

ISSN 1663-1034 | ISRN 1663-1034  
PISN 1663-1034

NR 5 (576) 2022

CENA 6 ZŁ VAT 8%

MIESIĘCZNIK

www.deltami.edu.pl

MATEMATYKA – FIZYKA – ASTRONOMIA – INFORMATYKA

Dlaczego  
ogórek świeci?  
str. 9

UNIWERSYTET  
WARSZAWSKI



Nakład: 3500 egz.



## SPIS TREŚCI NUMERU 5 (576)

Jak skoczyć z murów Jasnej Góry  
i przeżyć? Mieczysław Wolfke i jego  
nauka praktyczna

*Krzysztof Petelczyc*



Zadania

Jak liczyć głosy?

*Grzegorz Pierczyński*

Ijon Tichy na orbicie wokółksiężycowej

*Paweł Turkowski*

Dlaczego ogórek świeci?

*Marcin Braun*

Losujemy liczbę Eulera

*Karol Gryszka*

De Rerum Metallica

*Francesco Pistis*

Co słysząc u ubogich krewnych?

*Mariusz Skatba*

Laserowa reologia plamkowa

*Kwasi Nyandey*



Pewna żaba i noblista

*Magdalena Fikus*

Problemy z równaniami hydrodynamiki

*Grzegorz Łukaszewicz,*

*Krzysztof A. Mizerski*

Klub 44

Lewactwo... w kosmosie!?

Niebo w maju

Aktualności

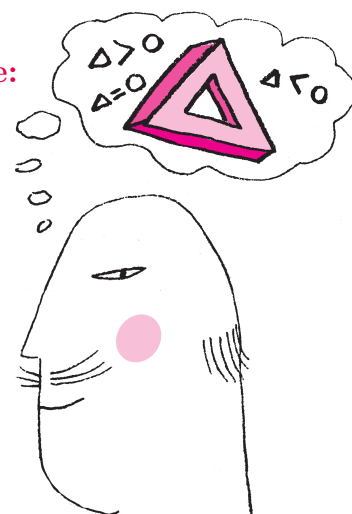
Powrót pierwiastka zero



Współliniowość i kąty

*Bartłomiej Bzdęga*

W następnym numerze:  
Po co nam delta?



Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

str. 1  
str. 3 **Komitet Redakcyjny:** dr Waldemar Berej,  
doc. dr Piotr Chrzastowski-Wachtel,  
dr Krzysztof Ciesielski, prof. UJ – przewodniczący,  
str. 4 prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski,  
dr Tomasz Greczyło, dr Adam Gregosiewicz,  
str. 6 dr Andrzej Grzesik, prof. dr hab. Agnieszka Janiuk,  
dr hab. Artur Jeż, dr hab. Bartosz Klin,  
prof. dr hab. Andrzej Majhofer – wiceprzewodniczący,  
dr Adam Michalec, prof. dr hab. Damian Niwiński,  
str. 9 prof. dr hab. Krzysztof Oleszkiewicz,  
dr hab. Krzysztof Pawłowski, prof. PAN, dr Milena Ratajczak,  
dr hab. Radosław Smolec, prof. PAN,  
str. 10 prof. dr hab. Paweł Strzelecki, prof. dr hab. Andrzej Wysmolek.

str. 11 **Redaguje kolegium w składzie:** Wiktor Bartol,  
Michał Bejger, Szymon Charzyński – red. nac.,  
Agnieszka Chudek, Wojciech Czerwiński,  
Anna Durkalec, Katarzyna Małek, Michał Miśkiewicz,  
Łukasz Rajkowski – z-ca red. nac., Anna Rudnik,  
str. 13 Krzysztof Rudnik, Oskar Skibski, Marzanna Wawro – sekr. red.

str. 14 **Adres do korespondencji:**  
Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa  
**e-mail:** [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

str. 16 Okładki i ilustracje:  
Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia.  
Skład systemem T<sub>E</sub>X wykonała Redakcja.  
Druk: Poligrafia NOT [poligrafianot.pl](http://poligrafianot.pl)

str. 17 **Prenumerata:**  
Garmond Press: [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)  
Kolporter: [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl) (tylko instytucje)  
str. 20 RUCH S.A.: [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

str. 22 **Numery archiwalne** (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji  
str. 22 osobiście lub zamówić przez e-mail.

str. 24 Cena 1 egzemplarza: z ostatnich 12 miesięcy 6 zł; wcześniejsze  
egzemplarze 3 zł

str. 25  **Strona internetowa** (w tym  
artykuły archiwalne, linki itd.):  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)  
Można nas też znaleźć na  
[facebook.com/Delta.czasopismo](https://facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

# Jak skoczyć z murów Jasnej Góry i przeżyć? Mieczysław Wolfke i jego nauka praktyczna

\* Wydział Fizyki Politechniki  
Warszawskiej,  
Polskie Towarzystwo Fizyczne

Zarząd Główny Polskiego Towarzystwa  
Fizycznego w uzgodnieniu  
i współdziałaniu z Politechniką  
Warszawską, Komitetem Fizyki PAN oraz  
Polskim Stowarzyszeniem Fotonicznym  
ustanowił rok 2022 Rokiem Mieczysława  
Wolfkego. Informacje o obchodach  
i związanych z nimi wydarzeniach można  
znaleźć na stronie  
wolfke.fizyka.pw.edu.pl.



## Rozwiązanie zadania M 1708.

Warunek z zadania przekształcamy do postaci  $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$ .  
Zauważmy, że  
 $a^4 + b^4 + (a + b)^4 = 2(a^2 + ab + b^2)^2$ , co  
oczywiście daje tezę na mocy założenia.



## Rozwiązanie zadania M 1710.

Niech waga łuku będzie sumą liczb na nim umieszczonych (łuk bez liczb ma wagę 0). Rozważmy podział, dla którego suma kwadratów wag jest najmniejsza. Udowodnimy, że jest to wymagany podział okręgu. Niech  $A$  i  $B$  będą sąsiednimi łukami o wagach  $a$  i  $b$ , przy czym  $a < b$ . Przesuńmy granicę między łukami tak, że dokładnie jedna liczba  $r$  z  $B$  została przeniesiona do  $A$ . Na podstawie wyboru podziału

$$a^2 + b^2 \leq (a+r)^2 + (b-r)^2 \\ = a^2 + b^2 + 2r(r - (b-a)),$$

czyli  $b - a \leq r \leq 1$ .

*Uwaga:* Dowód pozostaje w mocy przy podziale okręgu na dowolną, zadaną z góry liczbę łuków.

## Krzysztof PETELCZYC\*

Był prawdopodobnie majowy wieczór około 1895 roku, gdy uczeń Gimnazjum Męskiego w Częstochowie wraz z koleżanką spacerował wokół jasnogórskiego klasztoru.

- Wiesz, że te gwiazdy to tak naprawdę olbrzymie kule ognia zawieszono w przestrzeni kosmicznej pustki niewyobrażalnie daleko stąd?
- Niesamowite. A wydają się tak blisko... prawie jakbym mogła ich dotknąć.
- Myślę, że ludzie kiedyś dotkną Księżyca. Staną na nim i założą tam księżycowe bazy. Tak jak przewidział to Juliusz Verne w tej powieści drukowanej w gazetach. Kilka lat temu obliczyłem nawet, że to możliwe... W przyszłości chcę zbudować planetostat do podróży w kosmosie.
- Przecież mówisz, że to wszystko to kule ognia, to jak chcesz na nich stawać?
- Kule ognia to gwiazdy, a planety, jak nasza Ziemia, nie są gorące.
- A to czarne pomiędzy nimi?
- To w większości pustka, choć niektórzy uczeni mówią, że jest wypełniona eterem... Najbardziej jednak niesamowite jest to, że planety i gwiazdy są w niej zawieszono i nigdy nie spadają. Gdyby ludzie się tam znaleźli, to też mogliby latać!
- Jak ptaki?
- Nie. Bez skrzydeł!
- Chciałabym umieć latać... choć przez chwilę...
- Patrz, jak tu wysoko... skoczmy... poczujemy się, jakbyśmy lecieli na Księżyc.
- Nie! Przecież się zabijemy!
- Moja miłość Cię uniesie...
- Głupi!
- No chodź.
- Nie! Boję się...
- To ja skoczę, żebyś wiedziała, że cię Kocham...
- Neeeeeeee

Gdy w najbliższą niedzielę dziewczyna zobaczyła swojego kolegę, jak lekko poobijany wchodzi do kościoła, omal nie zemdląca. Tamtego dnia uciekła z płaczem spod klasztoru i przez kilka dni nie mogła dojść do siebie, pewna, że Mietek z miłości do niej się zabił. Niby znała go nie od dziś. Imponował jej jazdą na „motocyklu”, jak nazywał rower z przymocowanym przez siebie silniczkiem z jednej z częstochowskich fabryk, podarowanym mu przez ojca. Słyszała, jak pogrążył Częstochowę w ciemnościach, podczepiając druty do lamp elektrycznych zamontowanych nie tak dawno na głównej ulicy miasta, aby mieć prąd do jakiegoś eksperymentu. Tak, Mietek był niezwykły. Inny niż wszyscy chłopcy. Mogło jej przejść przez głowę, że ten skok też jakoś zaplanował, ale żeby specjalnie dla niej tak ryzykował? Nie wierzyła, że człowiek może latać. Tymczasem chłopak już kilka dni wcześniej wszystko dokładnie przemyślał, a tamtego dnia od rana organizował „pokaz”. Obliczył, z jaką prędkością spotka się z ziemią i jak, za pomocą sterty pudeł, zamortyzować ten upadek. Skrupulatnie ułożył tekturowe pojemniki w zaplanowanym miejscu... lecz po ciemku, a może z podekscytowania, stanął nie w tym miejscu, pół metra obok. Przeżył, ale potłuczenia utrudniały mu siedzenie przez dobrych kilka dni.

Taki właśnie w młodości był Mieczysław Wolfke, późniejszy profesor Politechniki Warszawskiej, prezes Polskiego Towarzystwa Fizycznego i członek wielu renomowanych stowarzyszeń naukowych na całym świecie. Zresztą nie tylko w młodości. W 1932 roku, czterdziestodwuletni naukowiec mówił na Zjeździe Fizyków Polskich w Wilnie: „Uprzedzenie, że teoria i praktyka pozostają w pewnej sprzeczności ze sobą, ustępuje stopniowo słusznemu przekonaniu, że obydwie one muszą wzajemnie się uzupełniać i że żadna z nich sama sobie nie wystarcza”. Teoria utożsamiała w jego umyśle wyobraźnię,

potencjał możliwości, które czekają na odkrycie i wykorzystanie, granice, za którymi rozciąga się dziewiczy obszar pełen nieodkrytych jeszcze technologii i niewymyślonych dotąd rozwiązań. Grzechem byłoby iść tam jedynie po to, aby popatrzeć i się zachwycić. Należało raczej być emisariuszem cywilizacji, który będzie potrafił czerpać z tych zasobów, udoskonalając ludzkie życie i zwiększając możliwości rozwoju.

Z pewnością taki pogląd na naukę i technikę zakorzeniony był w domu rodzinnym Wolfkego. Jego ojciec pracował jako inżynier miejski w Łasku, a potem główny nadzorca techniczny miasta Częstochowy, matka była siostrą Gustawa Kościńskiego, bardzo wykształconego nauczyciela i organizatora systemu oświaty w Częstochowie, współpracownika Karola Olszewskiego i Zygmunta Wróblewskiego, którzy po raz pierwszy na świecie skroplili tlen. W domu z pewnością były więc obecne liczne dzieła naukowe, a w rozmowach często pojawiał się temat nowoczesnych rozwiązań technicznych. Mietek także tworzył – najpierw zaawansowane budowle z drewnianych klocków i kamyków, potem teorie inspirowane doniesieniami z gazet. Wpadł na pomysł planetostatu, czyli zaskakująco poprawny opis napędu odrzutowego potrafiącego przenieść człowieka na Księżyc, a także wynalazł i opatentował telektroskop bez drutów, łącząc pomysły Jana Szczepanika na zamianę obrazu w sygnał elektryczny i metodę jego odtworzenia oraz Juliana Ochorowicza, który skutecznie przesłał w 1904 roku telegram, używając fal elektromagnetycznych. Wolfke interesował się też filozofiami dalekowschodnimi, kładącymi nacisk na samodoskonalenie i rozwój świadomości. Chciał nawet uciec do Tybetu, co mu się na szczęście nie udało.

Udało się za to dostać na studia w Liege, w Belgii, gdzie po raz pierwszy spotkał się z prawdziwą nauką – pod opieką prof. Pierre’a de Heena starał się zdefiniować elektron jako zaburzenie eteru. Zarówno te badania – zbyt teoretyczne i oderwane od rzeczywistości, jak i podjęta kilka lat później, po obronie doktoratu, praca w laboratorium technicznym firmy Carl Zeiss w niemieckiej Jenie nie satysfakcjonowały go. Fizyka, którą kochał, musiała znajdować się na styku odkryć i wykorzystania ich w praktyce. W świetle lamp rtęciowych, które wówczas coraz częściej oświetlały miejskie ulice, ludzie wyglądają upiornie bledo. Trzeba zbadać, dlaczego... W widmie rtęci brak jest czerwonej części widma. Trzeba zastanowić się, jak to zmienić... Brakujące widmo może zapewnić kadm lub cynk. Dodajmy te pierwiastki do rtęci. W ten sposób powstał opatentowany przez Wolfkego w wielu krajach i sprzedany ostatecznie amerykańskiemu koncernowi Westinghouse Cooper Hewitt projekt lampy kadmowo-rtęciowej. Potrzeba techniki rodzi konieczność poszerzenia granic wiedzy, które muszą zaowocować nowym rozwiązaniem – tak najprościej można streścić zarówno osiągnięcia, jak i poglądy naukowe Mieczysława Wolfkego, opisane zwięźle w nazwie „fizyka techniczna”.

Podobnie było z największymi osiągnięciami naukowymi. Doktorat, pisany pod opieką Ottona Lummera, a inspirowany dorobkiem Ernsta Abbego, dotyczył teorii formowania obrazów siatek dyfrakcyjnych. Wolfke widział, że rozważania te są bliskie praktyki, bowiem założona z udziałem Abbego firma Carl Zeiss stała się jednym z najważniejszych dla rozwoju przemysłu optycznego punktów na mapie świata. Praca doktorska i szereg publikacji naukowych Wolfkego stworzyły kompletną teorię obrazowania obiektów periodycznych w świetle spójnym i niespójnym. Jemu samemu dały zaś prawo wykładania, w charakterze docenta, na Uniwersytecie i Politechnice Związkowej w Zurychu. Było to miejsce, gdzie spotykało się wielu najznamienitszych fizyków ówczesnego świata, z Albertem Einsteinem na czele. Wkrótce świat naukowy zaczął zastanawiać się nad budową materii (a także w ogóle charakterem czasu i przestrzeni) – stwierdzono, że składa się ona z ciężkich, regularnie ułożonych jąder i pustki między nimi. Podobnie jak Williamowi Henry’emu i Williamowi Lawrence’owi Braggom, Wolfkemu także nie trzeba było długo myśleć, aby dojść do wniosku, że można potraktować cienkie warstwy atomów jak dwuwymiarowe siatki dyfrakcyjne. Wolfke jednak miał dużo szerszą wiedzę na temat ich obrazowania niż wymienieni wyżej odkrywcy dyfraktometrii rentgenowskiej. Obraz dyfrakcyjny takiej sieci molekularnej będzie nadal przypominał siatkę dyfrakcyjną. A gdyby go zapisać i zobrazować ponownie w świetle widzialnym? Szybkie obliczenia pokazały, że można by wówczas uzyskać wizualizację atomów w olbrzymim powiększeniu. Praca Wolfkego na ten temat opublikowana w 1920 roku pięćdziesiąt lat później została zacytowana w wykładzie noblowskim. Dennis Gabor odbierając najbardziej prestiżowe wyróżnienie w świecie nauki za odkrycie holografii, przyznał, że Wolfke tę samą metodę podał długo przed nim (o czym dowiedział się później, po dokonaniu własnych badań). W istocie bowiem takie obrazowanie dwustopniowe to podstawa zapisu holograficznego. Wolfke nie miał jednak szans uzyskać obrazów, gdyż potrzebne do tego byłyby silne źródła światła spójnego, czyli lasery, które wynaleziono dopiero w latach sześćdziesiątych XX wieku.

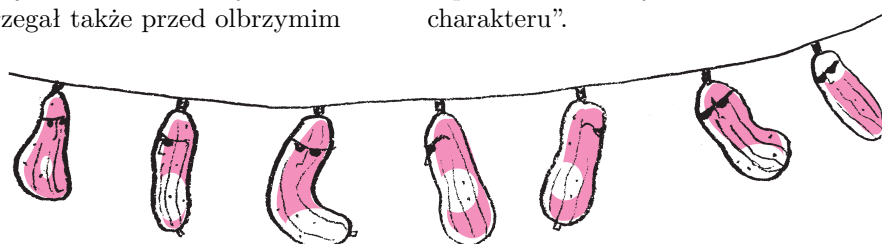
Po powrocie do Polski, w 1922 roku Wolfke został profesorem fizyki na Politechnice Warszawskiej. Zafascynowały go niskie temperatury. Nawiązana współpraca z Laboratorium Kriogenicznym w holenderskiej Lejdzie i badania podjęte najpierw z Heikem Kamerlinghem Onnesem, a następnie Willemem Keesomem miały na celu znalezienie sposobu na zestalenie ostatniego z pierwiastków, który jeszcze opierał się nauce – helu. Wolfke odkrył, że kluczem jest tu bardzo wysokie ciśnienie. Dokonał (wspólnie z Willemem Keesomem) także innego odkrycia. Pracując w niezwykle niskich temperaturach i mierząc właściwości ciekłego helu, ze zdziwieniem zauważył ich nagłą zmianę w temperaturze 2,3 K – tak jakby istniały dwa rodzaje formy płynnej tego pierwiastka. Odkrycie helu II, który nie ma lepkości

– czego dziesięć lat później dowiedli Piotr Kapica, John F. Allen i Don Misener – było niezwykle ważne w świecie nauki. Była to jedna z pierwszych na świecie cieczy kwantowych niepodlegających prawom fizyki klasycznej.

Fascynacja zjawiskami kwantowymi i optyką to za mało, Wolfke zawsze starał się udostępnić swoje odkrycia gospodarce oraz ukierunkowywać je na potrzeby techniczne przemysłu. W latach trzydziestych, gdy sytuacja międzynarodowa była coraz bardziej niepewna, najpilniejszą potrzebą w Polsce stała się budowa nowoczesnych sił zbrojnych i rozpoznanie technologii opracowywanych przez inne państwa. Na spotkaniach z kręgami wojskowymi Wolfke zaproponował m.in. telefonię świetlną, noktowizję czy systemy autonomicznego nakierowywania rakiet. Na Politechnice Warszawskiej utworzono specjalny zakład technologii wojskowych, a profesor nie raz, wykorzystując kontakty naukowe, jeździł do Niemiec w celu rozeznania się w postępach i organizacji technik raketowych. Już w maju 1939 roku ostrzegał także przed olbrzymim

niebezpieczeństwem, jakim może stać się rozszczepienie atomu, opisując dokładnie, jak destrukcyjne skutki dla ludzkości może mieć wykorzystanie tego zjawiska w konstrukcji bomby.

Przerażenie materializacją tych obaw w Hiroszynie i Nagasaki, w dodatku nie za sprawą nieobliczalnych Niemiec Hitlera, lecz Stanów Zjednoczonych, które stały się naukowym i cywilizacyjnym centrum ludzkości, w połączeniu z okropnymi przeżyciami okupacji Warszawy odcisnęły piętno na ponad sześćdziesięcioletnim profesorze fizyki. Po wojnie na łamach *Gazety Ludowej* Wolfke pisał: „Z pamiętaniem szukamy prawdy poza nami, w świecie zjawisk przyrody, wyzyskujemy zdobycze nauki dla celów utylitarnych, ułatwiamy sobie materialne warunki bytowania. A czy do użytkowania danych nam przez przyrodę mocy dorosiliśmy naszym charakterem, dobrą wolą, poczuciem sprawiedliwości, naszym stosunkiem do bliźniego? (...) Ludzkość, zajęta badaniem i wyzyskaniem sił przyrody, zapomniała o samym człowieku i o kształtowaniu jego charakteru”.



## Zadania

Przygotował Dominik BUREK

**M 1708.** Liczby rzeczywiste  $a$ ,  $b$ ,  $c$  i  $d$  spełniają równość

$$a^2 + b^2 + (a + b)^2 = c^2 + d^2 + (c + d)^2.$$

Udowodnij, że

$$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = c^4 + d^4 + (c + d)^4.$$

Rozwiązanie na str. 1

**M 1709.** Dane są liczby całkowite  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , dla których zachodzi równość

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2ab + 2bc + 2ca.$$

Udowodnij, że liczby  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$  oraz  $ab + bc + ca$  są kwadratami liczb całkowitych.

Rozwiązanie na str. 10

**M 1710.** Na okręgu umieszczono skończenie wiele liczb dodatnich, nie większych od 1. Udowodnij, że można podzielić okrąg na trzy łuki tak, aby sumy liczb na sąsiednich łukach różniły się o nie więcej niż 1.

Rozwiązanie na str. 1

Przygotował Andrzej MAJHOFER

**F 1047.** Średnia wartość pola elektrycznego mierzona przy powierzchni Ziemi wynosi  $E = 100 \text{ V/m}$ . Ile wynosi ładunek elektryczny  $Q$  zgromadzony na powierzchni Ziemi? Ile wynosi energia  $\mathcal{E}$  zgromadzona w polu tego ładunku? Średni promień Ziemi wynosi  $R = 6370 \text{ km}$ , a przenikalność elektryczna próżni  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .

Rozwiązanie na str. 13

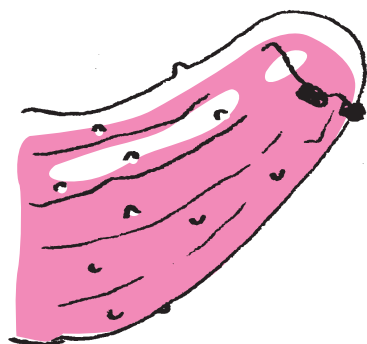
**F 1048.** Do sufitu nieruchomej windy zamocowano sprężynę o długości swobodnej  $l$  i stałej sprężystości  $k$ . Na sprężynie zawieszono ciężarek o masie  $m$ . Winda początkowo spoczywa. Jaki będzie ruch ciężarka, gdy:

a) winda zacznie zjeżdżać w dół ze stałą prędkością  $v$ ?

b) winda zacznie swobodnie spadać po nagłym zerwaniu utrzymującej ją liny?

Przyspieszenie ziemskie wynosi  $g$ .

Rozwiązanie na str. 7



# Jak liczyć głosy?

Grzegorz *PIERCZYŃSKI*\*

\*Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wyobraźmy sobie grupę studentów, którzy po pandemii wreszcie mieli okazję się poznać na żywo i żeby się zintegrować, postanowili zorganizować wspólne wyjście na obiad. Szybko się jednak okazało, że podjęcie decyzji, gdzie się udać, jest znacznie trudniejsze, niż wydawało się na początku – różne osoby mają zupełnie różne oczekiwania i preferencje dotyczące miejsca. Całkiem spora grupa zaproponowała pobliski fast food (oznaczmy go jako 🍔) – przeciw czemu głośno zaprotestowała większość studentów, dla której ważne jest zdrowe odżywianie. Spośród nich wielu jest wegetarianami lub weganami, więc ci zaproponowali swoją ulubioną restaurację, serwującą wyłącznie dania wegańskie (🌿), co jednak wzbudziło niechęć osób mających ochotę na mięsny posiłek. Inne zgłoszone propozycje to dwie włoskie restauracje (🍕 i 🍝) i naleśnikarnia (🥞).

– Skoro nie możemy się porozumieć, to zróbmy głosowanie! Podejmy decyzję demokratycznie! – rozległy się głosy po dłuższej chwili jałowych przekrzykiwań. Każdy student przedstawił swój ranking preferencji, szeregując dostępne opcje od najlepszej do najgorszej. Wyniki okazały się następujące:

6 osób: 🍔 > 🍕 > 🍝 > 🥞 > 🌿,  
5 osób: 🌿 > 🥞 > 🍕 > 🍝 > 🍔,  
3 osoby: 🥞 > 🍕 > 🍝 > 🌿 > 🍔,  
1 osoba: 🍕 > 🍝 > 🥞 > 🌿 > 🍔.

Jednak zupełnie nie rozwiązało to konfliktu. Zwolennicy 🍔 natychmiast ogłosili swoje zwycięstwo – w końcu patrząc na najbardziej preferowaną opcję, widać, że zdobyli najwięcej głosów! Zwolennicy 🌿 natomiast stwierdzili, że 🍔 zdobył mniej niż 50% głosów, więc – podobnie jak w przypadku wyborów prezydenckich – powinna się odbyć druga tura głosowania, do której weszłyby dwie opcje występujące najczęściej na pierwszym miejscu. Przy takiej metodzie to 🌿 okazałaby się zwycięzcą, pokonując 🍔 w drugiej turze stosunkiem głosów 9 : 6.

Problem, na który natrafili studenci, został już w przeszłości zauważony przez filozofów i matematyków zajmujących się teorią wyboru społecznego. Wielu z nich zwróciło uwagę, że w sytuacji braku wyraźnej większości powinno nas interesować wybranie opcji najbardziej kompromisowej. W naszym przypadku na oko takimi opcjami są 🍕 i 🥞. Jednak czy da się jednoznacznie rozstrzygnąć, która z nich jest lepsza? Jak można zdefiniować „kompromisowy wybór” w ogólnej sytuacji? Dwóch matematyków francuskich żyjących w XVIII wieku – Nicolas de Condorcet i Jean-Charles de Borda – udzieliło zupełnie różnych odpowiedzi na to pytanie.

Postępując zgodnie z metodą zaproponowaną przez Bordę, oznaczamy liczbę dostępnych opcji przez  $m$  i od każdego wyborcy każdej opcji przydzielamy  $m - i$  punktów za pojawienie się na  $i$ -tej pozycji w jego rankingu (czyli np. od wyborcy z preferencjami 🍔 > 🍕 > 🍝 > 🥞 > 🌿 opcje w jego rankingu dostają kolejno 4, 3, 2, 1 i 0 punktów). Zwycięzcą powinna być ta opcja, która sumarycznie otrzymała najwięcej punktów. Wyniki uzyskane tą metodą są następujące:

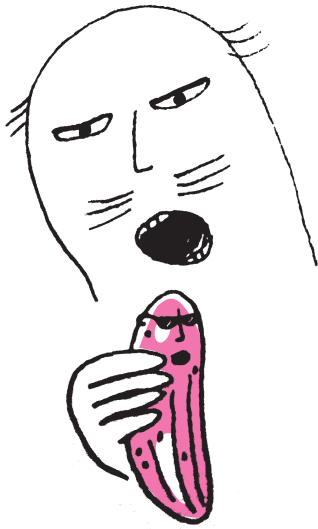
🍔	🍕	🍝	🥞	🌿
24	41	26	35	24

Wygrywa zatem 🍕.

Borda przedstawił również alternatywną definicję swojej metody. Wyobraźmy sobie, że rozgrywamy pojedynki „jeden na jeden” między wszystkimi parami opcji. Niech  $\text{Pref}(A, B)$  oznacza liczbę wyborców preferujących opcję  $A$  nad  $B$ . Wtedy liczba punktów dla każdej opcji  $A$  wynosi  $\sum_{B \neq A} \text{Pref}(A, B)$ . Możemy to zilustrować w formie grafu:

Gdyby historyjka miała miejsce w Australii, to zwolennicy 🌿 mogliby się powołać na metodę *pojedynczego głosu przechodniego*, wykorzystywaną w tym kraju w wyborach do Senatu. Według tej metody głosowanie powinno być wieloturuowe, przy czym za każdym razem powinna odpadać opcja wskazana najrzadziej na pierwszym miejscu, a głosy na nią oddane powinny przechodzić na następną opcję w rankingu preferencji. W tym przypadku również zwycięzcą okazałaby się restauracja wegańska.

Tak naprawdę metody znane pod nazwiskami Borda i Condorceta wymyślił już w 1299 roku majorkański teolog Ramon Llull, jednak jego manuskrypty na ten temat zostały odkryte dopiero w 2001 roku.

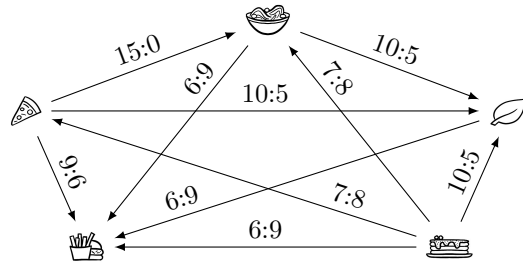


Jedyny powód, dla którego metoda Bordy wybiera  $\triangle$ , wynika ze zgłoszenia drugiej włoskiej restauracji  $\triangle$ , która jest jej „gorszym klonem” – każdy głosujący woli bardziej  $\triangle$  niż  $\triangle$ , co sztucznie zawyża wynik punktowy  $\triangle$  (gdyby nie obecność  $\triangle$ , zwycięzcą byłaby  $\triangle$ ). Ciekawe w takim razie, kto w ogóle zaproponował opcję  $\triangle$ ? Czyżby zwolennik  $\triangle$ ?

Dziś ta metoda jest często nazywana metodą Copelanda, na cześć matematyka amerykańskiego, który odkrył ją niezależnie w 1951 roku. Jednak Condorcet (gdyby żył) nie powinien mieć o to pretensji, gdyż jak napisaliśmy wcześniej, i tak właściwszą nazwą byłaby „metoda Llulla”.

\*Za każdym razem, gdy bez dalszego komentarza mówimy, że metoda wyborcza wybiera jakiegoś kandydata, mamy na myśli to, że jest on w gronie zwycięzców – nawet jeśli remisuje z innymi kandydatami.

Dowód opiera się na pracy:  
F. Brandt, C. Geist and D. Peters.  
*Optimal bounds for the no-show paradox via SAT solving*. Mathematical Social Sciences 90 (2017): 18–27.



Prosty rachunek pokazuje, że w naszym przykładzie rzeczywiście obydwie definicje są równoważne – udowodnienie tego w ogólnym przypadku pozostawiamy Dociekliwemu Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Metoda Bordy, choć została przyjęta m.in. przez Francuską Akademię Nauk do wyboru nowych członków, spotkała się z krytyką markiza de Condorceta. Zgodnie z jego opinią w naszej sytuacji wygrać powinna  $\triangle$ . Zauważmy, że w rozważanym grafie pojedynków  $\triangle$  wygrywa pojedynek z  $\triangle$  (zatem jeśli studenci zdecydują się na  $\triangle$ , to większość będzie wolała zmienić decyzję na  $\triangle$ ). Możemy nawet powiedzieć coś więcej:  $\triangle$  wygrywa pojedynek z każdą inną opcją!

Nicolas de Condorcet stwierdził, że to właśnie opcja wygrywająca pojedynek z każdym przeciwnikiem jest najlepszym wyborem (dlatego taką opcję nazywa się *zwycięzcą condorcetowskim*). Czy jednak zawsze taka opcja musi istnieć?

Wyobraźmy sobie wybory, w których startuje 3 kandydatów,  $A, B, C$ , i mamy 3 wyborców o następujących preferencjach:

$$\begin{aligned} A &> B > C, \\ B &> C > A, \\ C &> A > B. \end{aligned}$$

Okazuje się, że  $A$  wygrywa pojedynek z  $B$ ,  $B$  wygrywa z  $C$ ... a jednocześnie  $C$  wygrywa z  $A$ ! Zwycięzca condorcetowski może zatem nie istnieć – ten fakt nazywany jest *paradoksem condorcetowskim*.

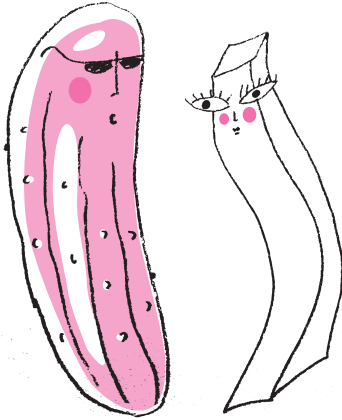
Jak sobie można z tym poradzić? Metoda zaproponowana przez Condorceta zakładała wybór kandydata, który wygrał *najwięcej* pojedynków. W powyższym przykładzie należy więc uznać, że mamy remis między kandydatami  $A, B, C$ . Istnieją też inne, bardziej skomplikowane metody, które zawsze wybierają zwycięzcę condorcetowskiego (jako unikalnego zwycięzcę), gdy istnieje – nazywa się je ogólnie *metodami condorcetowskimi*.

Czyj zatem pomysł jest lepszy, Bordy czy Condorceta? Nie jest to oczywiste – nie ma metody wyborczej, która byłaby wolna od rozmaitych paradoksów. Przedstawiona dotychczas intuicja raczej sugerowałaby wyższość metod condorcetowskich, więc na zakończenie, dla równowagi, podamy argument przeciwko nim.

Rozważmy metodę wyborczą  $W$  i dowolny układ głosów, dla którego ta metoda wybiera\* kandydata  $A$ , ale nie wybiera  $B$ . Metoda  $W$  spełnia aksjomat *uczestnictwa*, jeżeli po dodaniu głosu, w którym  $A > B$ , albo po usunięciu głosu, w którym  $B > A$ , metoda nie wybierze  $B$ . Intuicyjnie oznacza to, że wyborcy nigdy nie mogą sobie „zaszkodzić” poprzez uczestnictwo w wyborach – co wydaje się racjonalnym oczekiwaniem. Dla reguły Bordy jest to w oczywisty sposób spełnione: dodając nowy głos, uzyskuje się wzrost różnicy w liczbie punktów między zwyciężką  $A$  a każdym mniej preferowanym kandydatem  $B$ . Nie jest to jednak prawdą dla żadnej metody condorcetowskiej, co pokażemy w następującym twierdzeniu.

**Twierdzenie 1.** *Żadna metoda condorcetowska nie spełnia aksjomatu uczestnictwa.*

*Dowód.* Załóżmy nie wprost, że taka metoda wyborcza  $W$  istnieje. Rozważmy następujący układ 10 głosów  $I_0$ :



- 2 głosy:  $A \succ B \succ D \succ C$ ,
- 3 głosy:  $B \succ D \succ C \succ A$ ,
- 3 głosy:  $C \succ A \succ B \succ D$ ,
- 2 głosy:  $D \succ C \succ A \succ B$ .

Przypuśćmy, że metoda  $\mathcal{W}$  wybiera  $A$  lub  $B$ . Możemy to zrobić bez straty ogólności ze względu na symetrię: zamieniając etykietami  $A$  z  $D$  i  $B$  z  $C$ , otrzymamy identyczny układ głosów. Teraz rozważmy układ  $I_1$  otrzymany z  $I_0$  przez dodanie 2 dodatkowych głosów, dopisanych na początku:

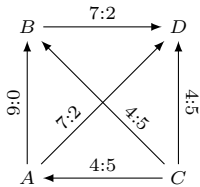
- 2 głosy:  $A \succ B \succ C \succ D$ ,
- 2 głosy:  $A \succ B \succ D \succ C$ ,
- 3 głosy:  $B \succ D \succ C \succ A$ ,
- 3 głosy:  $C \succ A \succ B \succ D$ ,
- 2 głosy:  $D \succ C \succ A \succ B$ .

Jeśli metoda  $\mathcal{W}$  w  $I_0$  wybiera  $A$  lub  $B$ , to w  $I_1$ , z aksjomatu uczestnictwa, też wybiera  $A$  lub  $B$  – pokażemy, że obydwie te możliwości prowadzą do sprzeczności.

Przypuśćmy, że metoda  $\mathcal{W}$  w  $I_1$  wybiera  $A$ . Wtedy rozpatrujemy układ  $I_2$  (otrzymany z  $I_1$  przez skasowanie 3 środkowych głosów):

- 2 głosy:  $A \succ B \succ C \succ D$ ,
- 2 głosy:  $A \succ B \succ D \succ C$ ,
- 3 głosy:  $C \succ A \succ B \succ D$ ,
- 2 głosy:  $D \succ C \succ A \succ B$ .

Graf pojedynków dla  $I_2$

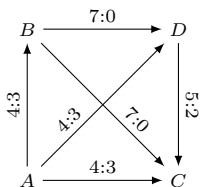


W takiej sytuacji  $C$  jest zwycięzcą condorcetowskim, zatem tylko on zostanie wybrany przez  $\mathcal{W}$ . Ale wtedy z aksjomatu uczestnictwa wynika, że po dodaniu 3 głosów  $B \succ D \succ C \succ A$  zwycięzcą nie może zostać  $A$  – a przecież po takim dodaniu otrzymujemy  $I_1$ ! Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zatem jedyna możliwość jest taka, że w  $I_1$  wygrywa  $B$ . Wtedy rozpatrujemy układ  $I_3$  (otrzymany z  $I_1$  przez skasowanie 5 ostatnich głosów):

- 2 głosy:  $A \succ B \succ C \succ D$ ,
- 2 głosy:  $A \succ B \succ D \succ C$ ,
- 3 głosy:  $B \succ D \succ C \succ A$ .

Graf pojedynków dla  $I_3$



Tutaj to  $A$  jest zwycięzcą condorcetowskim, zatem tylko on zostanie wybrany przez  $\mathcal{W}$ . Ale wtedy z aksjomatu uczestnictwa wynika, że po dodaniu 3 głosów  $C \succ A \succ B \succ D$  i 2 głosów  $D \succ C \succ A \succ B$  zwycięzcą nie może zostać  $B$  – a po takim dodaniu otrzymujemy ponownie  $I_1$ . Zatem również tu otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód.  $\square$

## Ijon Tichy na orbicie wokółksiężycowej

Paweł TURKOWSKI\*

\* Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Ijon Tichy to jeden z bohaterów wykreowanych przez Stanisława Lema. Stał się na tyle znany, że jego imię w formie „Ijontichy” nadano niewielkiej planetoidzie krążącej pomiędzy orbitą Marsa i Jowisza. W książce „Pokój na Ziemi” Tichy pojawia się, aby spełnić pewną ważną misję na powierzchni Księżyca. Swoje zadanie ma wykonać na odległość, posługując się „zdalnikiem”. Zdalnik nie jest samodzielnym robotem, lecz tworem, którego poczynaniami trzeba sterować na bieżąco poprzez zespół przymocowanych do ciała Tichego sensorów. Gdyby próbować to sterowanie prowadzić z Ziemi, to opóźnienie działania zdalnika związane z dystansem, który dzieli Ziemię i Księżyc, wyniosłoby:

$$t = \frac{2d}{c},$$

przy czym:  $t$  – czas opóźnienia,  $d$  – odległość Ziemia–Księżyc,  $c$  – prędkość światła w próżni. Opóźnienie to ze względu na eliptyczny kształt orbity księżycowej waha się w granicach od 2,4 s do 2,7 s. Ponieważ taki czas reakcji



zdalnika jest za długi, Tichy jako doświadczony międzygwiazdny podróżnik zostaje wysłany na orbitę księżycową, by sterować zdalnikiem z mniejszej odległości.

### Astronomiczne zagadnienie dwóch ciał

Załóżmy, że Tichy krąży wokół Księżyca w płaszczyźnie równikowej na wysokości 100 km po orbicie kołowej, podobnie jak astronauta programu Apollo. Masa statku Tichego  $m$  jest niezmiernie mała w porównaniu z masą Księżyca, zatem możemy przyjąć, że środek masy tego układu dwóch ciał pokrywa się ze środkiem masy Księżyca. Tichy obiegałby Księżyc z prędkością kątową  $\omega$  spełniającą warunek:

$$G \frac{M_K m}{r^2} = m \omega^2 r.$$

Wyrażenie po lewej stronie tego równania to siła grawitacyjnego przyciągania statku Tichego przez Księżyc, przy czym  $r$  oznacza jego odległość od środka Księżyca,  $G$  – stałą grawitacji,  $M_K$  – masę Księżyca. Po prawej stronie równania, zgodnie z II zasadą dynamiki, rozpoznajemy iloczyn masy statku Tichego i przyspieszenia dośrodkowego  $\omega^2 r$ . Ponieważ prędkość kątowa  $\omega = 2\pi/T$ , więc czas  $T$  jednego obiegu po takiej orbicie wynosi:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{G M_K}}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych:  $r = 100 \text{ km} + 1737 \text{ km} = 1837 \text{ km}$  (1837 km to promień Księżyca),  $G = 6,674 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$  oraz  $M_K = 7,248 \times 10^{22} \text{ kg}$ , otrzymujemy  $T = 7065 \text{ s}$ , czyli  $T = 1^{\text{h}}58^{\text{m}}$ . Uzyskany wynik jest podobny do czasu jednego okrążenia Ziemi przez Jurija Gagarina. Ta zbieżność związana jest z tym, że średnia gęstość Ziemi  $5,51 \text{ g/cm}^3$  nie różni się bardzo od gęstości Księżyca ( $3,34 \text{ g/cm}^3$ ), a czas obiegu na niskiej orbicie wokół dowolnego ciała niebieskiego jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka z jego gęstości.

Z wysokości 100 km Tichy widziałby wąski pas Księżyca w pobliżu równika. Lemowy pierwszy zdalnik faktycznie ląduje w tym pasie, na obszarze zwanym Oceanem Burz (rys. 1). Zdalnik wymaga jednak stałej łączności radiowej z Tichym, który nim steruje. Musi więc widzieć statek kosmiczny orbitującego Tichego bez przerw. Gdyby Tichy krążył po omawianej przez nas orbicie, to czas bezpośredniej widoczności jego statku sięgałby najwyżej kilkunastu minut, przez resztę czasu byłby schowany pod horyzontem. Autor wysłał więc Tichego na orbitę „stacjonarną”. Domyślamy się, że okres obiegu Księżyca  $T_s$  na tej orbicie ma być równy czasowi rotacji Księżyca względem gwiazd stałych, czyli miesiącowi syderecznemu  $T_s = 27^{\text{d}}07^{\text{h}}43^{\text{m}}11^{\text{s}},5$ . Przeanalizujemy, jaki musiałby być promień  $r_s$  takiej orbity selenostacjonarnej. Przekształcenie poprzednio użytego już równania do postaci:

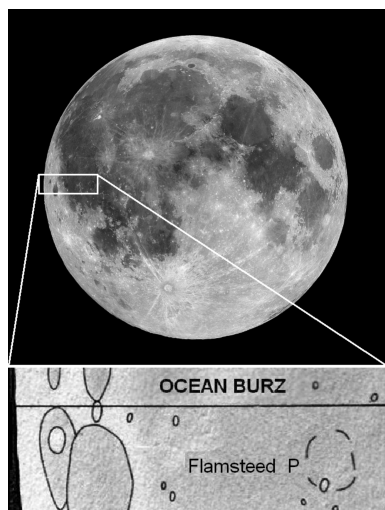
$$r_s = \sqrt[3]{\frac{G M_K T_s^2}{4\pi^2}}$$

i wstawienie odpowiednich danych prowadzi do wniosku, że promień  $r_s$  musiałby przekraczać 88 tysięcy kilometrów. Jest to wartość zbliżona do  $\frac{1}{4}$  odległości Ziemia–Księżyc. Tichemu nie uda się więc sztuka wprowadzenia statku na orbitę stacjonarną, tak by „zawisnąć” nad wybranym punktem równika księżycowego. Znajdzie się ona zbyt blisko Ziemi, której obecności (a co za tym idzie, masy) nie uwzględnialiśmy w obliczeniach.

### Astronomiczne zagadnienie trzech ciał i punkty Lagrange’a

Wokółksiężycowa orbita stacjonarna co prawda nie istnieje, ale na orbicie wokółziemskiej można znaleźć szczególne punkty, w których statek Tichego mógłby przebywać jako nieruchomy dla księżycowego obserwatora. Jest ich tylko pięć i noszą nazwę punktów Lagrange’a. Umieszczony w jednym z nich statek Tichego poruszałby się po wokółziemskiej orbicie współbieżnie z Księżycem, wykonując jeden obieg w czasie miesiąca syderecznego  $T_s$ .

Wbrew pozorom żaden z punktów Lagrange’a nie leży dokładnie na orbicie księżycowej. Możliwość obiegu Ziemi przez statek kosmiczny w czasie  $T_s$  tym



Rys. 1. Miejsce lądowania „zdalnika”, krater Flamsteed P widziany jest z Ziemi blisko lewej krawędzi tarczy Księżyca



#### Rozwiązanie zadania F 1048.

Przed rozpoczęciem ruchu windy ciężarek będzie spoczywał, a sprężyna będzie rozciągnięta do długości  $x_0 = l + mg/k$ .

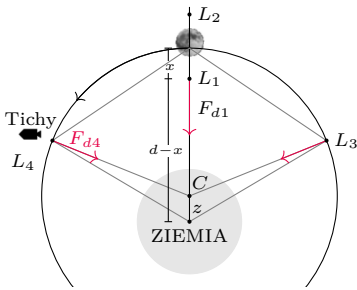
W przypadku a) w chwili rozpoczęcia ruchu sprężyna jest rozciągnięta do długości  $x_0 = l + mg/k$ , a ciężarek porusza się względem punktu zawieszenia sprężyny z prędkością  $v$  w górę – to stan początkowy ruchu (winda poruszająca się ze stałą prędkością jest układem inercyjnym). Ciężarek będzie wykonywał drgania harmoniczne względem położenia  $x_0$  z okresem  $T = 2\pi \sqrt{m/k}$

i amplitudą  $A = v \sqrt{m/k}$ . Długość  $x$  sprężyny będzie zmieniała się z czasem  $t$  według wzoru:

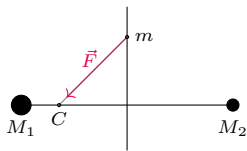
$$x = x_0 - v \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right).$$

W przypadku b) w chwili rozpoczęcia ruchu grawitacja jest „wylączona”, a sprężyna rozciągnięta do długości  $x_0$  – to stan początkowy ruchu. Ciężarek będzie wykonywał drgania względem położenia  $x = l$  o amplitudzie  $mg/k$ . Długość  $x$  sprężyny będzie zmieniała się z czasem  $t$  według wzoru:

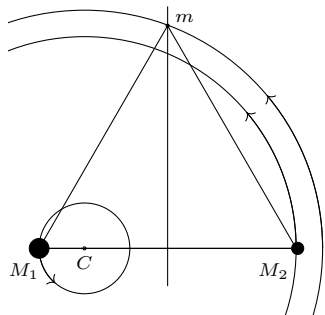
$$x = l + \frac{mg}{k} \cos \left( t \sqrt{\frac{k}{m}} \right).$$



Rys. 2. Ziemia, Księżyc oraz statek kosmiczny Tichego orbitujący wokół Ziemi w jednym z punktów Lagrange'a. Dla uzyskania poglądowności kulę ziemską i Księżyc narysowano w innej skali niż ich wzajemną odległość, a tarczę Księżycza przedstawiono tak, jak ją widzimy z Ziemi



Rys. 3. Niech  $C$  oznacza środek masy układu dwóch ciał niebieskich o dowolnych masach  $M_1, M_2$ , natomiast  $m$  jest niewielką ( $m \ll M_1, m \ll M_2$ ) masą próbną. Na masę  $m$  działa ze strony  $M_1$  i  $M_2$  wypadkowa siła grawitacji  $F$  skierowana do punktu  $C$  wtedy i tylko wtedy, gdy leży on na symetrycznej odcinka łączącego  $M_1$  i  $M_2$ . Dowód polega na wykazaniu, że kąt, który tworzy siła  $F$  z symetryczną odcinka  $M_1 M_2$ , jest równy kątowi  $C m D$



Rys. 4. Jeśli środki mas ciał niebieskich o masach  $M_1, M_2$  oraz masa próbną  $m$  tworzą układ trójkąta równobocznego, to wszystkie te trzy ciała mogą poruszać się jednocześnie wokół środka masy  $C$  po orbitach kołowych w jednej płaszczyźnie, w tym samym kierunku i z tą samą prędkością kątową. Ponieważ wiemy już, że siła  $F$  działająca na  $m$  skierowana jest do punktu  $C$ , to dla dowodu wystarczy wykazać na mocy II zasady dynamiki, że prędkość kątowa obiegu każdego z trzech ciał wokół  $C$  jest jednakowa. Zauważmy, że dla układu Ziemia–Księżyc środek masy układu  $C$  leży wewnątrz Ziemi

samym, co okres jej obiegu przez Księżyc, ale po orbicie o innym promieniu, może na pierwszy rzut oka budzić zdziwienie. Jest to jednak możliwe dzięki temu, że rolę siły dośrodkowej działającej na statek Tichego pełni nie tylko przyciąganie grawitacyjne Ziemi. Jest to wektorowa suma sił przyciągania jego statku przez Ziemię i przez Księżyc o odpowiednim kierunku i wartości.

Rozważmy dwa z pięciu punktów Lagrange'a oznaczone jako  $L_1$  i  $L_2$ , położone na linii Ziemia–Księżyc (rys. 2). Punkt  $L_5$ , pominięty na rysunku, położony jest po przeciwnej stronie Ziemi niż Księżyc i wobec tego dla Tichego jest nieprzydatny. Obliczymy odległość punktów  $L_1$  i  $L_2$  od Księżycza.

Załóżmy, że mamy do czynienia z orbitami kołowymi o środkach położonych w środku masy układu Ziemia–Księżyc ( $C$ ). Ponadto przyjmijmy, że odległość Ziemia–Księżyc  $d = 384,4$  tys. km, punkt  $C$  jest odległy od środka Ziemi o  $z = 4,670$  tys. km, a masa Ziemi  $M_Z = 81,28 M_K$ . Dla statku Tichego umieszczonego w punkcie  $L_1$  i poruszającego się wokół punktu  $C$  z prędkością kątową  $\omega = 2\pi/T_s$  musi być spełniona II zasada dynamiki:

$$\frac{GM_Z m}{(d-x)^2} - \frac{GM_K m}{x^2} = m\omega^2(d-x-z).$$

Podobnie dla statku umieszczonego w punkcie  $L_2$ :

$$\frac{GM_Z m}{(d+x)^2} + \frac{GM_K m}{x^2} = m\omega^2(d+x-z).$$

Po podstawieniu danych do powyższych równań otrzymujemy dwa podobne do siebie równania piątego stopnia na odległości  $x$  Tichego od środka Księżycza. Dla punktu  $L_1$ :

$$Ax^5 + Bx^4 + Cx^3 - 0,76x^2 + 2dx - d^2 = 0,$$

a dla punktu  $L_2$ :

$$Ax^5 - Bx^4 + Cx^3 - 1,24x^2 - 2dx - d^2 = 0,$$

gdzie  $A = 1,445 \times 10^{-6} [(\text{tys. km})^{-3}]$ ,  $B = -0,001660 [(\text{tys. km})^{-2}]$ ,  $C = 0,6352 [(\text{tys. km})^{-1}]$ . Po rozwiązaniu na drodze numerycznej pierwszego z tych równań otrzymujemy wynik  $x = 57,9$  tys. km. Jest to odległość akceptowalna na potrzeby Tichego. Mniej użyteczny dla Tichego punkt  $L_2$  położony jest za tarczą Księżycza w odległości  $x = 64,7$  tys. km.

Ciekawą cechą rozpatrywanych tu obu równań i wynikającej z nich lokalizacji punktów  $L_1$  i  $L_2$  jest to, że im większy byłby stosunek masy Ziemi do masy Księżycza, tym bardziej rozwiązania zbliżałyby się do tej samej wartości. Można sprawdzić poprzez rozwiązanie dwóch równań analogicznych do przedstawionych powyżej, ale dotyczących Słońca i Ziemi, że odległość punktu  $L_1$  od Ziemi wynosi  $x = 1,491$  mln km, a dla  $L_2$  jest prawie identyczna:  $x = 1,502$  mln km. Te punkty mają znaczenie praktyczne. Niektóre sztuczne satelity umieszczane są w ich pobliżu i orbitują wokół Słońca współbieżnie z Ziemią w czasie jednego roku. Dodajmy, że przebywanie nieruchomo w okolicy punktów  $L_1, L_2$  oraz  $L_5$  na dłuższą metę nie jest możliwe – są to położenia niestabilne. Natomiast można wokół nich wykonywać powolne obiegi po kwaziperiodycznych orbitach bez używania napędu. To jedna z niespodzianek, którą serwuje nam układ trzech ciał oddziaływujących grawitacyjnie.

A co z pozostałymi punktami Lagrange'a,  $L_3$  oraz  $L_4$ ? Rzecz ciekawa: niezależnie od wartości mas Ziemia, Księżyc i punkt  $L_4$  lub  $L_3$  tworzą dokładnie trójkąt równoboczny (patrz rys. 3 i rys. 4). Czyni to punkty  $L_3$  i  $L_4$  nieprzydatnymi dla Tichego, ponieważ ich odległość od Księżycza równa odległości Ziemia–Księżyc jest dla potrzeb jego misji zbyt duża, nadal generująca zauważalne opóźnienie w sterowaniu zdalikiem.

Powracając do misji Tichego, musimy się pogodzić z tym, że według autora jego wokółksiężycowe orbitowanie odbywało się na wysokości niezgodnej z naszymi obliczeniami. Dla biegu wydarzeń przedstawionych w książce kluczowe znaczenie miało jednak coś innego. Tichy po kilku próbach wywiązania się ze swojej misji przy pomocy zdalników, wbrew otrzymanemu kategorycznemu zakazowi, w końcu opuścił orbitę „stacjonarną” i zdecydował się na osobiste lądowanie na Księżycu.

# Dlaczego ogórek świeci?

Marcin BRAUN

*Jeżeli ogórek świeci  
I tylko z jednej strony  
To widać jest do sieci  
Kablami podłączony  
Przeróbka znanego wiersza  
K. I. Gałczyńskiego „Dlaczego ogórek nie śpiewa”*

Pewnie widzieliście doświadczenie ze świecącym ogórkiem, a jeśli nie, to wystarczy wpisać w YouTube „glowing pickle”. Otóż jeśli wbijemy dwa przewody w kiszony ogórek, a następnie podłączymy je do sieci elektrycznej 230 V, ogórek zacznie świecić. Najczęściej tylko na jednym końcu, choć zdarzają się także inne przypadki – warzywo świeci na całej długości, na obu końcach albo też na jednym, a po chwili na drugim.

**Uwaga.** Nie próbuj tego w domu. Poza ryzykiem podłączenia się do napięcia 230 V grozi jeszcze jedno niebezpieczeństwo: zatrucie chlorem. Ogórki kiszone zawierają bowiem dużo soli (chlorku sodu) i w chmurze czarnego, śmierdzącego dymu unoszącego się nad warzywa znajduje się także ten gaz bojowy.

Efekt jest zabawny, jednak interesujące jest także pytanie: dlaczego tak się dzieje? A także kilka pytań szczegółowych: Dlaczego świeci na żółto? Dlaczego zwykle na jednym końcu? I na którym? Okazuje się, że prawdziwi naukowcy zajmują się także tak mało poważnymi problemami. Na temat ogórka ukazało się kilka publikacji w recenzowanych czasopismach.

## Dlaczego na żółto?

Jak wiadomo od ponad 100 lat, każdy pierwiastek chemiczny pobudzony do świecenia emituje światło składające się ze skończonej liczby ściśle określonych częstotliwości, czyli barw. Można się o tym przekonać, patrząc na odbicie żarówki w błyszczącej powierzchni płyty CD. Dzięki dużej liczbie równoległych ścieżek taka płyta działa jak siatka dyfrakcyjna i rozkłada światło na poszczególne barwy. Światło tradycyjnej żarówki to mieszanina wszystkich kolorów tęczy, ale w przypadku świetlówki lub LED po rozszczepieniu widać tylko kilka oddzielonych od siebie wąskich linii kolorów. Dzięki znajomości widma różnych substancji możemy je identyfikować. Na przykład sód świeci praktycznie tylko na żółto, a konkretnie wytwarza światło o długości 589,00 nm oraz 589,59 nm. Aby rozróżnić te długości, trzeba mieć dobry spektrometr; zwykła siatka dyfrakcyjna pozwala zobaczyć je jako jedną linię. Jeśli zdarzyło ci się chlapnąć wodą na płomień gazowy, to na chwilę zmienił on barwę na żółtą – właśnie z powodu zawartego w wodzie sodu, jednego ze składników soli kuchennej (NaCl). Światło emitowane przez ogórek to także linie sodu. Nic dziwnego – przecież solimy ogórki do kiszenia. Skoro jednak kiszony w chlorku sodu ogórek świeci na żółto, to może wystarczy zakisić go w soli innego metalu, aby światło zmieniło barwę? Okazuje się, że tak właśnie jest. Na wydarzeniach popularnonaukowych można zobaczyć różnobarwne zestawy ogórków – świecące na czerwono przyprawione żelazem, zielone z miedzią itd.

## Dlaczego na jednym końcu?

Gdyby ogórek podłączyć do sieci przez prostownik, świeciłby tylko na końcu podłączonym do ujemnej elektrody. Tam bowiem w procesie elektrolizy wody powstaje wodór. Prąd płynący przez warzywo ma natężenie kilku amperów, elektrody rozgrzewają się na tyle, że powoduje to zapalenie wodoru, który z kolei przekazuje energię sodowi i wzbudza go do świecenia. W sieci elektrycznej panuje jednak napięcie przemiennie, więc każda z elektrod jest raz ujemna, a raz dodatnia, a zamieniają się co 1/100 sekundy.

Częstotliwość w europejskiej sieci wynosi 50 Hz, ale to oznacza, że co 1/50 sekundy powtarza się cały cykl zmian obejmujący dwukrotną zmianę znaku: z + na - i z powrotem. Przez + i - rozumiemy tu względne napięcie przewodów, a nie napięcie względem ziemi.

Autorzy pracy [4] sfilmowali świecący ogórek szybką kamerą i zauważyli, że światło miga: obszar wokół elektrody świeci tylko wtedy, gdy napięcie na niej jest ujemne. Dlaczego w takim razie w pozostałej części cyklu zmian napięcia nie świeci okolica drugiej elektrody? Jak już mówiliśmy, czasami rzeczywiście świecą oba końce, a bez szybkiej kamery nie zaobserwujemy ich migotania. Na ogół jednak z jednej strony kontakt między elektrodą a miąższem warzywa jest lepszy, a z drugiej gorszy. Tam, gdzie jest **gorszy**, wydziela się więcej ciepła.

Bo większy jest tam spadek napięcia przy jednakowym natężeniu prądu w całym obwodzie. Podobnie przewody najbardziej nagrzewają się w miejscu styku, a pożar instalacji często zaczyna się od zapalenia wtyczki.

Gdy temperatura elektrody przekroczy 600°C, wodór się zapala i ogórek świeci. Błysk trwa tylko kilka milisekund, kończy się więc, zanim zmieni się biegunowość napięcia sieciowego.

## Morał

Jak widać, ciekawą fizykę znajdziemy nie tylko w akceleratorach czy komputerach kwantowych. Nawet proste doświadczenia z przedmiotami codziennego użytku mogą być pouczające, a czasem są inspiracją do nowych odkryć – jeszcze kilka lat temu świecenie ogórka było nierozwiązanym problemem fizyki! Rozglądajmy się więc wokół okiem fizyka. Bo jak mówi Gałczyński, tym razem bez przeróbek:

*Mijają lata, zimy,  
raz słoneczko, raz chmurka;  
a my obojętnie przechodzimy  
koło niejednego ogórka.*

- [1] Appling J. R., Yonke F. J., Edgington R. A. and Jacobs S. 1993: Sodium D line emission from pickles, J. Chem. Educ. 70, 250–1.
- [2] Weimer P. M. and Battino R. 1996, The incredible ‘glowing’ pickle and onion and potato and . . . , J. Chem. Educ. 73, 456–7.
- [3] Rizzo M. M., Halmi T. A., Jircitano A. J., Kociolek M. G. and Magraw J. A. 2005, Revisiting the electric pickle demonstration, J. Chem. Educ. 82, 545–6.
- [4] Vollmer M. and Möllmann K.-P., Light-emitting pickles, 2015 Phys. Educ. 50, 94.

# Losujemy liczbę Eulera

Karol GRYSZKA\*

\*Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

W ostatnim odcinku poszukiwania liczby Eulera w matematyce (poprzednie dwa opublikowane są w  $\Delta_{22}^{03}$  i  $\Delta_{22}^{04}$ ) przyjrzymy się problemowi losowania liczb z odcinka.

Przypomnijmy, co rozumiemy przez wartość oczekiwaną. Załóżmy, że wynik liczbowy  $w$  doświadczenia  $W$  otrzymany jest z prawdopodobieństwem  $p(w)$  i że zbiór  $T$  możliwych wyników jest co najwyżej przeliczalny. W takim wypadku wartość oczekiwaną  $\mathbb{E}W$  to średnia ważona wyników z wagami równymi prawdopodobieństwom, a więc

$$\mathbb{E}W = \sum_{w \in T} w \cdot p(w).$$

Rozważmy następujący problem z rachunku prawdopodobieństwa. Losujemy liczby z przedziału  $[0, 1]$  (i robimy to w sposób *jednostajny*, tzn. szansa na uzyskanie liczby z dowolnego odcinka  $s \subseteq [0, 1]$  jest równa długości  $s$ ). Jaka jest wartość oczekiwana liczby losowań, po której suma uzyskanych liczb po raz pierwszy przekracza 1?

Zaprezentujemy wyniki symulacji komputerowych. Każda z dziesięciu liczb poniżej to średnia z miliona powtórzeń opisanego wyżej eksperymentu:

2,71749, 2,719239, 2,719732, 2,717443, 2,716057,  
2,716511, 2,717569, 2,717784, 2,71784, 2,717778.

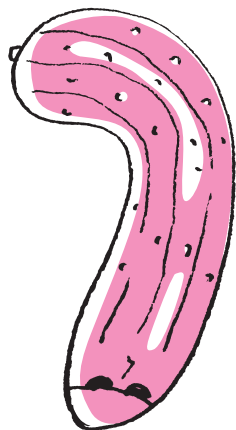
Ponieważ otrzymane wyniki są bardzo bliskie liczbie  $e$ , pozostaje nam formalnie uzasadnić, że poszukiwana wartość średnia jest równa dokładnie  $e$ .

**Formalizacja problemu.** Liczba losowań z  $[0, 1]$  potrzebnych do przekroczenia 1 potencjalnie może być dowolnie duża; wyobraźmy sobie zatem, że nieskończenie wiele razy dokonaliśmy losowania, otrzymując liczby  $X_1, X_2, X_3, \dots$ , a następnie szukamy najmniejszej liczby naturalnej  $N$  takiej, że  $X_1 + X_2 + \dots + X_N > 1$ . Poszukiwana wartość oczekiwana liczby losowań jest zatem równa  $\mathbb{E}N$ , czyli

$$\begin{aligned} \mathbb{E}N &= \sum_{t=1}^{\infty} t \cdot P(N = t) = P(N = 1) + \\ &\quad + P(N = 2) + P(N = 2) + \\ &\quad + P(N = 3) + P(N = 3) + P(N = 3) + \\ &\quad + \dots = \\ &= P(N > 0) + P(N > 1) + P(N > 2) + \dots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(N > k). \end{aligned}$$

W rozumowaniu obok zastosowaliśmy uproszczenie:

$$\begin{aligned} P(N > k) &= P(N = k + 1) + \\ &\quad + P(N = k + 2) + \\ &\quad + P(N = k + 3) + \dots \end{aligned}$$



**Rozwiązanie zadania M 1709.**  
Zauważmy, że przy założeniach zadania

$$\begin{aligned} (a + b - c)^2 &= 4ab, \\ (a - b + c)^2 &= 4ac, \\ (-a + b + c)^2 &= 4bc, \\ (a + b + c)^2 &= 4(ab + bc + ca). \end{aligned}$$

Wobec tego liczby  $4ab$ ,  $4bc$ ,  $4ca$  oraz  $4(ab + bc + ca)$  są kwadratami liczb całkowitych, co implikuje tezę zadania, gdyż 4 również jest kwadratem liczby całkowitej.

Zauważmy, że liczba losowań jest większa od  $k$  dokładnie wtedy, gdy  $X_1 + \dots + X_k < 1$ . Tym samym

$$P(N > k) = P(X_1 + \dots + X_k < 1).$$

Spróbujemy teraz obliczyć tę ostatnią wartość, nadając jej interpretację geometryczną.

Dla  $k = 1$  pytamy o  $P(X_1 < 1)$ , co oczywiście jest równe 1 (gdyż wartość  $X_1$  została wylosowana z odcinka  $[0, 1]$ ). Dla  $k = 2$  sprawa się komplikuje – rozważamy bowiem  $P(X_1 + X_2 < 1)$ . Co możemy powiedzieć o losowym punkcie o współrzędnych  $(X_1, X_2)$ ? Leży on oczywiście w kwadracie jednostkowym  $[0, 1]^2$ . Ponieważ współrzędne były losowane niezależnie, więc szansa na to, że nasz losowy punkt wpadnie do dowolnie wybranego prostokąta  $s_1 \times s_2 \subseteq [0, 1]^2$ , jest równa polu powierzchni tego prostokąta. Można stąd wywnioskować, że szansa na wpadnięcie naszego punktu do dowolnej figury  $\mathcal{F} \subseteq [0, 1]^2$  jest równa polu powierzchni figury  $\mathcal{F}$ . Wziąwszy pod uwagę nierówności  $X_1, X_2 \geq 0$ , zbiorowi  $X_1 + X_2 < 1$  odpowiada trójkąt o wierzchołkach  $(0, 0)$ ,  $(0, 1)$  i  $(1, 0)$ , którego pole wynosi  $\frac{1}{2}$ , mamy zatem  $P(X_1 + X_2 < 1) = \frac{1}{2}$ . Podobnie dla  $k = 3$ : szansa na wpadnięcie losowego punktu o współrzędnych  $(X_1, X_2, X_3)$  do zbioru określonego równaniem  $X_1 + X_2 + X_3 < 1$  jest równa objętości ostrosłupa wyznaczonego przez punkty  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$  i  $(1, 0, 0)$ , zatem  $P(X_1 + X_2 + X_3 < 1) = \frac{1}{6}$ .

Przypadek ogólny sprowadza się do znalezienia w przestrzeni  $k$ -wymiarowej objętości bryły ograniczonej warunkami  $x_1, \dots, x_k \in [0, 1]$  oraz  $x_1 + \dots + x_k < 1$ .



Objętość tej bryły jest równa  $\frac{1}{k!}$ . Trudno o formalne uzasadnienie tego wzoru bez obliczenia jakiejś całki. Przybliżmy go jednak, analizując  $k = 3$ . Objętość ostrosłupa to pole podstawy (pole trójkąta) razy trzecia część wysokości. Jeśli więc wszystkie boki (ramiona przy kącie prostym i wysokość figury) są równe 1, to jego objętość jest równa  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3!}$ . Objętość czterowymiarowego ostrosłupa to „pole podstawy” (czyli objętość trójwymiarowego ostrosłupa) razy czwarta część wysokości. Jeśli ponownie wszystkie odpowiednie boki mają długość 1 (a tak jest w sympleksach), to objętość czterowymiarowego sympleksu to  $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3!} = \frac{1}{4!}$ . W przestrzeni  $k$ -wymiarowej objętość odpowiedniego  $k$ -wymiarowego ostrosłupa to „pole podstawy” będącej ostrosłupem  $(k - 1)$ -wymiarowym razy  $k$ -ta część wysokości, czyli  $\frac{1}{(k-1)!} \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k!}$ .

Został jeszcze trywialny przypadek  $k = 0$ , czyli obliczenie  $P(N > 0)$ . Oczywiście jest to 1.

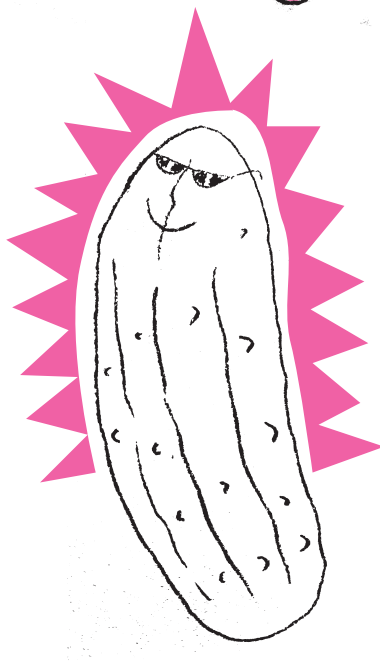
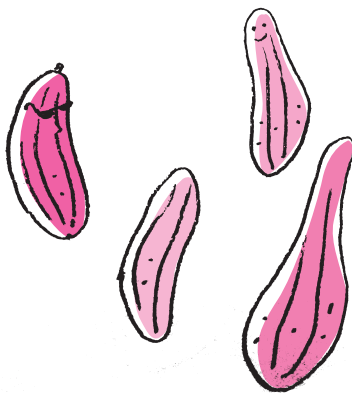
Mając już wszystkie elementy układanki, możemy dokończyć nasze obliczenia:

$$\mathbb{E} N = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Tym samym udało nam się obliczyć wartość dokładną, którą wcześniej odgadliśmy eksperymentalnie.

Na koniec przedstawmy jeszcze pewien stowarzyszony problem. Losujemy liczbę z przedziału  $[0, 1]$  i kończymy, gdy nowo wylosowana liczba jest mniejsza od poprzedniej. Ile średnio liczb wylosujemy? Odpowiedź na to pytanie to również liczba  $e$ . Rozwiązanie (podobne do powyższego) zostawiamy dla Czytelnika Zainteresowanego.

To już ostatnia część naszego krótkiego cyklu. Zaprezentowane zostały niektóre z ciekawszych wystąpień liczby  $e$  w matematyce. Czytelnika Zainteresowanego Tematem zachęcamy do poszukiwania innych doświadczeń lub zagadnień, które w niezwykle sposób ujawniają liczbę  $e$ .

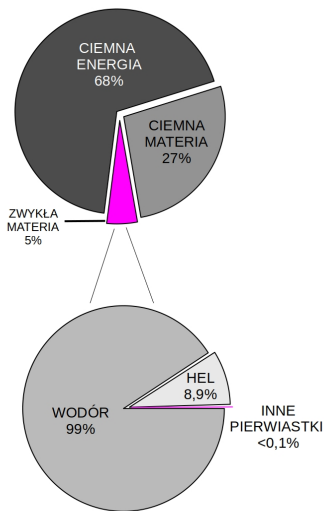


## De Rerum Metallica

Francesco PISTIS

Według Standardowego Modelu Kosmologicznego zwykła materia (wszystkie pierwiastki chemiczne i mniejsze cząstki subatomowe) stanowi jedynie 5% składu całego Wszechświata. Z tego ciężkich pierwiastków, z którymi mamy ciągły kontakt na Ziemi, jest znikomo mało, bo jedynie 0,1% (z tych 5%). Obficie występują tylko hel i wodór, które łącznie stanowią 99,9% zwykłej materii (procentowy rozkład składników Wszechświata pokazano na rysunku na następnej stronie). Dlatego Tablica Mendelejewa astronomów jest zdecydowanie mniej rozbudowana niż ta, którą znamy z zajęć chemii. Z tego też względu wszystkie pierwiastki, nie będące helem ani wodorem, astronomowie nazywają metalami. Ale jakie znaczenie mają te metale we Wszechświecie?

Zacznijmy od bardzo odległej historii Wszechświata. Podczas okresu ochładzania bezpośrednio po Wielkim Wybuchu najcięższym stabilnym pierwiastkiem, który mógł powstać, był lit. Cięższe pierwiastki wymagały dostarczenia znacznie więcej energii, której niestety jeszcze nie było. Taka ilość energii została wytworzona dopiero w późniejszym okresie w jądrach gwiazd, gdzie wyprodukowane zostały wszystkie pierwiastki, do żelaza włącznie. Jest to dobry



Procentowa zawartość pierwiastków we Wszechświecie

Tempo powstawania gwiazd w galaktyce Drogi Mlecznej wynosi około 3 masy Słońca/rok. Jest to galaktyka w miarę standardowa. Jednak w galaktykach bardzo intensywnie gwiazdotwórczych tempo powstawania gwiazd może być ponad 30 razy większe.

Za lokalny Wszechświat uznajemy obszar znajdujący się w odległości około 1–3 miliardów lat świetlnych od Ziemi.

Widma gwiazd i galaktyk, ogólnie rzecz ujmując, mówią nam o składzie chemicznym obserwowanego obiektu. A o tym, czym dokładnie jest widmo, można przeczytać w numerze  $\Delta_{19}^{04}$ .

moment, aby zapytać, co z pierwiastkami cięższymi od żelaza? Przecież te też istnieją w obserwowanym przez nas Wszechświecie (a w szczególności na Ziemi). Ich obecność związana jest bezpośrednio z ostatnimi etapami ewolucji gwiazd i dlatego zawartość metali we Wszechświecie jest ściśle połączona z dojrzewaniem i śmiercią gwiazd, a w szerszym kontekście z ewolucją galaktyk, w których te gwiazdy powstają.

Astronomowie już jakiś czas temu zaobserwowali, że każda galaktyka (również Droga Mleczna) zanurzona jest w obłoku gorącego gazu tworzącego swego rodzaju halo wokół niej. Gaz ten odgrywa kluczową rolę w ewolucji galaktyk. Gdy opada na dysk galaktyki (często proces ten nazywamy napływem, ang. *inflow*), stanowi paliwo do budowy nowych gwiazd. Mechanizm ten powoduje zwiększenie ilości gwiazd rodzących się w danej galaktyce. Z drugiej strony, najbardziej masywne gwiazdy dostarczają do halo gazowego nowych, w tym także cięższych, pierwiastków poprzez tzw. proces wiatrów gwiazdowych, ale również podczas wybuchu supernowych. Zwłaszcza te ostatnie dostarczają do obszaru międzygwiazdowego, a później również międzygalaktycznego, wyprodukowane w gwieździe ciężkie pierwiastki (ang. *outflow*).

Z tego punktu widzenia skład chemiczny gazu otaczającego galaktykę, a w szczególności jego metaliczność (czyli zawartość pierwiastków cięższych od helu względem ich zawartości w naszym Słońcu), mieści w sobie całą historię ewolucji danej galaktyki i tworzących ją gwiazd. Metaliczność galaktyki jest ściśle związana z jej masą gwiazdową (czyli masą wszystkich zawartych w niej gwiazd) i tempem, w jakim tworzone są w niej nowe gwiazdy. Astronomowie zauważyli ścisłą relację, jaką muszą spełniać te parametry: metaliczność galaktyk, całkowita masa gwiazdowa i tempo tworzenia się gwiazd. Relację tę można przedstawić jako powierzchnię w trójwymiarowej przestrzeni rozważanych parametrów. Punkty na tej powierzchni odpowiadają wartościom parametrów charakteryzujących znane nam normalne galaktyki („nienormalne” galaktyki to dla przykładu takie, w których w ciągu roku przybywa 100 Słońc bądź nie przybywa ich wcale). Ze względu na brak dowodów obserwacyjnych na zmiany w czasie tak utworzonej powierzchni związek pomiędzy metalicznością, masą gwiazdową i tempem tworzenia się gwiazd w galaktyce uważa się za fundamentalny. Relacja ta może być wykorzystana do rozróżnienia typów galaktyk, podążających różnymi ścieżkami ewolucji, lub do badania oddziaływania galaktyki z jej otoczeniem czy też bezpośrednio z inną pobliską galaktyką.

Ta fundamentalna relacja, czy też kształt tej relacji w trójwymiarowej przestrzeni parametrów, została bardzo dokładnie zbadana w naszym lokalnym Wszechświecie za pomocą obserwacji wykonanych przez Sloan Digital Sky Survey (SDSS), 2,5-metrowy teleskop optyczny znajdujący się w Apache Point Observatory w Nowym Meksyku, w Stanach Zjednoczonych. Każde wykonane przez teleskop SDSS zdjęcie obejmuje 1,5 stopnia nieba. W ciągu 20 lat obserwacji wykonano wielobarwne obrazy jednej trzeciej nieba oraz zebrano widma dla ponad trzech milionów obiektów astronomicznych. Problemem w rozszerzeniu tych badań na starsze, a co za tym idzie odleglejsze galaktyki, jest liczba galaktyk, które potrafimy obserwować, ponieważ spada ona drastycznie wraz z odległością od Ziemi.

Problem ten został częściowo rozwiązany dzięki obserwacjom wykonanym przez Visible Multi-Object Spectrograph (VIMOS) w ramach projektu VIMOS Public Extragalactic Redshift Survey (VIPERS) na 8-metrowym teleskopie Very Large Telescope w Chile. Obserwował on obszar prawie 24 stopni kwadratowych (nadal znacznie mniej niż SDSS) i zmierzył widma około 90 000 galaktyk odległych od nas o około 7 mld lat świetlnych. VIPERS oglądał Wszechświat w momencie, gdy był dwa razy młodszy niż dziś. Co ciekawe, te badania wskazują na zachowanie fundamentalnej relacji pomiędzy metalicznością – masą gwiazdową – tempem powstawania gwiazd – dowodząc jej... fundamentalności.

## Co słyhać u ubogich krewnych?

Mariusz SKAŁBA\*

Liczby pierwsze? Wiadomo: ich królestwo jest z tego świata, ale nie potrzebują Windsoru! Wszecławiatowa gawieź matematyczna krząta się wokół nich od zawsze – ze spektakularnie umiarkowanym skutkiem. Ale inne liczby też zasługują na uwagę, np. sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych. O nich jest ten artykuł.

Niech  $S$  oznacza zbiór takich sum:

$$S = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, \dots\}.$$

Mamy bowiem:

$$0 = 0^2 + 0^2, 1 = 1^2 + 0^2, 2 = 1^2 + 1^2, 4 = 2^2 + 0^2, 5 = 2^2 + 1^2, 8 = 2^2 + 2^2, 9 = 3^2 + 0^2, \dots$$

Z drugiej strony: żaden wyraz ciągu arytmetycznego  $3, 7, 11, 15, 19, \dots$  nie należy do  $S$ . To jest pierwsze ważne (mimo swej prostoty) twierdzenie dotyczące  $S$ . Oto dowód. Punktem wyjścia jest obserwacja, że dla dowolnej liczby całkowitej  $x$  liczba  $x^2$  daje resztę 0 albo 1 przy dzieleniu przez 4. Rzeczywiście liczba  $x$  jest zawsze jednej z postaci  $x = 2k$  albo  $x = 2k + 1$ , gdzie  $k$  jest liczbą całkowitą. W żargonie ujmujemy to tak: *każda liczba jest albo parzysta albo nieparzysta*. W pierwszym przypadku  $x^2 = 4k^2$ , czyli  $x^2$  daje resztę 0 z dzielenia przez 4 (a więc dzieli się przez 4). W drugim przypadku:

$$x^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1,$$

czyli  $x^2$  daje resztę 1 z dzielenia przez 4. Po tym przygotowaniu widać, że suma  $x^2 + y^2$  w dzieleniu przez 4 może dawać tylko jedną z reszt:  $0 + 0 = 0$ ,  $0 + 1 = 1$ ,  $1 + 1 = 2$ . Zatem  $x^2 + y^2$  nigdy nie może być postaci  $4k + 3$ . I to kończy dowód naszego pierwszego twierdzenia o zbiorze  $S$ .

Jak powszechnie wiadomo (przynajmniej od czasów Euklidesa), liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Ale nie wiadomo do dziś, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych  $p$  takich, że liczba  $p + 2$  też jest pierwsza – takie pary liczb pierwszych nazywamy *bliźniakami*. Oto początkowe bliźniaki: 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19, ... Ich odpowiednikiem w rodzinie  $S$  są *trojaczki*: tworzą je liczby  $n, n + 1, n + 2$ , jeśli każda z nich należy do  $S$ . Oto najmniejsze takie trójki:

$$8, 9, 10; 16, 17, 18; 72, 73, 74; 80, 81, 82; \dots$$

Z naszego pierwszego twierdzenia wynika, że na pewno nie ma czworaczek, ale odpowiednikiem pytania dotyczącego bliźniaków jest pytanie następujące: *Czy istnieje nieskończenie wiele trojaczek?* Chyba od zawsze wiadomo, że tak. Oto proste uzasadnienie. Załóżmy, że  $n, n + 1, n + 2$  są trojczkami. Ponieważ

$$n = a^2 + b^2, n + 2 = c^2 + d^2,$$

więc

$$n(n + 2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Zatem  $n^2 + 2n \in S$ , czyli mamy następujące „większe” trojaczki:  $n^2 + 2n, (n + 1)^2 + 0^2, (n + 1)^2 + 1^2$ .

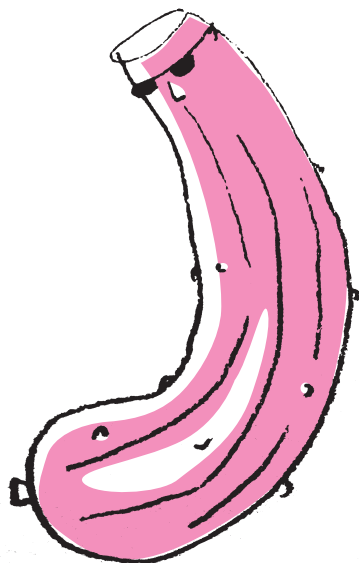
To może jeszcze jakaś uboga wersja hipotezy Goldbacha? Przypomnijmy, że zgodnie z królewską etykietą pytamy:

*Czy każda liczba parzysta  $\geq 4$  jest sumą dwóch liczb pierwszych?*

Do dziś nie jest znana odpowiedź na to pytanie, chociaż sprawdzono, że dla każdej liczby parzystej  $n \leq 4 \cdot 10^{18}$  istnieją takie liczby pierwsze  $p, q$  (oczywiście nieparzyste!), że  $n = p + q$ . Wersję ubogą tej słynnej hipotezy można by wysłowić tak:

*Czy dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  istnieją  $r, s \in S$  takie, że  $n = r + s$ ?*

Pytamy zatem, czy dla każdego  $n$  istnieją takie liczby całkowite  $a, b, c, d$ , że  $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ ? Każdy miłośnik matematyki wie, że pozytywnej odpowiedzi



### Rozwiązanie zadania F 1047.

Przyjmijmy, że ładunek  $Q$  jest rozłożony równomiernie na powierzchni Ziemi, wówczas wartość pola elektrycznego w każdym punkcie tej powierzchni wynosi:

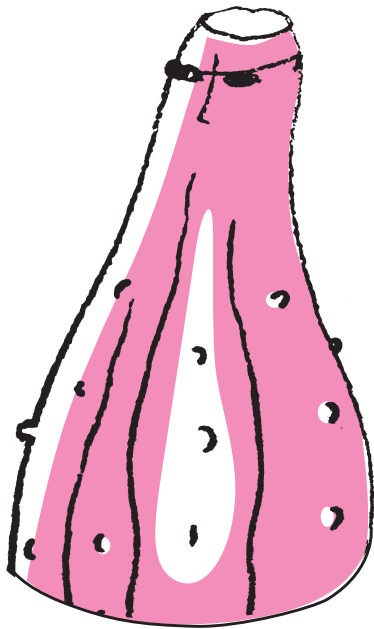
$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2},$$

a więc  $Q = 4\pi\epsilon_0 R^2 E$ . Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy  $Q \approx 4,52 \cdot 10^5$  C. Energia zgromadzona w polu elektrycznym ładunku  $Q$  rozmieszczonego równomiernie na powierzchni kuli o promieniu  $R$  wynosi:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} = 2\pi\epsilon_0 R^3 E^2.$$

Po podstawieniu danych liczbowych  $\mathcal{E} \approx 1,44 \cdot 10^{14}$  J, a więc około 4,6 MWlat. Źródłami ładunku są promieniowanie kosmiczne i rozpady pierwiastków promieniotwórczych (np.  $^{222}\text{Ra}$ ).

Uwaga: Dla oceny wartości ładunku realistyczne założenie, że jest on rozmieszczony na powierzchni Ziemi, nie jest istotne – tę samą wartość pola  $E$  otrzymalibyśmy, gdyby ładunek  $Q$  był rozmieszczony wewnątrz Ziemi; dla ładunku równomiernie rozmieszczonego wewnątrz Ziemi otrzymalibyśmy energię równą  $3/5$  wartości obliczonej dla takiego samego ładunku zgromadzonego na jej powierzchni.



na to pytanie (razem z dowodem) udzielił jako pierwszy Joseph Louis Lagrange w 1770 roku.

No cóż... rodziny się nie wybiera, ale na koniec przyjrzyjmy się rozłożystości drzew genealogicznych. Dla  $x > 0$  oznaczmy przez  $\pi(x)$  liczbę liczb pierwszych  $p$  spełniających nierówność  $p \leq x$ ; na przykład  $\pi(15) = 6$ , gdyż wszystkie liczby pierwsze  $p$  spełniające  $p \leq 15$  to: 2, 3, 5, 7, 11, 13. Analogicznie niech  $S(x)$  oznacza liczbę liczb  $s \in S$  spełniających  $s \leq x$ ; mamy przykładowo  $S(20) = 13$ . W roku 1896 Jacques Salomon Hadamard i niezależnie Charles Jean de Vallée Poussin udowodnili, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi(x)}{x / \log x} = 1.$$

Jest to słynne *twierdzenie o liczbach pierwszych*. Natomiast w roku 1908 Edmund Landau wykazał odpowiednik dla zbioru  $S$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{S(x)}{cx / \sqrt{\log x}} = 1,$$

gdzie  $c \approx 0,764224$  to tzw. stała Landaua–Ramanujana. Oba dowody są ważne, trudne i ciekawe. Tak więc w przedziale od 0 do  $x$  pospolitych sum dwóch kwadratów jest około  $\sqrt{\log x}$  razy więcej niż najszlachetniej urodzonych liczb pierwszych. Zdradźmy na koniec, że statystycznie połowa liczb pierwszych zadaje się z plebsem, a mówi o tym twierdzenie Girarda–Fermata–Eulera, któremu nie można odmówić naturalnej urody:

*Każda liczba pierwsza  $p$  postaci  $4k + 1$  należy do  $S$ :*

$$\exists x, y \in \mathbb{N}, p = x^2 + y^2.$$

Jedynaczka 2 też się zadaje:  $2 = 1^2 + 1^2$ . Ale pozostałe liczby pierwsze, czyli te postaci  $4k + 3$ , trzymają fason, co pokazaliśmy na samym początku.

## Laserowa reologia plamkowa

### Odwzorowanie mikromechanicznych właściwości tkanki w celu skuteczniejszej diagnostyki chorób

#### *Kwasi NYANDEY\**

Aparatura medyczna jest niezbędnym elementem wspierającym pracowników służby zdrowia – lekarzy, pielęgniarki, analityków laboratoryjnych – w diagnozowaniu i leczeniu pacjentów. Postawienie właściwej diagnozy jest nierzadko trudnym zadaniem, ponieważ wiele objawów chorobowych nie jest jednoznacznych. Na przykład ból szyi może pojawiać się w wielu, niezwiązanych ze sobą, schorzeniach. Dlatego aby stworzyć skuteczną metodę diagnostyczną, najlepiej wykorzystać kilka sposobów oceny funkcji narządów i właściwości tkanek. Stąd złożoność współczesnych metod diagnostyki medycznej i stosowanej aparatury.

**Techniki optyczne w diagnostyce.** We współczesnej medycynie istnieje szereg metod diagnostycznych (zarówno prostych, jak i złożonych) wykorzystujących techniki optyczne, czy ogólniej – propagację fal elektromagnetycznych. Najprostsze z nich obejmują prześwietlanie tkanek zawierających naczynia krwionośne i, poprzez obserwację światła rozproszonego wstecz lub transmitowanego, umożliwiają pomiar tętna i stopnia utlenienia krwi. W czasie pandemii COVID-19 wiele osób spotkało się już z tak właśnie działającym pulsoksymetrem. Inne, bardziej złożone systemy obrazowania do celów medycznych obejmują na przykład analizę ekstynkcji (absorpcji i rozpraszania) promieniowania rentgenowskiego w tkankach – aparaty do prześwietleń i tomografy komputerowe, czy mniej znaną koherencyjną tomografię optyczną (OCT). Blisko spokrewniona z OCT jest koherencyjna elastografia optyczna (OCE), w której zmiany w tkance spowodowane zewnętrznym obciążeniem są odwzorowywane w optyczną odpowiedź tkanki.

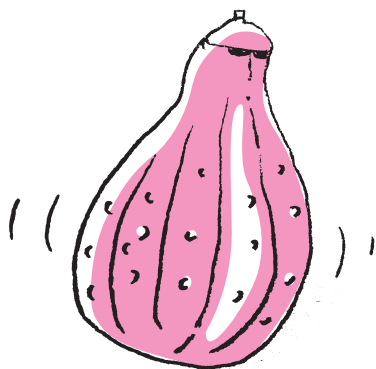
\* Doktorant,  
Instytut Fizyki Polskiej Akademii Nauk  
Pomoc w tłumaczeniu tekstu: Daniel  
Jakubczuk



Typowy wzór interferencyjny LSR.  
Ilustracja zaczerpnięta z [2]



Niestety polska terminologia nie jest w tej dziedzinie okrzepnięta i rozbudowana. W potocznym żargonie naukowym udomowiono angielskie „speckles” jako „spekle”.



Szczegółowe omówienie mechaniki tkanek i komórek, a także optycznego ich obrazowania można znaleźć w pracy [1] oraz w znajdujących się w niej odnośnikach. Warto tu jednak wspomnieć, że pod wpływem różnych naprężeń tkanka może wykazywać zarówno właściwości ciała stałego, jak i cieczy, co określa się mianem lepkosprężystości.

**Laserowa reologia plamkowa (LSR).** Światło laserowe rozpraszane na chropowatych powierzchniach bądź przechodzące przez niejednorodnie optycznie obiekty tworzy w przestrzeni swoisty wzór interferencyjny – ziarniste jasne plamki (ang. *speckles* – patrz obrazek). Obserwator postrzega je jako emanujące z optycznie niejednorodnej czy chropowatej powierzchni. Podstawowym spostrzeżeniem prowadzącym do zastosowań interferogramów plamkowych jest związek pomiędzy deformacją obiektu rozpraszającego światło a położeniem i intensywnością plamek we wzorze interferencyjnym [3, 4].

Na przestrzeni lat stworzono szereg zastosowań interferometrii plamkowej. Przegląd zastosowań klinicznych plamkowego (speklowego) obrazowania kontrastowego można znaleźć w [5]. Na przykład maleńki endoskop wykorzystujący spekle laserowe okazuje się wszechstronnym narzędziem, które umożliwia nie tylko dostarczanie światła podczas inspekcji trudno dostępnych jam ciała [6], ale także służy do oceny właściwości mechanicznych tkanek i organów w takich miejscach. W czasie jego pracy rejestrowane są sekwencje interferogramów plamkowych (klatki filmu), które są następnie przetwarzane przez odpowiednie oprogramowanie komputerowe. W zależności od pożądanej właściwości tkanki stosowane są odpowiednie metody przetwarzania obrazów. Na przykład pomiar korelacji czasowej (lub przestrzennej) pomiędzy wybranym interferogramem (zarejestrowaną klatką) a kolejnymi dostarcza informacji o zmianach wynikających z ruchu tkanki. Z kolei poprzez odpowiednie numeryczne operacje na jasności interferogramów (uśrednianie przestrzenne) można wyznaczyć współczynnik sprężystości objętościowej, czyli uzyskać informację o sztywności tkanki. I tak, gdy dwa kolejne interferogramy (klatki filmu) odpowiadające czasowej ewolucji badanego procesu biologicznego) o jasnościach pikseli  $I(t_0)$  oraz  $I(t_0 + \Delta t)$  są mnożone i uśredniane po całym interferogramie (obrazie), otrzymujemy  $\langle I(t_0)I(t_0 + \Delta t) \rangle$ . Stosunek takiej średniej do kwadratu średniej tylko po pierwszej klatce  $\langle I(t_0) \rangle^2$  nazywany jest autokorelacją czasową:

$$g(t) = \frac{\langle I(t_0)I(t_0 + \Delta t) \rangle}{\langle I(t_0) \rangle^2}.$$

Pierwsze zastosowanie spekli laserowych w reologii (LSR) zostało opisane przez grupę z Harvard Medical School, Massachusetts General Hospital [7]. Następnie opracowano tam wielofunkcyjny czujnik do badań laboratoryjnych oparty na LSR (o nazwie iCoagLab), który mierzy czas i szybkość krzepnięcia aktywowanego, a także parametry innych procesów charakteryzujących krwawienie i krzepnięcie. W porównaniu z konwencjonalnymi testami krzepnięcia technika ta wydaje się obiecująca. Konwencjonalne testy mają dłuższy czas przetwarzania i raportowania, a ich wyniki opierają się na przetwarzaniu statycznych obrazów (zdjęć) dynamicznych procesów koagulacji. Tymczasem, jak donoszą badacze z Harvardu, iCoagLab pozwala na monitorowanie dynamiki koagulacji w mikroskali w czasie rzeczywistym!

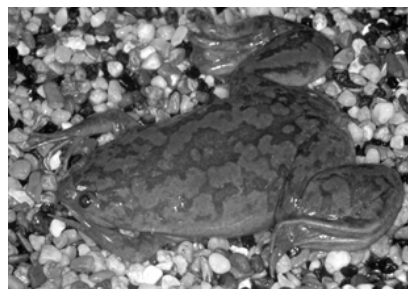
Innym zastosowaniem spekli laserowych, o którym warto tu wspomnieć, jest mikroskopia LSR. To bardzo wszechstronne narzędzie diagnostyczne. Przy jej pomocy można na przykład badać parametry biomechaniczne tkanek i organów podczas ich formowania i rozwoju w procesie embriogenezy, co umożliwia lekarzom odróżnienie rozwoju prawidłowego od chorobowego.

Dostępność systemów diagnostyki medycznej jest kluczem do poprawy jakości i efektywności leczenia. Prostota, przenośność, krótki czas od badania do diagnozy, niezawodność i dokładność są cechami systemów szczególnie pożądanymi przez odbiorców usług medycznych. Dlatego każda nowa technologia jest warta uwagi.

#### Literatura

- [1] Zeinab H, Seemantini K. N., J. Biomed. Opt. 25(5), 050801 (2020).
- [2] Dainty, J. C. *Laser speckle and related phenomena* (Vol. 9). Berlin Heidelberg: Springer Science & Business Media (2013).
- [3] Leendertz, J., Journal of Physics E: Scientific Instruments, 3(3), 214, (1970).
- [4] Archbold, E., Burch, J., Ennos, A. (1970). *Optica Acta: International Journal of Optics*, 17(12), 883-898.
- [5] Wido Heeman, Wiendelt Steenberg, Gooitzen M. van Dam, E. Christiaan Boerma, J Biomed Opt. 2019 Aug; 24(8): 080901.
- [6] Kemper, B., Kandulla, J., Dirksen, D., von Bally, G. (2003). *Optics communications*, 217(1), 151-160.
- [7] <https://nadkarnilab.mgh.harvard.edu/current-research/laser-speckle-microrheology/>.

John Gurdon kończąc szkołę średnią w Eton, osiągnął najgorsze stopnie z całej grupy 250 absolwentów. Jego nauczyciel napisał wówczas: „Wydaje mi się, że chce on zostać naukowcem, co, analizując jego oceny, jest po prostu śmieszne”. Gurdon wraz z Shin'ją Yamanaką został laureatem Nagrody Nobla w roku 2012, a powyższa ocena, oprawiona w ramki, wisiała w jego gabinecie wraz z komentarzem zainteresowanego: „Kiedy nie udaje ci się doświadczenie, co się często zdarza, warto, żebyś pomyślał, że może twój nauczyciel miał rację”.



*Xenopus laevis* (fot.: Wikipedia)

## Pewna żaba i noblista

W 1957 roku Francis Crick, noblista, autor hipotezy o strukturze DNA, sformułował centralny dogmat biologii molekularnej o kierunku przepływu informacji genetycznej. Przekaz informacji genetycznej – ekspresja genów – przebiega od replikacji DNA, poprzez transkrypcję (RNA) i translację do końcowego produktu, białka. Etapy te badano i mierzono osobno w probówkach, *in vitro*, używając wyciągów komórkowych z bakterii i wirusów (prokariotów). Zgromadzone wyniki doświadczeń sugerowały, że w organizmach wielokomórkowych (eukariotach) procesy ekspresji genów mogą być bardziej złożone. I wtedy to odkryto szczególną komórkę – oocyt i produkt dojrzewania oocytu, czyli komórkę jajową afrykańskiej żaby szponiastej, *Xenopus laevis*.

Oocyt i jajo *Xenopus* są w tym typie komórek gigantami. Mają średnicę 1,3 mm, a więc można je zobaczyć i manipulować nimi pod lupą. Do oocytu przenikają różne cząsteczki, ale gdy oocyt przekształca się w niezapłodnione jajo, staje się dla nich nieprzenikalnym. W oocycie trwa intensywna synteza RNA i białek, synteza DNA, czyli replikacja, rozpoczyna się po zapłodnieniu.

Młody brytyjski badacz John Gurdon przeszczepił w końcu lat 60. jądro zróżnicowanej komórki zarodka żaby do innej, uprzednio pozbawionej jądra, komórki jajowej. Urodziła się dojrzała żaba i było to pierwsze udane klonowanie kręgowca. Długo nie udawało się tego doświadczenia powtórzyć dla innych kręgowców, aż do narodzin w 1996 roku owcy Dolly. Chodzi o coś więcej niż o sensacyjną fotkę białej owcy: był to dowód, że w zróżnicowanych komórkach ciała ssaka (i płaza) informacja genetyczna jest taka sama, jak w zapłodnionej komórce jajowej. W tej jednej jest już wszystko, co da początek kolejnemu pokoleniu! Ta wiedza pomogła także badaczom komórek macierzystych, na które tak bardzo liczą współcześni lekarze molekularni.

Rozwijający się żabi zarodek (aż do stadium kijanki) nie potrzebuje żadnych zewnętrznych źródeł pokarmu – wystarczy mu to, co powstało w oocycie i zapłodnionej komórce jajowej. W komórkach jajowych *Xenopus* nieoczekiwanie znaleziono dużą ilość DNA, który zidentyfikowano jako pochodzący z wielkiej liczby komórkowych organelli, mitochondriów. W oocytach odkryto także znaczącą ilość (10 tys. razy więcej niż w standardowej komórce) trzech różnych polimeraz RNA, enzymów koniecznych przy transkrypcji – syntezie RNA na matrycy DNA. W dojrzałym oocycie gromadzi się sto tysięcy razy więcej organelli syntetyzujących białko (rybosomów), niż jest ich w typowej komórce ciała, syntetyzowane są też dwa rybosomalne RNA konieczne przy syntezie białek.

W 1971 roku Gurdon wstrzyknął mRNA globiny krwi do cytoplazmy oocytu *Xenopus* i wyizolował z oocytu – globinę! Syntezy obcych białek w oocytach, na matrycach różnych mRNA, powtórzono wielokrotnie. Najbardziej znanym sukcesem w tej dziedzinie było opracowanie procedur, które doprowadziły do uzyskania w 1982 roku ludzkiego genu interferonu, białka atrakcyjnego dla medycyny, wykazującego aktywność przeciwwirusową i przeciwnowotworową (C. Weissmann i wsp.). Symbolicznym podsumowaniem możliwości wykorzystania oocytów *Xenopus* do badań ekspresji genów było wstrzyknięcie DNA zwierzęcego wirusa SV40 do oocytów i znalezienie w nich mRNA i białek SV40.

Odtąd żabie oocyty na wiele lat stały się niezwykle cennym środowiskiem *in vivo* do obszernych i różnorodnych badań procesów embriogenezy, skutków mutacji, procesów przemieszczania się białek w komórce, molekularnych sygnałów przechodzenia przez błony i komórkowej ich lokalizacji. Neurofizjolodzy wykorzystali system oocytów do badań receptorów neuronów i białek budujących tzw. kanały jonowe.

Nazwałabym oocyt żyjącą probówką, umożliwiającą badania ekspresji genów, tuż przed erą inżynierii genetycznej.

Magdalena FIKUS (magda.fikus@gmail.com)

# Problemy z równaniami hydrodynamiki

Grzegorz ŁUKASZEWICZ\*, Krzysztof A. MIZERSKI\*\*

\*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

\*\*Instytut Geofizyki, Polska Akademia Nauk



Leonard Euler (1707–1783)



Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836)



Sir George Gabriel Stokes (1819–1903)

Trzeba przyznać, że równie użyteczne zagadnienia jak ruch płynu i pokrewne nauki zawsze były przedmiotem rozważań. Jednakże do dnia dzisiejszego ani nasza znajomość czystej matematyki, ani nasza znajomość matematycznych zasad przyrody nie znalazły do nich udanego podejścia.

– Daniel Bernoulli, 1734 r.

## 1. Równania hydrodynamiki. Postawienie problemu

Znakomitym wprowadzeniem do równań hydrodynamiki jest artykuł Witolda Sadowskiego *Równanie Naviera–Stokesa*  $\Delta_{14}^{12}$ , jej historia jest opisana w [Darrigol], a wybrane problemy są poruszone w dwóch innych tekstach Sadowskiego: *Niezbędna persona non grata*  $\Delta_{13}^7$  i *Dowody i obliczenia*  $\Delta_{17}^1$ .

Pierwsze ogólne równania hydrodynamiki sformułował Leonard Euler. Oto, co powiedział o tym Joseph-Louis Lagrange:

*Eulerowi zawdzięczamy pierwsze ogólne wzory na ruch płynu [...] przedstawione w prostej i jasnej notacji równań cząstkowych [...] Dzięki temu odkryciu cała mechanika płynów została zredukowana do jednego punktu analizy, a jeśli użyte równania byłyby całkowalne, można byłoby dokładnie określić, we wszystkich przypadkach, ruch płynu poruszanego dowolnymi siłami [...]*

Bardzo szybko okazało się jednak, że równania te zawodzą już w najprostszych sytuacjach, po prostu ich rozwiązania nie dają przewidywań zgodnych z doświadczeniem. Jednym słowem, teoria na nich oparta prowadzi do paradoksów [Birkhoff]. Spowodowało to podział środowiska na hydraulików, którzy zajmowali się zastosowaniami i posługiwali się „praktycznymi lokalnymi modelami”, i hydrodynamików, którzy zajmowali się ogólnymi równaniami dla nich samych. Ten podział pozostał zresztą w dużej mierze do dziś, ze szkodą dla zastosowań i dla nauki (G. Łukasiewicz, *Hydrodynamika a hydraulika*  $\Delta_{17}^8$ ). W artykule przybliżymy ten problem nieco dokładniej.

Równania Naviera–Stokesa dla płynu nieściśliwego (w tym również o stałej gęstości  $\rho$ ) opisują ewolucję prędkości  $\vec{u}$  tego płynu – wyrażone w formie wektorowej mają następującą postać:

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x}, t)}{\partial t} + (\vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \nabla) \vec{u}(\vec{x}, t) = \nu \Delta \vec{u}(\vec{x}, t) - \frac{1}{\rho} \nabla p(\vec{x}, t) + \vec{f}(\vec{x}, t), \quad \text{div } \vec{u}(\vec{x}, t) = 0.$$

Pierwsze równanie przedstawia znaną ze szkoły drugą zasadę dynamiki Newtona,  $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$ , w której całkowita siła działająca na elementy płynu składa się z sił zewnętrznych  $\vec{f}$ , tarć lepkich pomiędzy elementami płynu  $\nu \Delta \vec{u}$  oraz gradientów ciśnienia w płynie. Drugie to prawo zachowania masy dla ośrodka ciągłego o takich własnościach, które pozwalają założyć, iż z dobrym przybliżeniem dowolna wyróżniona objętość ośrodka nie zmienia masy podczas swojej ewolucji w czasie, choć może oczywiście zmieniać kształt.

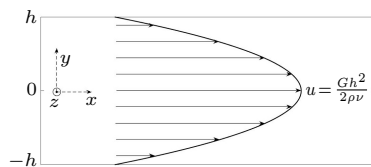
Biorąc pod uwagę ogromną różnorodność zachowania się płynu nieściśliwego, jaką znamy z doświadczenia, a z drugiej strony prostotę założeń będących fundamentem powyższych równań, narzucają się podstawowe pytania: *Co tak naprawdę powyższe równania mają wspólnego ze zjawiskami przepływów płynów, jakie znamy z doświadczenia i jakie występują w przyrodzie? Czy ich rozwiązania dają przewidywania zgodne z doświadczeniem i w jakim zakresie?*

Na te pytania nie ma na razie jednej prostej odpowiedzi. Równania hydrodynamiki są na to zbyt złożone. Wspomniany wyżej rozdźwięk między hydraulikami i hydrodynamikami wziął się stąd, że równania Eulera (czyli powyższy układ równań, ale z założeniem, że lepkość płynu  $\nu$  jest zerowa) właśnie z powodu pominięcia faktu, że realne płyny są lepkie, generują paradoksy, np. paradoks d’Alemberta mówiący o tym, że na ciało opływane płynem nielepkiem przy ruchu potencjalnym i bezwirowym nie działa żadna siła – co jest oczywiście niezgodne z doświadczeniem.

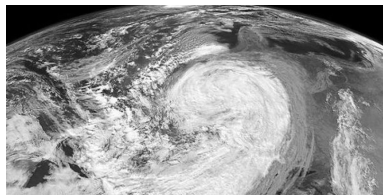


Jean Léonard Marie Poiseuille  
(1797–1869)

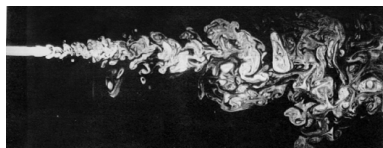
Równanie NS redukuje się do  $\rho\nu u_{yy}(y) = -G(x)$ , a założenie o jednokierunkowości przepływu daje  $G = \text{const}$ .



Profil prędkości przepływu Poiseuille'a w nieskończenie szerokim kanale



Turbulencja w ziemskiej atmosferze, zobrazowana przez układ chmur



Rozwój turbulencji w przepływie eksperymentalnym

#### Literatura

- G. Birkhoff: *Hydrodynamics. A Study in Logic, Fact and Similitude*, Princeton University Press, 1960.  
O. Darrigol: *Worlds of flows. A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005.

Równania NS uwzględniają lepkość, ale są modelem trudniejszym do badania, jak również nadal nieuwzględniającym pewnych własności realnych płynów, np. zjawisk cieplnych. Można dodać następną równanie uwzględniające zjawiska cieplne, ale za cenę otrzymania jeszcze trudniejszego układu równań, również nieuwzględniającego innych własności. Musimy zatem uznać powyższe modele jedynie za pewne przybliżenia rzeczywistego ruchu płynu.

## 2. Przepływ Poiseuille'a

Spróbujmy sprawdzić, jak równania NS „sprawdzają się” w jednym z najprostszych zagadnień.

Rozważmy ruch płynu między dwiema nieskończonymi i równoległymi do siebie płaszczyznami, odległymi od siebie o  $2h$ , tak jak na rysunku na marginesie. Załóżmy dla uproszczenia, że  $\vec{f} = 0$ . Ze względu na lepkość prędkość płynu na ściankach jest równa zero (płyn przykleja się do nich, choć założenie to jest tylko dobrym przybliżeniem rzeczywistości). Rozważany obszar dopuszcza wiele symetrii przepływu i gdyby założyć, że płyn spełnia je wszystkie, łącznie z symetrią względem czasu, to jedynym rozwiązaniem równań NS byłby bezruch, czyli zerowa prędkość i stałe ciśnienie. Nasze rozwiązanie, słusznie zwane *trywialnym*, pozostaje w zgodzie z intuicją uzyskaną na podstawie obserwacji w przyrodzie.

Założmy teraz tylko niektóre symetrie, a mianowicie, załóżmy stacjonarność ruchu, tzn. że nie zależy on od czasu, oraz niezmienniczość translacyjną prędkości w kierunku  $x$  – wzdłuż przepływu i w kierunku  $z$  – prostopadłym do przepływu i równoległym do ścianek. Możemy tak założyć ze względu na jednorodność warunków brzegowych. Mamy zatem ruch płaski, w płaszczyźnie  $(x, y)$ . Załóżmy, że jest on wymuszony spadkiem ciśnienia w kierunku  $x$ , z zadaniem gradientem ciśnienia  $-\frac{\partial p}{\partial x} = G > 0$ . Oznaczając współrzędne prędkości w kierunkach  $x$  i  $y$  przez  $u = u(y, t)$  i  $v = v(y, t)$ , odpowiednio, oraz  $p = p(x, t)$ , po podstawieniu do równań NS i biorąc pod uwagę warunki brzegowe i założenie o niezależności przepływu od czasu, otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$u = u(y) = \frac{G}{2\rho\nu}(h^2 - y^2), \quad v = v(x, y) = 0, \quad p = p(x).$$

Zauważmy, że dzięki prostej geometrii obszaru i założonym symetriom przepływu otrzymaliśmy jawne rozwiązanie równań NS. Przy tych założeniach rozwiązanie w pewien sposób odzwierciedla nasze oczekiwania. Płyn przykleja się do ścianki, jego największa prędkość jest na linii centralnej, względem której profil prędkości jest symetryczny, ponadto profil ten zależy od lepkości płynu w zgodzie z intuicją (im większa lepkość, tym mniejsza prędkość). Powyższe rozwiązanie jest przy przyjętych założeniach jednoznaczne.

Patrząc jednak z drugiej strony, rozwiązanie to zawiera szereg uproszczeń i tylko w pewien przybliżony sposób opisuje rzeczywistość. Po pierwsze, tak jak już to zostało wspomniane, nałożony warunek brzegowy polegający na przyklejaniu się płynu do ścianek nie jest idealnie spełniony w prawdziwych przepływach. Rzeczywistość jest taka, że na samych ściankach występuje pewien poślizg. Ponieważ jednak poślizg jest bardzo mały i prędkość płynu szybko narasta z oddalaniem się od ścianki, możemy uznać warunek „braku poślizgu” za dobre przybliżenie na gładkich ścianach. Po drugie, w eksperymencie oraz w naturalnych przepływach napędzanych gradientem ciśnienia zawsze występują zaburzenia. W eksperymentach staramy się je minimalizować, co się często udaje, jednak są one zawsze obecne, powodując niedokładność naszych założeń dotyczących symetrii czasowych oraz translacyjnych.

Ostatnia obserwacja prowadzi nas do ważnego problemu stabilności otrzymanego przepływu. Trzeba od razu zaznaczyć, że na samym wstępie dopuściliśmy się idealizacji zagadnienia, zakładając, że oba brzegi to *nieskończone* płaszczyzny. W rzeczywistych sytuacjach eksperymentalnych nie ma układów o wymiarach nieskończonych. Oznaczmy wymiar liniowy układu laboratoryjnego w kierunku  $z$  przez  $\ell$ . W kierunku przepływu długość układu laboratoryjnego jest również

skończona, jednak ten fakt ma najmniejsze znaczenie, ponieważ generujemy przepływ różnicą ciśnień i to jej wartość na końcach kanału decyduje o strukturze przepływu. Okazuje się, że im stosunek  $\ell$  do  $h$  jest większy, tym przepływ Poiseuille'a jest generalnie lepszym przybliżeniem rzeczywistego przepływu.

Wróćmy teraz do problemu stabilności. Stabilność układów hydrodynamicznych bada się, wprowadzając zaburzenia do przepływu i analizując ich zachowanie. Jeśli zaburzenia nikną w czasie, bądź po prostu nie rozwijają się, układ uważa się za stabilny, jeśli jednak narastają, oznacza to, że dany przepływ utracił stabilność, ponieważ zaburzenia wyprowadzają układ ze stanu określonego tym przepływem.

W zagadnieniach mechaniki płynów kluczowym parametrem fizycznym jest *liczba Reynoldsa*,  $Re = \frac{UL}{\nu}$ , opisująca stosunek wielkości sił bezwładności płynu  $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \sim \frac{U^2}{L}$  do sił tarcia pomiędzy jego warstwami  $\nu \Delta \vec{u} \sim \frac{\nu U}{L^2}$ , gdzie  $U$  oznacza natężenie przepływu (np. jego maksymalną prędkość), zaś  $L$  – charakterystyczną liniową skalę układu (np. szerokość kanału). W ten sposób mierzone jest relatywne znaczenie bezwładności względem tarć lepkich. Sytuacja jest trochę podobna do sytuacji z filiżanką postawioną na stole, na kartce papieru: gdy będziemy powoli ciągnąć za kartkę, przesuniemy ją razem z filiżankę, jeśli jednak raptownie szarpniemy, inercja filiżanki spowoduje, iż dojdzie do zerwania sił tarcia i wyciągniemy spod niej kartkę. To właśnie zwiększanie liczby Reynoldsa, a zatem intensywności przepływu (lub powiększenie jego skali przestrzennej) doprowadza do destabilizacji układów hydrodynamicznych, gdyż siły lepkie stopniowo tracą na znaczeniu. Przepływ staje się *turbulentny*, chaotyczny i niezwykle złożony, bardzo daleki od rozwiązania Poiseuille'a (choć podobny w sensie statystycznym rozkładu średnich prędkości). Znakomita większość przepływów płynów i gazów we Wszechświecie, we wszystkich jego skalach, od mikro do makro, to przepływy turbulentne.

### 3. Modele w geometrii i hydrodynamicie

Hydrodynamikę można porównać do geometrii, rozszerzonej o aksjomaty dynamiczne, dotyczące ruchu. Jest jednak istotna różnica. Wyjaśnimy to na przykładzie. Chcąc wykonać obliczenia dotyczące pola trójkątnej działki, którą chcemy kupić, dokonujemy jej pomiarów liniowych z wystarczającą dokładnością, następnie rysujemy na kartce papieru przeskalowany trójkąt i od tej pory przenosimy się w świat *geometrii euklidesowej*, nie martwiąc się, że ani sama działka nie jest idealnym trójkątem, ani nie jest takim jej odwzorowaniem na papierze. Wiemy, że nasze *idealne* obliczenia będą bardzo dokładnym przybliżeniem pola działki wystarczającym na nasze potrzeby związane z zakończeniem transakcji (pomijamy tu subtelności związane z definicją pojęcia pola dla rzeczywistego terenu [fraktale]). Geometria euklidesowa jest tu bliska świata realnego, choć wiemy, że nie zawsze tak jest w dużych skalach.

Spostrzeżenie kłopotu z tzw. piątym aksjomatem Euklidesa to prosta, ale bardzo głęboka obserwacja, wskazująca na podstawową różnicę między założeniem (matematycznym) a wiedzą, a raczej niewiedzą (dotyczącą fizyki), i potrzebę wprowadzenia pojęcia *modelu*.

A jak jest w hydrodynamicie? Hydrodynamika jest dużo trudniejsza od geometrii. Jak mogliśmy zobaczyć na rozważanym w tym artykule przykładzie prostego, zdawałoby się, przepływu, odwzorowanie realnego przepływu na teorię, której rolą jest badanie tego przepływu za pomocą wybranego *modelu*, w tym przypadku równań Naviera–Stokesa, następuje od samego początku mnóstwo kłopotów.

Podobnie jak w naturze nie istnieją idealne trójkąty, nie istnieje także przepływ Poiseuille'a, który przyjąłmy jako idealizację realnego przepływu. Badając przepływ Poiseuille'a (a każdego roku ukazują się dziesiątki artykułów temu poświęconych), nie mamy jednak a priori żadnych gwarancji, że jest on przybliżeniem realnego przepływu. Dzieje się tak, ponieważ: po pierwsze same modele są iluzoryczne (produkują paradoksy, może jest w nich zbyt mało fizyki? [Birkhoff]); po drugie przyjęte dalsze założenia upraszczające, na przykład założone symetrie czy warunki brzegowe, są nierealne; a po trzecie własności strukturalne rozważanego układu, na przykład jego nieliniowości, nie gwarantują stabilności jego rozwiązania, a tym samym ewentualnego dobrego przybliżenia realnego przepływu przez to rozwiązanie w trakcie ewolucji przepływu. Pełne równania modelowe są zbyt złożone, samo zaś zjawisko przepływu turbulentnego jest nieuchwytnie analitycznie w ramach zamkniętej teorii matematycznej (choć są oczywiście różne mniej lub bardziej wyrafinowane metody jego opisu). Rozwój hydrodynamiki wymaga bliskiej współpracy między eksperymentatorami i teoretykami. W przeciwnym wypadku ryzykujemy sytuacją opisaną w poniższej opinii laureata Nagrody Nobla – Sir Cyrila Hinshelwooda, odniesionej do paradoksu d'Alemberta w równaniu Eulera:

*Mechanika płynów została więc zdyskredytowana przez inżynierów od samego początku, co spowodowało niefortunny rozłam między dziedziną hydrauliki, obserwującej zjawiska, które nie mogły być wyjaśnione, a teoretyczną mechaniką płynów wyjaśniającą zjawiska, których nie można było zaobserwować.*

W 1932 roku na posiedzeniu British Association w Londynie Sir Horace Lamb miał jakoby powiedzieć:

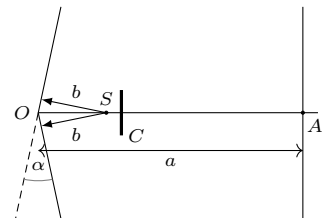
*Jestem już starym człowiekiem, a kiedy umrę i pójdę do nieba, mam nadzieję na oświecenie w dwóch sprawach. Jedną z nich jest elektrodynamika kwantowa, a drugą turbulentny ruch płynów. Co do tej pierwszej jestem raczej optymistą.*

Przytoczona na początku artykułu ocena Daniela Bernoulliego – mimo upływu ponad dwustu lat i ogromnego postępu badań hydrodynamicznych – nie straciła na swojej aktualności.

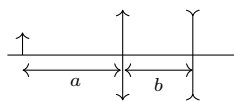
# Klub 44 F



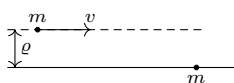
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2022



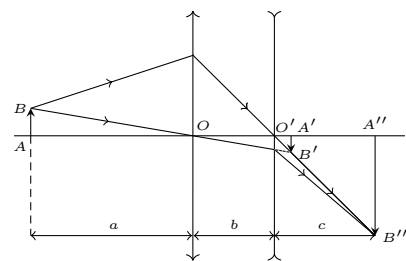
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 726 ( $WT = 2,00$ ) i 727 ( $WT = 3,27$ ) z numeru 11/2021

Konrad Kapcia	Poznań	1-42,51
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Sławomir Buć	Mystków	38,08
Ryszard Baniewicz	Wrocław	37,56
Mateusz Kapusta	Wrocław	35,59
Tomasz Wietecha	Tarnów	15-33,91
Jacek Konieczny	Poznań	31,92
Ryszard Woźniak	Kraków	31,46
Marian Łupieżowicz	Gliwice	2-28,14



## Zadania z fizyki nr 738, 739

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**738.** Stożek toczy się bez poślizgu po płaszczyźnie poziomej. Oś stożka obraca się z prędkością kątową  $\omega$  wokół osi pionowej, przechodzącej przez jego wierzchołek. Wysokość stożka wynosi  $h$ , kąt między osią stożka a jego tworzącą jest równy  $\alpha$ . Wyznaczyć prędkość liniową dowolnego punktu średnicy podstawy stożka leżącej w płaszczyźnie pionowej.

**739.** Dwa zwierciadła płaskie tworzą między sobą kąt  $(\pi - \alpha)$ , przy czym kąt  $\alpha$  jest bardzo mały (rys. 1). W równych odległościach  $b$  od obu zwierciadeł znajduje się punktowe źródło światła monochromatycznego  $S$ . Długość fali emitowanej przez źródło wynosi  $\lambda$ . W odległości  $|OA| = a$  od punktu przecięcia zwierciadeł umieszczony jest ekran. Znaleźć odległość między sąsiednimi jasnymi prążkami interferencyjnymi na ekranie. Przesłona  $C$  zapobiega bezpośredniemu padaniu światła ze źródła na ekran.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2022

Przypominamy treść zadań:

**730.** Dwie soczewki, skupiająca i rozpraszająca, tworzą układ o wspólnej osi optycznej (rys. 2). Odległość między soczewkami  $b = 4$  cm. Układ daje rzeczywisty obraz przedmiotu znajdującego się w odległości  $a = 6$  cm od soczewki skupiającej. Powiększenie obrazu  $P = 4$ . Obraz powstał na ekranie umieszczonym w odległości  $c = 4$  cm od soczewki rozpraszającej. Znaleźć ogniskowe obu soczewek.

**731.** Dwa punkty materialne o jednakowych masach  $m$  oddziałują ze sobą grawitacyjnie. W chwili początkowej jeden punkt spoczywa, drugi zbliża się do niego z nieskończoności z prędkością  $v$ , a parametr toru wynosi  $\rho$  (rys. 3). Na jaką najmniejszą odległość zbliżą się te masy?

**730.** Konstrukcję obrazu przedstawia rys. 4. Zgodnie z przyjętymi tam oznaczeniami powiększenie obrazu w pierwszej soczewce dane jest wzorem

$$(1) \quad P_1 = y_1/a = (b + |O'A'|)/a,$$

gdzie  $y_1 = f_1 a / (a - f_1)$  jest odległością obrazu  $A'B'$  od soczewki skupiającej o ogniskowej  $f_1$ . Stąd

$$(2) \quad (b + |O'A'|)/a = f_1 / (a - f_1).$$

$A'B'$  jest przedmiotem pozornym dla soczewki rozpraszającej o ogniskowej  $f_2$ , jego odległość od tej soczewki

$$(3) \quad x_2 = -|O'A'| = f_2 c / (c - f_2).$$

Powiększenie w drugiej soczewce wynosi

$$(4) \quad P_2 = c/|O'A'| = (f_2 - c)/f_2.$$

Powiększenie całkowite

$$(5) \quad P = P_1 P_2 = \frac{(b + |O'A'|)c}{a|O'A'|}.$$

Stąd

$$(6) \quad |O'A'| = bc / (Pa - c).$$

Z równań (2), (3) i (6) otrzymujemy szukane ogniskowe

$$f_1 = abP / [P(a + b) - c] = (8/3) \text{ cm}, \quad f_2 = bc / (c + b - aP) = -1 \text{ cm}.$$

**731.** Opis ruchu względnego dwóch ciał o jednakowych masach możemy zastąpić opisem ruchu jednego ciała o masie zredukowanej  $\mu = m/2$ , poruszającego się z prędkością względną w polu nieruchomego centrum siły. Siła grawitacji jest siłą zachowawczą, możemy więc porównać energie stanu początkowego i stanu w chwili największego zbliżenia:

$$(*) \quad \mu v^2 / 2 = \mu v_1^2 / 2 - Gm^2 / x,$$

gdzie  $x$  jest szukaną odległością, a  $v_1$  prędkością w chwili największego zbliżenia, prostopadłą do wektora położenia. Ponieważ siła grawitacji jest siłą centralną, możemy też skorzystać z zasady zachowania momentu pędu:

$$\mu v \rho = \mu v_1 x.$$

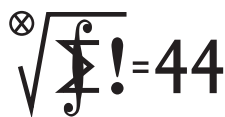
Podstawiając  $v_1 = v \rho / x$  do równania (\*), otrzymujemy równanie kwadratowe na  $x$ :

$$v^2 x^2 + 4Gm x - v^2 \rho^2 = 0.$$

Wybieramy rozwiązanie dodatnie, zatem najmniejsza odległość, na jaką zbliżą się ciała, dana jest wzorem:

$$x = -2Gm / v^2 + \sqrt{4G^2 m^2 / v^4 + \rho^2}.$$

# Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2022

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 827 ( $WT = 2,35$ ) i 828 ( $WT = 2,08$ ) z numeru 10/2021

Janusz Olszewski	Warszawa	48,10
Błażej Żmija	Kraków	44,93
Witold Bednarek	Łódź	38,44
Kacper Morawski	Warszawa	37,16
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,86
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Paweł Najman	Kraków	35,90
Marcin Kasperski	Warszawa	34,05

Dwanaście lat temu pan Janusz Olszewski przekroczył 44 p. po raz jedenasty; przypomnijmy zdanie z omówienia ligi ( $\Delta_{10}^2$ ): „Jeszcze mały wysiłek, trzy razy tyle, co dotąd, i będzie 44 x 44”. Na półmetku jest nasz lider: właśnie zaliczył przekroczenie dwudzieste drugie.

Towarzyszy mu pan Błażej Żmija – przekroczenie drugie – czekamy na wiele kolejnych!

## Zadania z matematyki nr 841, 842

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**841.** Dla zadanej liczby naturalnej  $n \geq 2$  ustalić, ile jest ciągów liczb rzeczywistych  $(a_1, \dots, a_n)$  o tej własności, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych  $(x_1, \dots, x_n)$  zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{i+j} x_j \right| = \sum_{i=1}^n |x_i|,$$

gdzie (cyklicznie)  $a_r = a_{r-n}$  dla  $r > n$ .

**842.** Na płaszczyźnie dane są trzy koła (domknięte, tj. rozważane wraz z punktami brzegu). Zakładamy, że ich część wspólna jest niepusta. Przesuwamy każde koło (niezależnie) w taki sposób, że dla każdych dwóch kół odległość ich środków po przesunięciu jest nie większa niż przed przesunięciem. Udowodnić, że przesunięte koła nadal mają niepustą część wspólną.

Zadanie 842 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2022

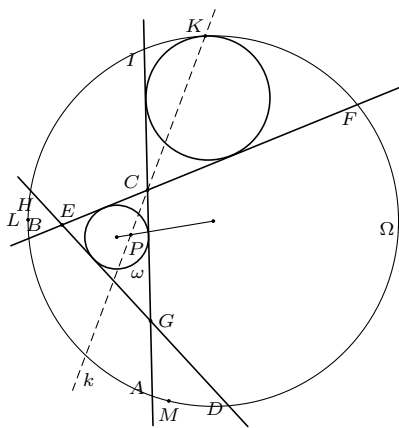
Przypominamy treść zadań:

**833.** Trzy niewspółliniowe punkty  $C, E, G$  leżą wewnątrz koła ograniczonego okręgiem  $\Omega$ , który przecina prostą  $CE$  w punktach  $B, F$ ; prostą  $CG$  – w punktach  $A, I$ ; prostą  $EG$  – w punktach  $D, H$ ; oznaczenia ustalone tak, by na każdej z tych trzech prostych cztery nazwane punkty leżały w porządku alfabetycznym. Trójkąt krzywoliniowy  $ABC$  posiada okrąg wpisany, styczny do odcinków  $AC, BC$  oraz styczny w punkcie  $K$  do łuku  $AB$  okręgu  $\Omega$ . Analogicznie, okręgi wpisane w figury  $DEF$  i  $GHI$  są styczne do okręgu  $\Omega$  odpowiednio w punktach  $L$  i  $M$ . Udowodnić, że proste  $CK, EL, GM$  mają punkt wspólny.

**834.** Podać przykład takiego nieskończonego rosnącego ciągu liczb naturalnych  $(a_1, a_2, a_3, \dots)$ , że dla każdego  $n \geq 1$  suma

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} = \frac{L_n}{M_n},$$

zapisana w postaci ułamka nieskracalnego  $L_n/M_n$ , ma w liczniku liczbę  $L_n$  podzielną przez  $n$ . Dla znalezionej figury  $(a_n)$  obliczyć sumę szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n)$  lub oszacować ją z dołu; to znaczy, wskazać dowolną liczbę  $D$ , nie przekraczającą owej sumy. Im większa wartość  $D$ , tym wyższa ocena.



**833.** Niech  $k$  będzie prostą przechodzącą przez punkty  $C$  i  $K$ . Istnieje jednokładność  $\varphi_K$  o środku  $K$  i skali dodatniej przekształcająca okrąg  $\Omega$  na okrąg wpisany w figurę  $ABC$ , o którym mowa w zadaniu; istnieje też jednokładność  $\varphi_C$  o środku  $C$  i skali ujemnej, przekształcająca ten ostatni okrąg na okrąg  $\omega$  wpisany w trójkąt  $CEG$ . Każda z nich przekształca prostą  $k$  na tę samą prostą.

Złożenie  $\psi = \varphi_C \circ \varphi_K$  jest jednokładnością o skali ujemnej i przeprowadza okrąg  $\Omega$  na okrąg  $\omega$ . Przeprowadza przy tym prostą  $k$  na siebie samą, co oznacza, że prosta  $k$  przechodzi przez środek jednokładności  $\psi$ .

Jednokładność o skali ujemnej przekształcająca okrąg  $\Omega$  na  $\omega$  jest wyznaczona jednoznacznie; jej środek  $P$  jest punktem położonym na odcinku łączącym środki tych okręgów i dzielącym ów odcinek w stosunku równym stosunkowi ich promieni. Jak widzieliśmy, punkt  $P$  leży na prostej  $k$  (czyli  $CK$ ). Identyczne rozumowanie pokazuje, że ten sam punkt  $P$  leży także na prostych  $EL$  i  $GM$ . Jest więc punktem, którego istnienie należało wykazać.

**834.** Przykład „firmowy”:  $a_n = n(n+1)/2$ . Badana suma daje się łatwo przedstawić w postaci ułamka:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} &= 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = 2 \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \\ &= 2 \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{2n}{n+1}. \end{aligned}$$

Uzyskany ułamek jest nieskracalny, gdy  $n$  jest liczbą parzystą; i wówczas  $L_n = 2n$ . Gdy zaś  $n$  jest liczbą nieparzystą, to po skróceniu przez 2 dostajemy ułamek nieskracalny o liczniku  $L_n = n$ . Ciąg  $(a_n)$  spełnia więc wymagany warunek.

Suma szeregu  $\sum_{n=1}^{\infty} (1/a_n)$  to wartość graniczna ciągu sum częściowych (gdy  $n \rightarrow \infty$ ) i w tym przykładzie wynosi 2. (Nie wiemy, czy istnieją przykłady wyznaczające szeregi o sumach większych niż 2).

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n+2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n+4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

## Lewactwo... w kosmosie!?

Słowa Ellie Arroway, głównej bohaterki książki „Kontakt” Carla Sagana:  
„Wszechświat to dość duże miejsce. Jest większy niż wszystko, co nam się wydaje. Więc jeśli jest tylko dla nas... to straszne marnowanie miejsca”.

Skrętność (ang. *helicity*) w fizyce cząstek elementarnych oznacza rzut wektora wewnętrznego momentu pędu (spinu) na kierunek ruchu cząstki. Cząstkę o skrętności dodatniej przyjęto nazywać „lewoskrętną”, a o ujemnej „prawoskrętną”. Ma to znaczenie m.in. w oddziaływaniach słabych, które są czyste na skrętność: uczestniczą w nich tylko lewoskrętne cząstki i prawoskrętne antycząstki (sterylnie, to znaczy prawoskrętne neutrino oddziałujące tylko grawitacyjnie, ale nie słabo, jest hipotetycznie kandydatem na składnik ciemnej materii).

Jest raczej pewne, że we Wszechświecie oprócz naszej cywilizacji istnieją inne, zapewne dość różne od naszej (choć i druga możliwość – że jesteśmy sami – jest równie fascynująca). Nie ma żadnej gwarancji, że Obcy będą rozumieć rzeczy dla nas zupełnie podstawowe, na przykład rozróżniać stronę lewą i prawą; czy Obcy w ogóle będą mieć np. ręce, a jeśli tak, to *ile* i *gdzie*? Na szczęście ręczność, czyli *chiralność* (z gr. *χίρ*, co oznacza rękę), ważną cechę wielu układów bądź obiektów, można zdefiniować bardziej abstrakcyjnie. Obiekt lub układ jest chiralny, jeżeli posiada cechę, która sprawia, że jest odróżnialny od swojego lustrzanego odbicia. W tym sensie większość obiektów i procesów jest symetryczna, to znaczy nie sposób powiedzieć, czy badamy obiekt, czy jego lustrzane odbicie. Odejście od tej reguły odgrywa ważną rolę w wielu różnych dziedzinach astrofizyki, w tym astrobiologii. Obserwowana w kosmosie chiralność – preferencja do lewo- bądź prawoskrętności – może pojawić się z powodów działania czynników wewnętrznych lub zewnętrznych, a nawet pojawić się spontanicznie, w wyniku złamania symetrii. Astrofizycznie występowanie chiralności obserwujemy najczęściej dzięki obecności pól magnetycznych. Pola magnetyczne mogą doświadczać systematycznego skręcenia, na przykład gdy występują czynniki zewnętrzne, takie jak kombinacja rotacji i stratyfikacji (gradientu gęstości) w gwiazdzie, lub pod wpływem czynników wewnętrznych, takich jak obecność cząstek o wybranej ręczności. Może również dochodzić do spontanicznego powstania skręcenia, którego znak zależy losowo od różnych czynników. Na przykład we wspomnianej przed chwilą atmosferze gwiazdowej, w której występuje stratyfikacja i pole magnetyczne – w wyniku nieliniowo narastającej niestabilności związanej z siłą wyporu jedna silna fluktuacja prawo- lub leworęczna dominuje w danym układzie.

W astrobiologii ważne pytanie dotyczy pochodzenia biologicznej ręczności. Wiele cząsteczek organicznych ma tendencję do obracania płaszczyzny polaryzacji światła spolaryzowanego liniowo. Substancje te określa się jako lewoskrętne (L, ang. *levorotatory*) lub prawoskrętne (D, ang. *dextrorotatory*). Prawie wszystkie aminokwasy ważne w procesach życiowych są typu L, a cukry typu D – jak na przykład w szkielecie DNA, zbudowanym z cukru deoksyrybozy. Bez odpowiedzi pozostają pytania o to, jak dochodzi do tego, że życie korzysta z cząsteczek o określonej chiralności, czy są możliwe rozwiązania „alternatywne” do naszego i jak są powszechne. Pomiary skrętności aminokwasów przybyłych na Ziemię w meteorycie Murchison (Australia, 1969) sugerują, że w tym konkretnym przypadku przewagę mają aminokwasy lewoskrętne. Jedną z hipotez jest występowanie procesów samoorganizacji cząsteczek (tzw. barier entropowych), które sprawiają, że w roztworach aminokwasów początkowo zawierających obie chiralności w odpowiednich warunkach tworzą się spontanicznie skupiska o wybranej chiralności.

Stwierdzenie globalnej prawo- lub leworęczności, to znaczy określonej preferencji w całym Wszechświecie, byłoby niewątpliwie przełomem. Planowane pomiary, na przykład polaryzacji kołowej fal grawitacyjnych z wczesnych momentów istnienia Wszechświata, umożliwią, być może już wkrótce, odpowiedź na to pytanie.

Michał BEJGER

Inspirowane pracą Axela Brandenburga „Chirality in Astrophysics”, arXiv: 2110.08117.

## Niebo w maju

Maj jest ostatnim miesiącem roku z szybkim wzrostem długości dnia i skracania się nocy. Przez 31 dni czas przebywania Słońca nad widnokretem zwiększy się o kolejne 1,5 godziny, osiągając pod koniec maja 16 godzin. W trzeciej dekadzie miesiąca Słońce przecina równoleżnik +20° deklinacji w drodze na północ, i tym samym zaczyna się dwumiesięczny okres najdłuższych dni i najkrótszych nocy w roku. Podczas nich z jednej strony Słońce chowa się na tyle płytko pod horyzont, że niebo pozostaje jasne nawet w najciemniejszej części nocy i wysoko zawieszony chmury są wciąż oświetlone mimo zmroku. W ten sposób powstają tzw. obłoki srebrzyste, które najpierw pojawiają

się w północnej Polsce, a następnie przesuwają się na południe.

Z drugiej strony podczas górowania Słońce przekracza wysokość +58°, a to oznacza możliwość wystąpienia tzw. łuku okołohoryzontalnego (więcej o nim na angielskiej stronie: [www.atoptics.co.uk/cha2.htm](http://www.atoptics.co.uk/cha2.htm)), czyli małej, lecz intensywnej tęczy kilkanaście stopni nad horyzontem w okolicach południa. Warunkiem jego zaistnienia są wysoko zawieszony chmury, na tyle cienkie albo porozrywane, że między nimi występują połacie czystego nieba. Te okoliczności sprawiają, że



w odległości 46° od Słońca możliwa jest do zobaczenia mała, ale intensywna tęcza. Jest to jednak zjawisko niezwykle rzadkie, zwłaszcza daleko od równika, gdzie Słońce przebywa na odpowiedniej wysokości krótko i przez niewiele dni w roku. Dlatego jeśli komuś uda się dostrzec taki łuk na szerokościach geograficznych Polski, może uważać się za szczęściarza.

Początek miesiąca należy do planety **Merkury** i Księżycy w fazie cienkiego sierpa. Pierwsza planeta od Słońca w ostatnich dniach kwietnia osiągnęła maksymalną elongację wschodnią, oddalając się od Słońca na około 20°, i teraz dąży do koniunkcji dolnej, przez którą przejdzie 21 maja. Merkury pozostanie dobrze widoczny przez kilka pierwszych dni miesiąca, jednak z każdym dniem planeta wyraźnie będzie tracić na jasności i szybko zginie w zorzy wieczornej. Pierwszej doby maja o zmierzchu Merkury zajmie pozycję na wysokości 10°, świecąc blaskiem +0,6<sup>m</sup>. Można próbować, dzięki niewielkim teleskopom, dostrzec jego tarczę o średnicy 9" i w fazie 31%. Niecałe 2° na prawo od planety pokażą się Plejady, 12° na lewo zaś – Aldebaran, najjaśniejsza gwiazda Byka. Następnej doby 2,5° na lewo od Merkurego pokaże się Księżyc prezentujący sierp w fazie 3%.

W kolejnych dniach Księżyc powędruje wyżej, lecz ze względu na zmianę nachylenia ekliptyki już nie tak wysoko, jak w poprzednich miesiącach. Merkury natomiast zbliży się do widnokregu i dodatkowo spadnie jego jasność. Ósmego maja o zmierzchu planeta zajmie pozycję na wysokości 7°, świecąc z jasnością +1,8<sup>m</sup>, i na jej wyłonienie się z tła nieba trzeba będzie poczekać dłużej. Ponadto planeta obniży swoją wysokość na niebie i jej dostrzeżenie stanie się przez to trudniejsze.

Wieczorem w dniu obchodów 230 rocznicy uchwalenia Konstytucji tarcza Księżycy zwiększy fazę do 8% i zajmie pozycję w połowie drogi między Aldebaranem a El Nath, czyli dwiema najjaśniejszymi gwiazdami Byka. W ciągu trzech następnych dni sierp Srebrnego Globu pogrubi się do 30%, docierając na odległość około 3° do Polluksa, najjaśniejszej gwiazdy Bliźniąt, by kolejne trzy dni później przejść przez I kwadrę, przebywając w gwiazdozbiorze Lwa i wędrując 5° na północ od Regulusa, najjaśniejszej gwiazdy tej konstelacji. W tym miejscu na niebie znajduje się gwiazda 3. wielkości  $\eta$  Leonis, która zniknie na jakiś czas za księżycową tarczą. Całe zjawisko da się obserwować z terenu Polski. Gwiazda zniknie za ciemnym brzegiem tarczy Księżycy około godziny 21, gdy niebo dopiero zaczyna się ściemniać, szczególnie w północno-zachodniej części kraju. Północno-wschodnia Polska znajdzie się blisko północnej granicy zakrycia, i tam zjawisko potrwa jedynie kilkanaście minut.

Gdy Księżyc spotka się z Polluksem, na porannym niebie maksimum swojej aktywności osiągnie coroczny rój meteorów  $\eta$ -Akwarydów. Są to szybkie meteory, często zostawiające za sobą smugi, a w czasie maksimum można spodziewać się nawet kilkudziesięciu meteorów na godzinę. Niestety na naszych szerokościach geograficznych radiant roju wschodzi niewiele przed Słońcem, na jaśniejącym już niebie, i o godzinie 4 wznosi się na niecałe 15° ponad widnokrąg. W tym roku Księżyc nie przeszkodzi w obserwacjach  $\eta$ -Akwarydów, a dodatkowo uroku ewentualnym zdjęciom meteorów dodadzą planety

**Saturn, Mars, Jowisz i Wenus**, ułożone na jednej linii kilkanaście stopni pod radiantem. Tej nocy Saturn i Mars świecą z podobną jasnością +0,8<sup>m</sup>. Jasność Jowisza wynosi -2,1<sup>m</sup>, Wenus zaś -4,1<sup>m</sup>. Marsa od Saturna oddzieli dystans ponad 20°, Jowisz znajdzie się kolejne 13° dalej, a Wenus – jeszcze 5° dalej. W kolejnych dniach maja widoczność wszystkich planet się poprawi, a jeszcze przed końcem miesiąca odwiedzi je zbliżający się do nowiu Księżyc.

Między I kwadrą a pełnią, przypadającą 16 maja rano naszego czasu, warto odnotować spotkanie Księżycy z Porrimą, jedną z jaśniejszych gwiazd Panny, w nocy z 12 na 13 maja przy fazie 87%, oraz najjaśniejszą w Pannie Spiką dobę później przy fazie 93%. Porrima także zostanie zakryta przez Księżyc, ale tym razem Polska znajdzie się przy wschodniej granicy zjawiska i w południowo-wschodniej części naszego kraju gwiazda zniknie za tarczą Srebrnego Globu tuż przed jego zachodem. Do zakrycia dojdzie około godziny 3.

Podczas pełni naturalny satelita Ziemi wejdzie w cień naszej planety, czyli dojdzie do całkowitego zaćmienia Księżycy, które potrwa prawie 1,5 godziny. Niestety faza całkowita rozpocznie się już po wschodzie Słońca w Polsce, dlatego u nas da się dostrzec tylko początek fazy częściowej zaćmienia, a i to tylko w południowo-zachodniej części kraju. Całe zaćmienie obejmą mieszkańcy Ameryki Południowej, wschodniej części Ameryki Północnej i wysp na oblewających je oceanach, a także naukowcy na Antarktydzie.

Noc po pełni Księżyc spędzi w gwiazdozbiorze Skorpiona między Antaresem, najjaśniejszą gwiazdą konstelacji, a charakterystycznym łukiem gwiazd w jej północno-zachodniej części. Niestety silny blask Księżycy spowoduje, że bez kłopotów z jego łuny uda się wydobyć tylko Antaresowi. W kolejnych nocach Księżyc przejdzie przez gwiazdozbiory Wężownika i Strzelca, wędrując głęboko pod ekliptyką, przez co nie wzniesie się zbyt wysoko ponad widnokrąg.

Srebrny Glob spotka się z planetą Saturn 22 maja, wtedy też przejdzie przez ostatnią kwadrę, by trzy dni później zmniejszyć fazę do 26% i zbliżyć się do tworzących teraz dość ciasną parę planet Jowisz i Mars. Jak już wspominałem, Jowisz zacznie miesiąc blisko planety Wenus, jednak z upływem czasu ta oddali się od niego, a zbliży się za to Mars. Pod koniec miesiąca, 29 i 30 maja, dystans między Jowiszem i Marsem spadnie do około 40', czyli niewiele więcej od średnicy kątowej Słońca czy Księżycy. Do tego momentu blask Jowisza urośnie do -2,2<sup>m</sup>, blask Marsa natomiast do +0,6<sup>m</sup>.

Najpóźniej nad widnokregiem pojawia się planeta Wenus, poprawiająca widoczność na niebie porannym. Planeta zacznie maj od ciasnego spotkania z Jowiszem, gdy planety zbliżą się do siebie na 20'. Do końca maja odległość między nimi urośnie do 30°. W maju wygląd tarczy Wenus zmieni się niewiele, ponieważ planeta jest już daleko od nas. W trakcie miesiąca jej tarcza zmniejszy średnicę z 17" do 15", faza urośnie z 68% do 78%, jasność natomiast pozostanie na poziomie -4<sup>m</sup>.

*Ariel MAJCHER*

## Powrót pierwiastka zero

Gdy w tym roku na Kijów zaczęły spadać pierwsze rosyjskie bomby, mało kto miał ochotę świętować dziewięćdziesięciolecie odkrycia neutronu. Mimo szacownego wieku ta cząstka elementarna nie ujawniła jeszcze fizykom wszystkich swoich sekretów. Żaliłem się już na łamach *Delty*, że są sprzeczne doniesienia na temat tego, ile neutron właściwie średnio żyje w stanie swobodnym. Ale to nie koniec prostych pytań bez dobrych odpowiedzi. Nie wiadomo również, czy neutron potrafi się trwale związać z innymi podobnymi cząstkami.

Można powiedzieć, że w jądrach atomowych, które są układami związanymi nukleonów: protonów i neutronów, te ostatnie pełnią rolę stabilizującą. Oddziałując silnie, przyciągają się z innymi nukleonami, obce jest im jednak oddziaływanie elektrostatyczne, które wzajemnie odpycha protony.

Czy jednak dwa neutrony, bez towarzystwa protonów, mogą stworzyć stabilny stan związany? A trzy? A może cztery? Z technicznych powodów dobrze znanych fizykom teoretycznym bardzo trudno jest opisać, jak oddziałują silnie cząstki elementarne o małych prędkościach. Na pewno istnieją we Wszechświecie stabilne obiekty zbudowane z (prawie) samych neutronów – gwiazdy neutronowe. Jednak są to układy dość duże, bo zawierające coś między nonylijonem ( $10^{54}$ ) a decylijonem ( $10^{60}$ ) cząstek. Mniej wiadomo o innych izotopach takiego „pierwiastka zero” – bo układ związany neutronów ma przecież zerową liczbę atomową.

Nieistnienie związanych par neutronów (i protonów) można uzasadnić odwołaniem się do zakazu Pauliego – podstawowej kwantowej zasady głoszącej, że cząstki o spinie połówkowym, czyli fermiony, jakimi są neutrony, nie mogą znajdować się w takich samych stanach. Analogiczne rozważania można prowadzić dla układów trzech i pięciu neutronów.

A co z neutronowym *ménage à quatre*? Tu zdania są podzielone. Teoretycy nie bardzo umieją sobie wyobrazić – czyli stworzyć działający model – że takie *tetraneutronium* mogłoby istnieć. Tymczasem na początku tego roku fizycy doświadczalni z Politechniki w Monachium opublikowali pracę [1], w której donoszą o możliwym zaobserwowaniu układu związanego czterech neutronów. W akceleratorze Tandem w Garching bombardowano tarczę wykonaną z dwutlenku litu-7 wiązką jąder litu-7 o energii kinetycznej 46 MeV. Ponieważ w takim eksperymencie pociski i tarcze zawierają po trzy protony i cztery neutrony, więc można wyprodukować jądra węgla-10, zawierające sześć protonów i cztery neutrony, i pozostaną wtedy cztery nadmiarowe neutrony. Gdyby neutrony te opuszczały miejsce zderzenia nie wszystkie razem, rozkład energii jąder węgla powinien być płaski – w przeciwnym razie występowałby w nim wyraźny garb.

Pomiary wykonane przez autorów opisywanej pracy wskazują na drugą z tych możliwości, a szacowany czas życia rzekomego tetraneutronium ma wynosić aż kilka minut, czyli ekstremalnie długo jak na cząstkę elementarną. Jest to wynik o tyle ciekawy, że poprzednie doniesienia o odkryciu tetraneutronium, sprzed sześciu lat, pochodzące z ośrodka RIKEN w Japonii, mówiły o czasie życia rzędu  $10^{-21}$  sekundy. Jako że wszystkie dotychczasowe doniesienia o wyprodukowaniu tej cząstki zostały odłożone do lamusa odkryć niepotwierdzonych, ciekawe będzie zobaczyć, jaki los spotka ten najnowszy wynik. Jeśliby się jednak potwierdził, przed teorią oddziaływań silnych stanie nowe niebanalne wyzwanie.

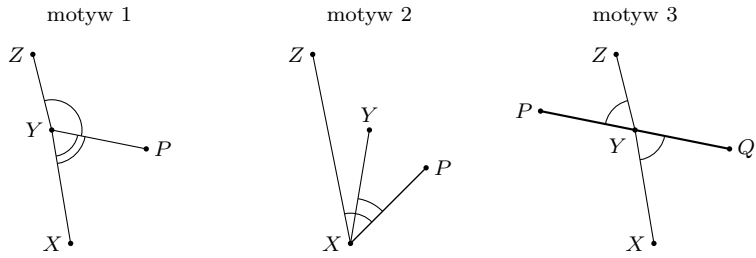
Krzysztof TURZYŃSKI

[1] Thomas Faestermann, Andreas Bergmaier, Roman Gernhäuser, Dominik Koll, Mahmoud Mahgoub, *Indications for a bound tetraneutron*, *Physics Letters B* **824** (2022) 136799.

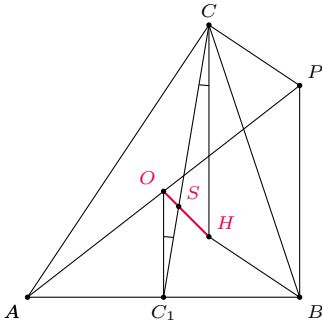
# Współliniowość i kąty

Bartłomiej BZDEGA

Zacznę od trzech prostych motywów, na których opierają się zadania z bieżącego kącika (w trzecim punkcie  $Y$  leży na odcinku  $PQ$ ).



$$\begin{array}{lll}
 X, Y, Z \text{ są współliniowe} & X, Y, Z \text{ są współliniowe} & X, Y, Z \text{ są współliniowe} \\
 \iff |\sphericalangle PYX| + |\sphericalangle PYZ| = 180^\circ & \iff |\sphericalangle PXY| = |\sphericalangle PXZ| & \iff |\sphericalangle XYQ| = |\sphericalangle ZYP|
 \end{array}$$



A oto zastosowanie motywu 3 w dowodzie twierdzenia o prostej Eulera (inny dowód, wykorzystujący jednokładność, pokazałem w 22. kąciku ( $\Delta_{20}^{10}$ ); ten jest znacznie bardziej elementarny). Standardowo przez  $H, O, S$  oznaczamy odpowiednio ortocentrum, środek okręgu wpisanego i środek ciężkości trójkąta  $ABC$ , niech ponadto  $C_1$  będzie środkiem odcinka  $AB$ .

Wybermy taki punkt  $P$ , by czworokąt  $CHBP$  był równoległobokiem. Wtedy  $\sphericalangle ABP = \sphericalangle ACP = 90^\circ$ , więc  $AP$  jest średnicą okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ , w szczególności punkt  $O$  jest środkiem odcinka  $AP$ . Ponadto punkt  $C_1$  jest środkiem odcinka  $AB$ , więc  $C_1O$  jest odcinkiem środkowym w trójkącie  $ABC$ , czyli  $|C_1O| = \frac{1}{2}|BP| = \frac{1}{2}|CH|$ . Z własności środkowych mamy  $|C_1S| = \frac{1}{2}|CS|$ , a z równoległości  $OC_1 \parallel HC$  (obie proste są prostopadłe do prostej  $AB$ ) mamy  $\sphericalangle OC_1S = \sphericalangle HCS$ . Z powyższych rozważań wynika, że trójkąt  $OC_1S$  jest podobny do trójkąta  $HCS$ , więc  $|C_1OS| = |\sphericalangle CHS|$ . Na mocy motywu trzeciego dowodzi to współliniowości punktów  $O, S, H$ .

Piękne zastosowanie motywu 2 można znaleźć w 82. *Deltoidzie* Joanny Jaszuskiej ( $\Delta_{15}^{10}$ ), w dowodzie twierdzenia o prostej Simsona.

## Zadania.

1. Okręgi  $o_1$  i  $o_2$  przecinają się w punktach  $A$  i  $B$ . Odcinek  $AP$  jest średnicą okręgu  $o_1$ , a odcinek  $AQ$  – okręgu  $o_2$ . Wykazać, że punkty  $B, P, Q$  leżą na jednej prostej.
2. Odcinek  $AB$  jest częścią wspólną siedmiokątów foremnych  $ABCDEFG$  i  $BAHIJKL$ . Wykazać, że punkty oznaczone samogłoskami są współliniowe.
3. Częścią wspólną kwadratów  $ABCD$  i  $DEFG$  jest odcinek  $DG$ , zawarty w odcinku  $AD$ . Okręgi opisane na tych kwadratach przecinają się w punkcie  $P \neq D$ . Udowodnić, że punkty  $C, G, P$  leżą na jednej prostej.
4. Prosta  $\ell$  oraz okręgi  $o_1$  i  $o_2$  są styczne w punkcie  $T$ . Okrąg  $o$ , przechodzący przez punkt  $T$ , przecina prostą  $\ell$  oraz okręgi  $o_1$  i  $o_2$  w punktach odpowiednio  $P, K$  i  $L$ , różnych od  $T$ . Proste  $PK$  i  $PL$  przecinają po raz drugi okręgi  $o_1$  i  $o_2$  w punktach odpowiednio  $A$  i  $B$ . Wykazać, że punkty  $A, B$  i  $T$  leżą na jednej prostej.
5. Dany jest sześciokąt foremny  $ABCDEF$ . Punkty  $K$  i  $L$  leżą na odcinkach odpowiednio  $BD$  i  $DF$ , przy czym  $|BK| = |DL| = |AB|$ . Udowodnić, że punkty  $C, K, L$  leżą na jednej prostej.
6. Środek  $S$  okręgu  $\omega$  leży na okręgu  $o$ . Wspomniane okręgi przecinają się w dwóch punktach, jednym z nich jest  $A$ . Punkt  $P$  wybrano na okręgu  $o$  w ten sposób, by odcinek  $PS$  przecinał okrąg  $\omega$  w punkcie  $B$ . Symetralna odcinka  $BP$  przecina okrąg  $o$  w punkcie  $C$ , leżącym po innej stronie prostej  $BP$  niż punkt  $A$ . Dowiedzieć, że punkty  $A, B, C$  są współliniowe.
7. Równoległobok  $ABCD$  ma kąt ostry przy wierzchołku  $A$ . Punkt  $P$  leży na odcinku  $CD$ . Prosta  $BP$  przecina okrąg opisany na trójkącie  $ABC$  w punkcie  $Q \neq B$ . Okręgi opisane na trójkątach  $ABC$  i  $DPQ$  przecinają się w punkcie  $R \neq Q$ . Wykazać, że punkty  $A, D, R$  leżą na jednej prostej.

**Wskazówki do zadań**

1. Kąty  $\sphericalangle PBA$  i  $\sphericalangle QBA$  są proste.
2. Na siedmiokątach można opisać okręgi. Kąt  $\sphericalangle EAB$  jest wpisany, oparty na  $\frac{1}{7}$  okręgu, a kąt  $\sphericalangle BAI$  – na  $\frac{1}{2}$  okręgu.
3. Dobrze jest przyjąć się kątom  $\sphericalangle CPD$  i  $\sphericalangle GPD$ .
4. Zastosować twierdzenie o stycznej i cięciwie. Trzeba rozważyć dwa przypadki. Jeśli okręgi  $o_1$  i  $o_2$  są styczne zewnętrznie, to wykazujemy, że  $\sphericalangle ATB = 180^\circ$  (motyw 1), jeśli wewnętrznie – to ze  $\sphericalangle ATP = |\sphericalangle BTP|$  (motyw 2).
5. Kąty  $\sphericalangle DCK$  i  $\sphericalangle DCL$ .
6. Za miarę ukrywają się równości  $|AS| = |BS|$  i  $|BC| = |CP|$  oraz motyw 3.
7. Można udowodnić, operując odpowiednio twierdzeniem o kącie wpisanym, że  $\sphericalangle CDH = |\sphericalangle BAD|$ . Są tu do rozważenia dwa przypadki – odcinki  $PQ$  i  $DH$  mogą się przecinać lub nie.

# Maths Beyond Limits



Maths Beyond Limits to dwunastodniowy międzynarodowy obóz matematyczny dla licealistów z całego świata. Jego siódma edycja odbędzie się we wrześniu tego roku w polskich górach. Jeśli masz 15-19 lat, interesujesz się matematyką i chcesz poznać pasjonatów matematyki z całego świata, ten obóz jest dla Ciebie. Formularz rekrutacyjny składa się z zadań oraz części niematematycznej, a termin składania aplikacji upływa 31 maja. Dokładne informacje można znaleźć na stronie [mathsbeyondlimits.eu](http://mathsbeyondlimits.eu).

## Kontakt:



[www.mathsbeyondlimits.eu](http://www.mathsbeyondlimits.eu)



[mathsbeyondlimits2022@gmail.com](mailto:mathsbeyondlimits2022@gmail.com)



[maths\\_beyond\\_limits](https://www.instagram.com/mathsbeyondlimits)



[Maths Beyond Limits](https://www.facebook.com/MathsBeyondLimits)