Pitagoras w Amsterdamie

*Krzysztof R. APT**

* CWI, Amsterdam i Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Mieszkam w Amsterdamie. Z okna mojego korytarza widać interesujący budynek (zdjęcie po lewej). To budynek zwany „Pontsteiger” (po polsku: „Molo”), na zdjęciu po prawej stronie, z Wikipedii, widoczny w pełnej glorii.

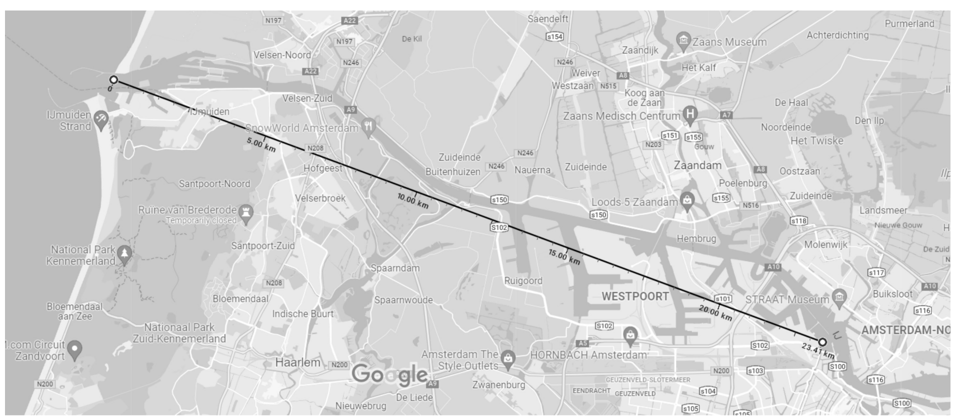

Dwa zdjęcia budynku Pontsteiger. Zdjęcie po prawej: Ceescamel, licencja Creative Commons, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=82330152.

Według opisu zamieszczonego w holenderskiej Wikipedii Pontsteiger ma 92 metry wysokości i 26 pięter[1]. Ponoć w pogodny dzień z niektórych mieszkań widać morze. Ustalmy, czy to prawda, bez odwiedzania tego budynku.

[1] https://nl.wikipedia.org/wiki/Pontsteigergebouw

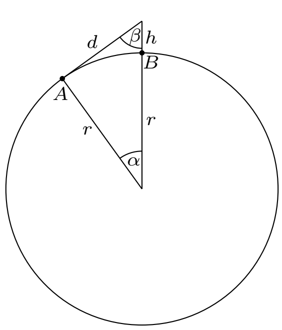
Sprawę nieco komplikuje obecność wydm, które w Holandii zasłaniają widok na wybrzeże Morza Północnego. Dlatego musimy wybrać odpowiedni punkt na wybrzeżu. Pontsteiger leży na brzegu Kanału Morza Północnego, poprowadzonego do Morza Północnego niemal wzdłuż najkrótszej linii.

Mapa przedstawiona na rysunku poniżej pokazuje, że linia łącząca Pontsteigera i koniec Kanału Morza Północnego omija wszelkie wydmy. Ma ona około 23,41 km długości.



Aby odtworzyć rysunek po prawej stronie, wpisz „Pontsteiger” w https://www.google.com/maps, następnie umieść myszkę na miejscu Pontsteigera, kliknij prawym przyciskiem myszki, wybierz „zmierz odległość”, wybierz punkt odpowiadający miejscu, w którym Kanał Morza Północnego wpływa do morza, kliknij lewym przyciskiem myszki, a następnie pociągnij linię, która się pojawi, aby sprawdzić, czy można wybrać bliższy punkt. Ta linia przechodzi przez teren przemysłowy Westpoort w Amsterdamie i przez miasteczko IJmuiden. Korzystając z map Google, można sprawdzić, że odpowiednie obszary mają tylko niską zabudowę.

Następnym krokiem jest przypomnienie sobie promienia Ziemi, który wynosi 6371 km. Te informacje wystarczają, aby znaleźć odpowiedź. W tym celu rozważmy rysunek 1.



Rys. 1. Okrąg i trójkąt prostokątny

Oznaczamy na nim przez r promień okręgu, przez h odległość jakiegoś punktu (np. któregoś z pięter Pontsteigera) od powierzchni Ziemi, a przez d długość stycznej z tego punktu do okręgu. Z twierdzenia Pitagorasa mamy

$$r^2 + d^2 = (r+h)^2,$$

czyli

$$h^2 + 2rh - d^2 = 0. \qquad (*)$$

To daje

$$h = -r \pm \sqrt{d^2 + r^2}.$$

Ponieważ $d \neq 0$, jedynym dodatnim rozwiązaniem równania $(*)$ jest $h = -r + \sqrt{d^2 + r^2}$.

Biorąc pod uwagę relatywnie małe odległości (w stosunku do promienia Ziemi), zamiast d możemy użyć AB. Rzeczywiście $d = \mathrm{tg}(\frac{AB}{r})r \approx 23{,}4101$ km, a więc $d \approx AB$.

Aby obliczyć h, musimy teraz obliczyć d. Ponieważ znamy r i (długość łuku) AB, mianowicie: 23,41 km, jest to bardzo proste. Rzeczywiście $\alpha = \frac{AB}{2\pi r} \cdot 2\pi = \frac{AB}{r}$, a więc $d = \mathrm{tg}\big(\frac{AB}{r}\big)r$. Zatem

$$h = r\left(-1 + \sqrt{\mathrm{tg}^2\left(\frac{AB}{r}\right) + 1}\right).$$

Dla $r = 6371$ km i $AB = 23{,}41$ km otrzymujemy $h \approx 0{,}0430098$ km, czyli około 43 metry. Ponieważ $43/(92/26) \approx 12{,}15$, wnioskujemy, że morze widać już z trzynastego piętra Pontsteigera.

Proste obliczenia zostały wykonane przy użyciu Wolfram Alpha, `https://www.wolframalpha.com/`.

W tym rozumowaniu przyjęliśmy dwa niewinne założenia. Po pierwsze, że budynek leży na poziomie morza. Jest to uzasadnione, gdyż stoi on prawie na poziomie Kanału Morza Północnego. Poza tym założyliśmy również, że Ziemia jest idealną sferą.

Interesującym aspektem równania $(*)$ jest, że możemy je również użyć do ustalenia r, promienia Ziemi. Mianowicie: załóżmy teraz, że znamy wysokość h i długość stycznej d. Z $(*)$ otrzymujemy

$$r = \frac{d^2 - h^2}{2h}.$$

Ten genialnie prosty sposób obliczenia promienia Ziemi został zaproponowany przez arabskiego uczonego Al-Biruni około tysiąca lat temu. Dokładniej, zamiast obliczyć d, Al-Biruni obliczył, używając astrolabium, kąt β pomiędzy styczną d do horyzontu i pionową linią poprowadzoną ze szczytu góry. Ponadto aby obliczyć wysokość h wzgórza, porównał on kąty jego elewacji z dwóch miejsc i obliczył odległość między tymi punktami. Ponieważ

$$\sin(\beta) = \frac{r}{r+h},$$

dostajemy wtedy

$$r = \frac{h\sin(\beta)}{1 - \sin(\beta)}.$$

W ten sposób Al-Biruni obliczył promień Ziemi z błędem zaledwie 2%.

Sparavigna, Amelia (2013). *The Science of Al-Biruni*. International Journal of Sciences. 2 (12): 52–60. arXiv:1312.7288. doi:10.18483/ijSci.364.

Możemy odtworzyć jego osiągnięcie, prosząc administratora Pontsteigera, aby powiedział nam, z którego piętra mieszkańcy budynku mogą już widzieć morze. Ustaliliśmy wcześniej, że są to mieszkańcy trzynastego piętra. Trzynaste piętro zaczyna się na wysokości $h = 12 \cdot 92/26$ metrów, a więc około 42,46 metra. Wstawiając w ostatnim równaniu $h = 0{,}04246$ km i $d = 23{,}41$ km, otrzymujemy $r \approx 6453{,}44$ km, wartość, która różni się od prawidłowej odpowiedzi raptem o 1%.

Trzecie zastosowanie równania $(*)$ polega na obliczeniu d, gdy znamy h i r. Zilustrujemy je, ustalając, jak daleko widać ze szczytu Pontsteigera do horyzontu w kierunku morza. Z $(*)$ otrzymujemy

$$d = \sqrt{2rh + h^2}.$$

Dla $r = 6371$ km i $h = 0{,}092$ km otrzymujemy $d \approx 34{,}2385$ km.

Abstract nonsense, czyli teoria kategorii

*Robert SZAFARCZYK**

*Student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wyrażenie *abstract nonsense* jest używane do opisu dowodów twierdzeń spoza teorii kategorii, ale wykorzystujących wyłącznie jej metody.

Teoria kategorii, która jest tematem tego artykułu, ma dość nietypowe w matematyce zastosowanie. Właściwie można powiedzieć, że nie jest to wcale teoria; nie jest to odrębny obszar badań, w którym można się wyspecjalizować, zapominając o reszcie matematyki. Teoria kategorii jest pewnego rodzaju językiem, uniwersalną „mową” matematyczną, która pozwala (mniej lub bardziej) połączyć te wszystkie porozrzucane dziedziny matematyczne w jakąś całość.

Zacznijmy od tego, czym jest ta kategoria.

Definicja 1 (Kategoria)**.** *Kategoria składa się z obiektów i morfizmów. Morfizmy wyobrażamy sobie jako strzałki idące od obiektu do obiektu, czyli morfizm f z obiektu A do obiektu B narysujemy tak:*

$$A \xrightarrow{f} B.$$

Oczywiście każda strzałka ma dokładnie jeden początek i dokładnie jeden koniec.