Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2022

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 829 ($WT = 3{,}29$) i 830 ($WT = 1{,}43$) z numeru 11/2021

Witold Bednarek	Łódź	39,87
Krzysztof Maziarz	Kraków	38,88
Kacper Morawski	Warszawa	38,59
Andrzej Kurach	Ryjewo	38,29
Paweł Najman	Kraków	37,33
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Marcin Kasperski	Warszawa	35,34
Marek Spychała	Warszawa	31,73
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,34

Zadania z matematyki nr 843, 844

Redaguje Marcin E. KUCZMA

843. Po krawędziach wypukłego wielościanu pełza żuk. W każdym wierzchołku wielościanu schodzą się trzy krawędzie. Po dojściu do wierzchołka żuk nie zawraca w krawędź, którą przyszedł, lecz wybiera jedną z pozostałych dwóch krawędzi – lewą lub prawą (orientacja: lewo/prawo – tak, jak widać, patrząc z zewnątrz wielościanu). Gdy na jednym rozdrożu żuk wybrał wariant lewy, na następnym wybiera prawy – i na odwrót. Dowieść, że w pewnym momencie żuk wróci do punktu, z którego rozpoczął wędrówkę.

844. Wyjaśnić, czy istnieje liczba pierwsza p, dla której suma
$$1^p + 3^p + \ldots + (2p-1)^p$$
jest sześcianem liczby naturalnej.

Zadanie 844 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2022

Przypominamy treść zadań:

835. Dana jest liczba naturalna n podzielna przez 3 oraz ciąg $(x_1,\ldots,x_n)$ o wyrazach 1, 2 lub 3, przy czym jedynek, dwójek i trójek jest tyle samo (po $n/3$). Dowieść, że dla pewnych numerów k, l $(1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n)$ zachodzi równość $x_k + \ldots + x_l = n$.

836. (**a**) Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych x, dla których oba wyrażenia $x^{1/2} + x^{-1/2}$ oraz $x^{1/3} + x^{-1/3}$ mają wartości całkowite.

(**b**) Ustalić, ile jest liczb $x \geqslant 1$ o powyższej własności takich, że $\lfloor x \rfloor$ ma w zapisie dziesiętnym nie więcej niż 2022 cyfry.

835. Niech $s_k = x_1 + \ldots + x_k$ dla $k = 1,\ldots,n$ (więc $s_n = 2n$) i niech $S = (s_1,\ldots,s_n)$. Sąsiadujące elementy ciągu S różnią się co najwyżej o 3.

Przypuśćmy, że teza zadania nie zachodzi. Wtedy $s_k \neq s_l + n$ dla $k, l = 1,\ldots,n$. Ma więc miejsce równoważność:

(1) $\qquad t \in S \iff t + n \notin S \quad$ dla $t \in \{1,\ldots,n\}$.

Skoro $2n \in S$, zatem $n \notin S$.

Rozpatrzmy najpierw przypadek, gdy $n-1 \in S$. Niech $n - 1 = s_m$. Przyjmijmy, że w ciągu $M = (x_1,\ldots,x_m)$ jest a jedynek, b dwójek, c trójek. Tak więc

(2) $\qquad a + 2b + 3c = n - 1.$

Niech x_j będzie jedną (dowolną) z tych a jedynek. Liczby $\alpha = s_{j-1}$, $\beta = s_j$ różnią się o 1 (gdy $j = 1$, przyjmujemy $\alpha = 0$). Liczby $\alpha + n$, $\beta + n$ nie należą do S (własność (1)). Wśród trzech kolejnych liczb musi być element S, wobec czego liczby $\gamma = \alpha + n - 1$, $\delta = \beta + n + 1$ należą do S; różnią się o 3, więc wyznaczają pewien element $x_r = 3$ (ten, dla którego $s_r = \delta$). W ten sposób każdej jedynce z ciągu M została przyporządkowana pewna trójka z ciągu $N = (x_{m+1},\ldots,x_n)$.

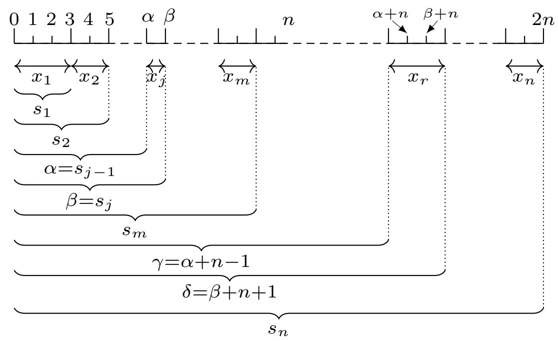
Na odwrót, biorąc dowolny element $x_r = 3$ z ciągu N, widzimy, że liczby $\delta = s_r$ oraz $\gamma = \delta - 3$ należą do S, liczby $\gamma + 1$, $\delta - 1$ nie należą, więc $\alpha = \gamma + 1 - n$, $\beta = \delta - 1 - n$ należą (własność (1)) i wyznaczają pewien element $x_j = 1$ (ten, dla którego $s_j = \beta$) – każdej trójce z ciągu N została przyporządkowana pewna jedynka z ciągu M. Te przyporządkowania są wzajemnie odwrotne i ustalają bijekcję między jedynkami w M i trójkami w N. Mamy więc a trójek w ciągu N oraz c trójek w ciągu M. Stąd

(3) $\qquad a + c = n/3$

(bo tyle jest wszystkich trójek w $(x_1,\ldots,x_n)$).

Pozostaje przypadek, gdy $n - 1 \notin S$. Wtedy $n + 1 \in S$ (bo $n \notin S$). Niech $n + 1 = s_m$. Odwracamy kierunek; oznaczamy przez a, b, c liczby jedynek, dwójek, trójek w ciągu $(x_{m+1},\ldots,x_n) = N$, którego elementy teraz sumują się do wartości $s_n - s_m = n - 1$; wzór (2) nadal w mocy. Rozumowanie analogiczne jak poprzednio ustala bijekcję między jedynkami w N i trójkami w M i ponownie implikuje równość (3).

Uzyskane w obu przypadkach zależności (2) i (3) dają oczekiwaną sprzeczność:
$$6(b+c) = 3(a+2b+3c) - 3(a+c) = 3(n-1) - 3(n/3) = 2n - 3$$
(liczba parzysta równa nieparzystej); koniec dowodu.



836. Niech $c = x^{1/6} + x^{-1/6}$. Wówczas

(4) $\qquad x^{1/2} + x^{-1/2} = c^3 - 3c, \qquad x^{1/3} + x^{-1/3} = c^2 - 2.$

Jasne, że jeśli c jest liczbą naturalną większą od 1, to te wartości są liczbami naturalnymi. Ale i na odwrót: jeżeli liczby $c^3 - 3c$ oraz $c^2 - 2$ (więc także c^2 oraz $c^2 - 3$) są naturalne, to $c = (c^3 - 3c)/(c^2 - 3)$ jest dodatnią liczbą wymierną o kwadracie całkowitym – jest więc liczbą naturalną. Rozważany warunek, by wartości wyrażeń (4) były całkowite dodatnie, sprowadza się do tego, by liczba $c = x^{1/6} + x^{-1/6}$ była całkowita.

Funkcja $f(x) = x^{1/6} + x^{-1/6}$ przyjmuje (dla $x > 0$) wszystkie wartości z przedziału $[2, \infty)$. Punkty, w których przyjmuje wartości całkowite $c \geqslant 2$, tworzą zbiór nieskończony; to teza (**a**) zadania.

W części (**b**) chodzi o ustalenie, w ilu punktach przedziału $[1, 10^{2022})$ ma ona wartości całkowite. Ponieważ jest w tym przedziale ciągła i ściśle rosnąca, jest to po prostu pytanie o to, ile jest liczb całkowitych w przedziale $J = [f(1), f(10^{2022}))$. Skoro $f(1) = 2$, zaś $f(10^{2022}) = 10^{337} + 10^{-337} < 10^{337} + 1$, zatem do przedziału J należą liczby całkowite $2, 3, \ldots, 10^{337}$, i tylko one. Jest więc $10^{337} - 1$ tych liczb, i taka jest odpowiedź na pytanie (**b**).