Klub 44 M

Redaguje Marcin E. KUCZMA

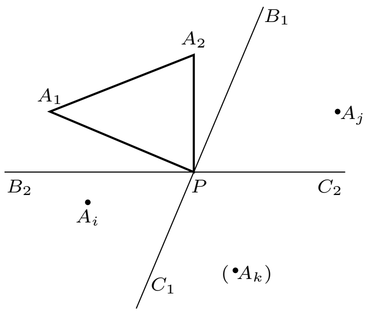
Rozwiązania zadań z numeru 3/2022

Przypominamy treść zadań:

837. Wewnątrz wypukłego n-kąta $A_1A_2\ldots A_n$ leży taki punkt P, że każdy z trójkątów PA_iA_j jest równoramienny ($1 \leqslant i < j \leqslant n$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P?

838. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb całkowitych x, y, z większych od 1, spełniających równanie

$$x^4 + y^4 = z^2 + 1.$$



837. Odpowiedź: tak. Przypuśćmy bowiem, że np. $PA_1 \neq PA_2$. Odcinek A_1A_2 jest wtedy jednym z bocznych ramion trójkąta równoramiennego PA_1A_2, wobec czego kąt A_1PA_2 jest ostry. Przez punkt P prowadzimy prostą B_1C_1, prostopadłą do PA_1, oraz prostą B_2C_2, prostopadłą do PA_2; punkty B_i, C_i wybieramy na tych prostych tak, by kąty A_2PB_1, A_1PB_2 były ostre, a kąty A_2PC_1, A_1PC_2 rozwarte (wówczas także kąty B_1PC_2, B_2PC_1 są ostre, a B_1PB_2, C_1PC_2 rozwarte).

Gdyby w obszarze kąta wypukłego C_1PC_2 (branego z brzegiem) leżał jakiś wierzchołek A_k, kąty A_1PA_k, A_2PA_k byłyby rozwarte (lub proste); równoramienne trójkąty A_1PA_k, A_2PA_k musiałyby mieć równe ramiona PA_1, PA_k, PA_2, wbrew przyjętemu założeniu. Tak więc w tym obszarze nie ma wierzchołków badanego wielokąta.

Skoro P jest punktem wewnętrznym tego wielokąta, a w sektorze C_1PC_2 nie ma wierzchołków, zatem wewnątrz kąta wypukłego B_2PC_1 musi leżeć jakiś wierzchołek A_i. Podobnie, wewnątrz kąta wypukłego B_1PC_2 musi leżeć jakiś wierzchołek A_j. W każdym z trójkątów równoramiennych A_2PA_i, A_iPA_j, A_jPA_1 kąt przy wierzchołku P jest nieostry, skąd wniosek, że odcinki PA_2, PA_i, PA_j, PA_1 są równymi ramionami tych trójkątów. To ostatecznie obala przypuszczenie, że $PA_1 \neq PA_2$, i uzasadnia odpowiedź „tak" na postawione w zadaniu pytanie.

838. Kluczem do podanej niżej konstrukcji jest trójka pitagorejska $(8, 15, 17)$. Określamy nieskończone rosnące ciągi liczb naturalnych (x_n), (y_n) wzorem rekurencyjnym:

$$(1) \qquad \begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{n+1} = 11x_n + 15y_n \\ y_{n+1} = 8x_n + 11y_n \end{cases} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Łatwo sprawdzić, że $8x_{n+1}^2 - 15y_{n+1}^2 = 8x_n^2 - 15y_n^2$; a skoro $8x_0^2 - 15y_0^2 = 17$, zatem

$$(2) \qquad 8x_n^2 - 15y_n^2 = 17 \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Stąd dalej wynika, że

$$(3) \qquad \frac{17x_n^2 - 8}{15} = \frac{17y_n^2 + 15}{8} \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

(wystarczy wymnożyć „na krzyż" te ułamki i skorzystać z równości (2)).
Z określenia (1) widać, że $y_{n+1}^2 \equiv y_n^2 \pmod 8$; stąd $y_n^2 \equiv 1 \pmod 8$ dla wszystkich $n \geqslant 0$, dzięki czemu

$$17y_n^2 + 15 \equiv 0 \pmod 8 \qquad \text{dla } n = 0, 1, 2, \ldots$$

To pokazuje, że wspólna wartość wyrażeń (3) jest (dla każdego n) liczbą całkowitą. Oznaczmy ją z_n. Wówczas

$$z_n^2 = \left(\frac{15}{17}\right)^2 z_n^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 z_n^2 = \left(\frac{15}{17}\right)^2 \left(\frac{17x_n^2 - 8}{15}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2 \left(\frac{17y_n^2 + 15}{8}\right)^2 =$$
$$= \left(x_n^2 - \frac{8}{17}\right)^2 + \left(y_n^2 + \frac{15}{17}\right)^2 = x_n^4 + y_n^4 - \frac{2(8x_n^2 - 15y_n^2)}{17} + 1,$$

co wobec równości (2) oznacza, że $z_n^2 = x_n^4 + y_n^4 - 1$. Każda trójka (x_n, y_n, z_n) jest więc rozwiązaniem badanego równania diofantycznego.

Uwaga. Tę serię rozwiązań wskazał Witold Bednarek, autor zadania. Istnieje wszelako bardzo wiele innych rozwiązań. Podobną serię można wygenerować na przykład przez rekurencję liniową $x_0 = 3$, $y_0 = 1$, $x_{n+1} = 19x_n + 40y_n$, $y_{n+1} = 9x_n + 19y_n$ (tu kluczem jest trójka pitagorejska $(9, 40, 41)$); początkowe wyrazy ciągu $(x_n^4 + y_n^4 - 1)$ to $9^2, 9644^2, \ldots$; i wszystkie dalsze też są kwadratami; aby się o tym upewnić, warto wyrazić liczby $z_n = \sqrt{x_n^4 + y_n^4 - 1}$ wzorami analogicznymi do (3). Zachęcamy do znalezienia jeszcze innych (podobnych) serii – np. takiej, w której znalazłoby się rozwiązanie $x = y = 13$; lub też – co ciekawsze – do rozpoznania ogólniejszego schematu, który kryje się za tymi przykładami.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 831 ($WT = 2{,}52$) i 832 ($WT = 2{,}24$) z numeru 12/2021

Witold Bednarek	Łódź	41,13
Kacper Morawski	Warszawa	40,83
Andrzej Kurach	Ryjewo	40,81
Krzysztof Maziarz	Kraków	40,67
Paweł Najman	Kraków	37,33
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Marek Spychała	Warszawa	34,25
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,34

Rozwiązanie zadania M 1715.
Niech K będzie punktem przecięcia odcinków AE i BF. Wtedy

$$\sphericalangle AKB = \sphericalangle AFB + \sphericalangle FAE = \sphericalangle ADB + \sphericalangle BDC = \sphericalangle ADC = \sphericalangle AEC.$$

Oznacza to, że $BF \parallel CE$.

Rozwiązanie zadania M 1716.
Ponieważ

$$\frac{a+1}{b+1} - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b(b+1)},$$

po przeniesieniu prawej strony na lewą stronę dostajemy do pokazania następującą nierówność:

$$\frac{y-x}{y(y+1)} + \frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant 0.$$

Możemy założyć, że x jest największą z trzech podanych liczb. Możliwe są dwa przypadki.
1) $y \geqslant z$. Wtedy

$$\frac{x-y}{x(x+1)} \leqslant \frac{x-y}{y(y+1)}, \quad \frac{y-z}{x(x+1)} \leqslant \frac{y-z}{z(z+1)}.$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy

$$\frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant -\frac{y-x}{y(y+1)} - \frac{z-y}{z(z+1)}.$$

2) $y < z$. Wtedy

$$\frac{z-y}{z(z+1)} \leqslant \frac{z-y}{y(y+1)}, \quad \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant \frac{x-z}{y(y+1)}.$$

Dodając te nierówności, otrzymujemy

$$\frac{z-y}{z(z+1)} + \frac{x-z}{x(x+1)} \leqslant -\frac{y-x}{y(y+1)}.$$