkluzji $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq$ $\subseteq \{j_1, \ldots, j_m\}$. Ponieważ zbiór m-elementowy ma $\binom{m}{k}$ podzbiorów k-elementowych, nasza komórka w całej sumie (4) jest liczona

$$\binom{m}{1} - \binom{m}{2} + \binom{m}{3} - \ldots + (-1)^{m-1}\binom{m}{m} = 1 - (1-1)^m = 1$$

razy, gdyż $(1-1)^m = \binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \ldots + (-1)^m \binom{m}{m}$ na mocy rozwinięcia Newtona.

Jeszcze kilka uwag na koniec. Zdarza się tak, że liczba elementów każdego ze zbiorów $A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ zależy tylko od n i k, w szczególności nie zależy od $i_1, \ldots, i_k$. Możemy ją wtedy opisać funkcją $F(n,k)$ (zadania 2–5). Suma S_k ma $\binom{n}{k}$ składników, więc w tej sytuacji $S_k = \binom{n}{k} F(n,k)$. Wyrażenia (4) na ogół nie da się uprościć, więc zwykle poprzestajemy na odpowiedzi w postaci sumy, w której upraszczamy wszystkie składniki. Reguły włączeń i wyłączeń często nie stosuje się bezpośrednio do tego, co chcemy obliczyć, lecz do zliczania obiektów, które zadanych warunków nie spełniają (zadania 2–6). Na przykład w zadaniu drugim zamiast zliczać rozdania, w których każdy gracz ma co najmniej jednego pika, wygodniej zliczać te, w których co najmniej jeden gracz nie ma żadnego.

Zadania.

1. Ile potęg (liczb dających się przedstawić w postaci a^b dla naturalnych $a, b \geqslant 2$) znajduje się w zbiorze $\{1, 2, 3, \ldots, 10^6\}$?
2. Ile jest rozdań w brydżu, w których każdy z graczy ma co najmniej jednego pika?
3. (*Problem roztargnionej sekretarki*) Mamy n listów i n zaadresowanych kopert, każdemu listowi odpowiada dokładnie jedna koperta. Na ile sposobów można umieścić listy w kopertach tak, by każdy z nich był w niewłaściwej kopercie?
4. Ile jest suriekcji (funkcji „na") ze zbioru $\{1, 2, \ldots, m\}$ do zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ dla $n \leqslant m$?
5. Na ile sposobów można ustawić w szeregu n par małżeńskich w taki sposób, żeby żadne małżeństwo nie stało obok siebie?
6. (*Sito Eratostenesa*) Niech $n \geqslant 4$ będzie ustaloną liczbą naturalną. Załóżmy, że znamy wszystkie liczby pierwsze nieprzekraczające $\sqrt{n}$. Ile jest liczb pierwszych w zbiorze $\{1, 2, \ldots, n\}$?

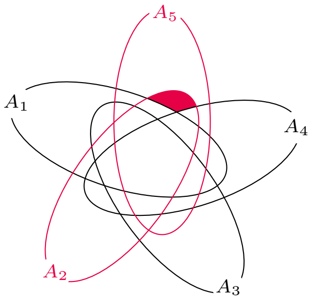


Diagram Venna–Grünbauma z zaznaczoną komórką $\mathbf{C_{\{2,5\}}}$

Notka historyczna. Używając jedynie okręgów, możemy narysować diagram Venna dla co najwyżej trzech zbiorów. John Venn wiedział, że można otrzymać diagram dla czterech zbiorów za pomocą elips, ale przypuszczał, że nie jest to możliwe dla pięciu zbiorów. Dopiero w 1975 roku, ponad pół wieku po śmierci Johna Venna, Branko Grünbaum rozstrzygnął tę kwestię, znajdując diagram podobny do tego na rysunku powyżej.

Wskazówki do zadań

1. Niech A_i będzie zbiorem i-tych potęg nieprzekraczających 10^6. Mamy $|A_i| = \lfloor \sqrt[i]{10^6} \rfloor - 1$, w szczególności $|A_i| = 0$ dla $i \geqslant 20$. Każda liczba $i > 1$ ma jakiś dzielnik pierwszy p, a równość $a^i = (a^{i/p})^p$ pozwala ograniczyć się do rozważania zbiorów A_p dla liczb pierwszych p. Dopomoże fakt, że jeśli $\mathtt{NWD}(i,j) = 1$, to $A_i \cap A_j = A_{ij}$.

2. Dla $i = 1, 2, 3, 4$ niech A_i oznacza liczbę rozdań, w których i-ty gracz nie ma żadnego pika – wtedy od liczby wszystkich rozdań $\frac{52!}{(13!)^4}$ trzeba odjąć $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$. Liczba $|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}|$ to liczba rozdań, w których gracze $i_1, \ldots, i_k$ są bez pików. Mamy tu $F(4,k) = \frac{39!(52-13k)!}{(39-13k)!(13!)^4}$ dla $k = 1, 2, 3$ oraz $F(4,4) = 0$.

3. Niech A_i będzie liczbą sposobów, w których i-ty list jest we właściwej kopercie. Chcemy wyznaczyć $n! - |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$. Należy zauważyć, że $F(n,k) = (n-k)!$.

4. Liczba wszystkich funkcji to n^m. Trzeba od niej odjąć $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$, przy czym A_i oznacza zbiór funkcji, które nie osiągają wartości i. Tutaj $F(n,k) = (n-k)^m$.

5. Przez A_i oznaczmy liczbę ustawień, w których i-te małżeństwo stoi razem. Mamy $F(n,k) = 2^k(2n-k)!$.

6. Oznaczmy przez A_d zbiór liczb nieprzekraczających n i podzielnych przez d. Niech $p_1, p_2, \ldots, p_t \leqslant \sqrt{n}$ są danymi liczbami pierwszymi. Zbiór $A_{p_1} \cup A_{p_2} \cup \ldots \cup A_{p_t}$ zawiera liczby od 2 do $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ oraz liczby złożone należące do zbioru $\{\lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1, \ldots, n-1, n\}$. Pozostaje jeszcze zauważyć, że $A_d = \lfloor n/d \rfloor$ oraz $A_d \cap A_e = A_{de}$, gdy $\mathtt{NWD}(d,e) = 1$.