Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2022

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 827 ($WT = 2{,}35$) i 828 ($WT = 2{,}08$) z numeru 10/2021

Janusz Olszewski	Warszawa	48,10
Błażej Żmija	Kraków	44,93
Witold Bednarek	Łódź	38,44
Kacper Morawski	Warszawa	37,16
Andrzej Kurach	Ryjewo	36,86
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Paweł Najman	Kraków	35,90
Marcin Kasperski	Warszawa	34,05

Dwanaście lat temu pan Janusz Olszewski przekroczył 44 p. po raz jedenasty; przypomnijmy zdanie z omówienia ligi (Δ^2_{10}): „Jeszcze mały wysiłek, trzy razy tyle, co dotąd, i będzie 44 × 44". Na półmetku jest nasz lider: właśnie zaliczył przekroczenie dwudzieste drugie.

Towarzyszy mu pan Błażej Żmija – przekroczenie drugie – czekamy na wiele kolejnych!

Zadania z matematyki nr 841, 842

Redaguje Marcin E. KUCZMA

841. Dla zadanej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ ustalić, ile jest ciągów liczb rzeczywistych $(a_1, \ldots, a_n)$ o tej własności, że dla każdego ciągu liczb rzeczywistych $(x_1, \ldots, x_n)$ zachodzi równość

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{i+j} x_j \right| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

gdzie (cyklicznie) $a_r = a_{r-n}$ dla $r > n$.

842. Na płaszczyźnie dane są trzy koła (domknięte, tj. rozważane wraz z punktami brzegu). Zakładamy, że ich część wspólna jest niepusta. Przesuwamy każde koło (niezależnie) w taki sposób, że dla każdych dwóch kół odległość ich środków po przesunięciu jest nie większa niż przed przesunięciem. Udowodnić, że przesunięte koła nadal mają niepustą część wspólną.

Zadanie 842 zaproponował pan Michał Adamaszek z Kopenhagi.

Rozwiązania zadań z numeru 1/2022

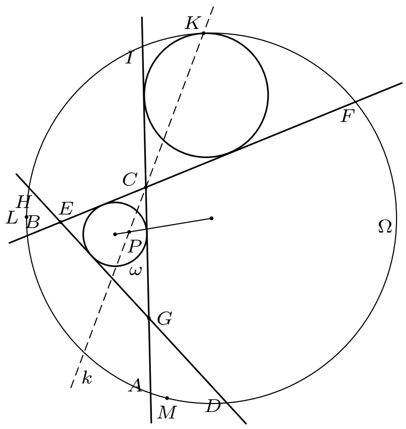
Przypominamy treść zadań:

833. Trzy niewspółliniowe punkty C, E, G leżą wewnątrz koła ograniczonego okręgiem Ω, który przecina prostą CE w punktach B, F; prostą CG – w punktach A, I; prostą EG – w punktach D, H; oznaczenia ustalone tak, by na każdej z tych trzech prostych cztery nazwane punkty leżały w porządku alfabetycznym. Trójkąt krzywoliniowy ABC posiada okrąg wpisany, styczny do odcinków AC, BC oraz styczny w punkcie K do łuku AB okręgu Ω. Analogicznie, okręgi wpisane w figury DEF i GHI są styczne do okręgu Ω odpowiednio w punktach L i M. Udowodnić, że proste CK, EL, GM mają punkt wspólny.

834. Podać przykład takiego nieskończonego rosnącego ciągu liczb naturalnych $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$, że dla każdego $n \geqslant 1$ suma

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{L_n}{M_n},$$

zapisana w postaci ułamka nieskracalnego L_n/M_n, ma w liczniku liczbę L_n podzielną przez n. Dla znalezionego ciągu (a_n) obliczyć sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(1/a_n)$ lub oszacować ją z dołu; to znaczy, wskazać dowolną liczbę D, nie przekraczającą owej sumy. Im większa wartość D, tym wyższa ocena.



833. Niech k będzie prostą przechodzącą przez punkty C i K. Istnieje jednokładność φ_K o środku K i skali dodatniej przekształcająca okrąg Ω na okrąg wpisany w figurę ABC, o którym mowa w zadaniu; istnieje też jednokładność φ_C o środku C i skali ujemnej, przekształcająca ten ostatni okrąg na okrąg ω wpisany w trójkąt CEG. Każda z nich przekształca prostą k na tę samą prostą.

Złożenie $\psi = \varphi_C \circ \varphi_K$ jest jednokładnością o skali ujemnej i przeprowadza okrąg Ω na okrąg ω. Przeprowadza przy tym prostą k na siebie samą, co oznacza, że prosta k przechodzi przez środek jednokładności ψ.

Jednokładność o skali ujemnej przekształcająca okrąg Ω na ω jest wyznaczona jednoznacznie; jej środek P jest punktem położonym na odcinku łączącym środki tych okręgów i dzielącym ów odcinek w stosunku równym stosunkowi ich promieni. Jak widzieliśmy, punkt P leży na prostej k (czyli CK). Identyczne rozumowanie pokazuje, że ten sam punkt P leży także na prostych EL i GM. Jest więc punktem, którego istnienie należało wykazać.

834. Przykład „firmowy": $a_n = n(n+1)/2$. Badana suma daje się łatwo przedstawić w postaci ułamka:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} = 2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}.$$

Uzyskany ułamek jest nieskracalny, gdy n jest liczbą parzystą; i wówczas $L_n = 2n$. Gdy zaś n jest liczbą nieparzystą, to po skróceniu przez 2 dostajemy ułamek nieskracalny o liczniku $L_n = n$. Ciąg (a_n) spełnia więc wymagany warunek.

Suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}(1/a_n)$ to wartość graniczna ciągu sum częściowych (gdy $n \to \infty$) i w tym przykładzie wynosi 2. (Nie wiemy, czy istnieją przykłady wyznaczające szeregi o sumach większych niż 2).

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n+2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n+4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.