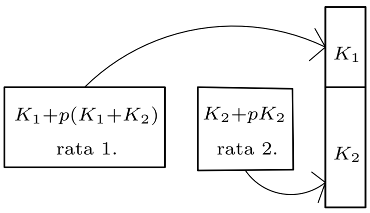
Jak obliczyć ratę kredytu?

Jakub PAWLIKOWSKI, Tomasz TRACZ

Większość ludzi bierze przynajmniej raz w życiu jakiś kredyt – na mieszkanie czy na samochód. Spotykamy się wtedy z pojęciami takimi jak oprocentowanie oraz z różnymi metodami naliczania rat, zaczyna nas interesować polityka Narodowego Banku Polskiego w kontekście ustalania stóp procentowych... Ostatecznie kończymy z obowiązkiem płacenia co miesiąc pewnej kwoty bankowi. Nie zawsze jednak wiemy, skąd bierze się jej wysokość?

Niniejszy artykuł ma na celu pokazanie, jak obliczyć ratę kredytu gotówkowego. Trudno znaleźć tę wiedzę w powszechnie dostępnych źródłach, a nawet w podręcznikach bywa to temat przedstawiany niedokładnie czy wręcz pomijany. Jest to zaskakujące, gdyż do zrozumienia mechanizmów kredytowych wystarczy znajomość matematyki na poziomie liceum.



Załóżmy najpierw, dla uproszczenia, że bierzemy kredyt na kwotę K z oprocentowaniem p w skali rocznej, spłacany w ciągu dwóch lat w (dwóch) ratach rocznych. Oznacza to, że każda rata zawiera część kapitału (odpowiednio K_1 i K_2, gdzie $K_1 + K_2 = K$) oraz część odsetkową, czyli p-tą część niespłaconego jeszcze kapitału – całej kwoty w pierwszej racie, a kwoty K_2 w drugiej. Zauważmy, że od podziału K na K_1 i K_2 zależy nie tylko wysokość rat, ale także suma odsetek, czyli związany z nimi koszt wzięcia kredytu.

Omówimy teraz dwa najbardziej znane typy podziału kapitału.

Kredyt z dwiema ratami malejącymi
W tym typie kredytu w każdym okresie rozliczeniowym spłacamy taką samą część kapitału – w naszym uproszczonym przypadku będzie to po prostu $K_1 = K_2 = \frac{1}{2}K$. Raty w kolejnych okresach rozliczeniowych wynoszą zatem:

$$R_1 = \frac{1}{2}K + p \cdot K, \qquad R_2 = \frac{1}{2}K + p \cdot \frac{1}{2}K.$$

Charakterystyczny dla tego sposobu spłaty jest fakt, że początkowa rata jest wyższa od drugiej.

Kredyt z dwiema ratami równymi
W tym sposobie spłaty kredytu założeniem jest równość wszystkich rat. Z wcześniejszego przykładu wynika zatem, że należy podzielić kapitał na części K_1 i K_2 w sposób nierówny! Zastanówmy się teraz, jak wyznaczyć wysokość każdej z równych rat i właściwy sposób podziału kapitału.

Oznaczmy szukaną wielkość raty przez R. Wówczas równanie na drugą ratę ma postać $R = (1+p)K_2$, więc $K_2 = \frac{R}{1+p}$. Wstawmy to do równania na pierwszą ratę:

$$R = K_1 + p(K_1 + K_2) = (1+p)K_1 + pK_2 = (1+p)K_1 + \frac{p}{1+p} \cdot R,$$

skąd możemy wyznaczyć K_1 w następujący sposób:

$$(1+p)K_1 = \left(1 - \frac{p}{1+p}\right) R,$$

czyli $K_1 = \frac{R}{(1+p)^2}$. Skoro $K_2 + K_1 = K$, to otrzymujemy równanie:

$$\frac{R}{1+p} + \frac{R}{(1+p)^2} = K,$$

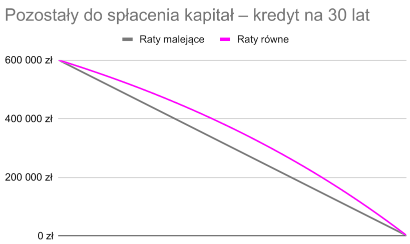
skąd wyliczamy

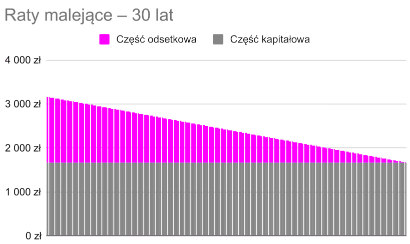
$$R = \frac{K}{\frac{1}{1+p} + \frac{1}{(1+p)^2}}.$$

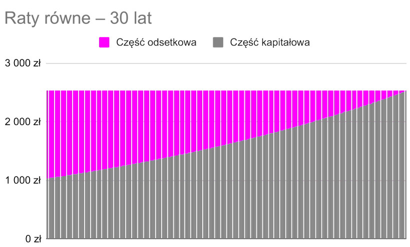
Zauważmy, że w pierwszej racie spłacamy mniejszą część kapitału niż w przypadku rat malejących. Istotnie, mamy bowiem

$$K_1 = \frac{R}{(1+p)^2} = \frac{K}{(1+p)+1} = \frac{K}{2+p} < \frac{K}{2}.$$

W związku z tym w drugiej racie musimy zapłacić odsetki od większej kwoty, czyli łączna kwota odsetek jest w przypadku równych rat *większa* niż w przypadku rat malejących. Odnotujmy też fakt, że kolejne raty składają się w coraz większej części z kapitału, a w coraz mniejszej z odsetek.







Uogólnijmy teraz przedstawione sposoby obliczania wysokości rat na przypadek większej liczby rat. Rozważmy mianowicie przypadek kredytu na kwotę K z oprocentowaniem p, spłacanego w ciągu N lat w ratach rocznych (przypadek rat miesięcznych uwzględnimy na końcu).

Kredyt z ratami malejącymi

W przypadku rat malejących w każdym roku spłacamy $\frac{1}{N}K$ kapitału oraz odpowiednie odsetki, to znaczy:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{1}{N}K + p\cdot K, \\ R_2 &= \frac{1}{N}K + p\cdot\frac{N-1}{N}K, \\ &\vdots \\ R_N &= \frac{1}{N}K + p\cdot\frac{1}{N}K. \end{aligned}$$

Kredyt z ratami równymi

Oznaczmy przez $K_1, K_2, \ldots, K_N$ części kapitału spłacane w kolejnych ratach równych w wysokości R. Udowodnimy indukcyjnie, że

$$K_{N-i} = \frac{R}{(1+p)^{i+1}} \quad \text{dla} \quad i = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Dla $i=0$ mamy, jak w uproszczonym przypadku powyżej: $R = K_N + pK_N$, stąd rzeczywiście

$$K_N = \frac{R}{1+p}.$$

Ustalmy teraz $i \in \{1, \ldots, N-1\}$. Załóżmy, że wzór powyższy działa w przypadku obliczenia wartości $K_N, K_{N-1}, \ldots, K_{N-i+1}$. Wyprowadzimy teraz wzór na K_{N-i}.

Spójrzmy na ratę w $(N-i)$-tej spłacie. Prawdziwa jest równość:

$$R = K_{N-i} + p(K_{N-i} + K_{N-i+1} + \ldots + K_{N-1} + K_N).$$

Na mocy założenia indukcyjnego możemy zapisać:

$$\begin{aligned} R &= (1+p)K_{N-i} + p\left(\frac{R}{(1+p)^i} + \ldots + \frac{R}{(1+p)^2} + \frac{R}{1+p}\right) = \\ &= (1+p)K_{N-i} + p\cdot\frac{R}{1+p}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1+p}\right)^i}{1-\frac{1}{1+p}} = \\ &= (1+p)K_{N-i} + R\left(1-\left(\frac{1}{1+p}\right)^i\right). \end{aligned}$$

Zatem po przeniesieniu na jedną stronę mamy

$$(1+p)K_{N-i} = \frac{R}{(1+p)^i},$$

czyli rzeczywiście

$$K_{N-i} = \frac{R}{(1+p)^{i+1}}.$$

Jak wyżej, zapiszmy teraz równość

$$K_N + K_{N-1} + \ldots + K_1 = K$$

za pomocą obliczonych wartości:

$$\frac{R}{1+p} + \frac{R}{(1+p)^2} + \ldots + \frac{R}{(1+p)^N} = K.$$

Używając wzoru na sumę początkowych wyrazów ciągu geometrycznego, otrzymujemy

$$\frac{R}{1+p}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{1+p}\right)^N}{1-\frac{1}{1+p}} = K,$$

z czego wyliczamy wartość R:

$$R = \frac{pK}{1-\left(\frac{1}{1+p}\right)^N}.$$

Dodajmy jeszcze, że dla kredytu na kwotę K o oprocentowaniu rocznym p spłacanym przez N lat w przypadku k rat w trakcie roku mamy sumarycznie Nk rat, w których uwzględniamy oprocentowanie $\frac{p}{k}$, w związku z tym wysokość raty wynosi:

$$R = \frac{pK}{k\left(1-\left(\frac{k}{k+p}\right)^{Nk}\right)}.$$

Na zakończenie pokażemy na przykładzie kredytu na 600 000 zł, jak kształtują się wysokości poszczególnych rat oraz ich podział na część kapitałową i odsetkową. Zakładamy oprocentowanie 3% w skali roku – tak było w czasie pisania niniejszego artykułu, w grudniu 2021. Kredyt spłacany jest w ratach miesięcznych.

Suma spłaconego kapitału		600 000 zł
Oprocentowanie w skali roku		3%
Liczba lat spłaty	15	30
Liczba miesięcy spłaty	180	360
Raty malejące		
Suma zapłaconych odsetek	135 750 zł	270 750 zł
Suma kosztu spłacenia kredytu	735 750 zł	870 750 zł
Rata początkowa	4 833 zł	3 167 zł
Rata końcowa	3 342 zł	1 671 zł
Raty równe		
Suma zapłaconych odsetek	145 828 zł	310 665 zł
Suma kosztu spłacenia kredytu	745 828 zł	910 665 zł
Rata	4 143 zł	2 530 zł
Niższa od początkowej raty malejącej o	690 zł	637 zł
Dodatkowy koszt odsetek względem rat malejących	10 078 zł	39 915 zł

Warto zauważyć, że początkowa rata kredytu przy ratach malejących jest istotnie wyższa od raty stałej. Niestety łączna kwota odsetek przy ratach równych jest dużo większa – tym większa, im dłużej spłacany jest kredyt. Należy jednak pamiętać, że w całkowity koszt kredytu poza odsetkami mogą wchodzić też inne opłaty (np. prowizja czy ubezpieczenie), których tutaj nie analizowaliśmy.