Problemy z równaniami hydrodynamiki

Grzegorz ŁUKASZEWICZ, Krzysztof A. MIZERSKI***

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

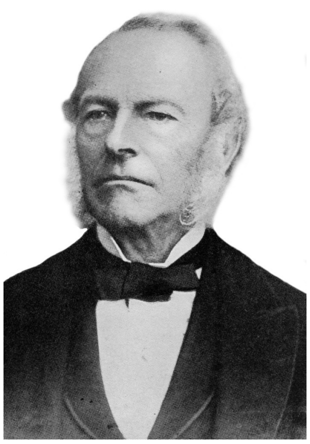
** Instytut Geofizyki, Polska Akademia Nauk

Trzeba przyznać, że równie użyteczne zagadnienia jak ruch płynu i pokrewne nauki zawsze były przedmiotem rozważań. Jednakże do dnia dzisiejszego ani nasza znajomość czystej matematyki, ani nasza znajomość matematycznych zasad przyrody nie znalazły do nich udanego podejścia.

– Daniel Bernoulli, 1734 r.

Leonard Euler (1707–1783)

Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836)



Sir George Gabriel Stokes (1819–1903)

1. Równania hydrodynamiki. Postawienie problemu

Znakomitym wprowadzeniem do równań hydrodynamiki jest artykuł Witolda Sadowskiego *Równanie Naviera–Stokesa* Δ^{12}_{14}, jej historia jest opisana w [Darrigol], a wybrane problemy są poruszone w dwóch innych tekstach Sadowskiego: *Niezbędna persona non grata* Δ^{7}_{13} i *Dowody i obliczenia* Δ^{1}_{17}.

Pierwsze ogólne równania hydrodynamiki sformułował Leonard Euler. Oto, co powiedział o tym Joseph-Louis Lagrange:

Eulerowi zawdzięczamy pierwsze ogólne wzory na ruch płynu [...] przedstawione w prostej i jasnej notacji równań cząstkowych [...] Dzięki temu odkryciu cała mechanika płynów została zredukowana do jednego punktu analizy, a jeśli użyte równania byłyby całkowalne, można byłoby dokładnie określić, we wszystkich przypadkach, ruch płynu poruszanego dowolnymi siłami [...]

Bardzo szybko okazało się jednak, że równania te zawodzą już w najprostszych sytuacjach, po prostu ich rozwiązania nie dają przewidywań zgodnych z doświadczeniem. Jednym słowem, teoria na nich oparta prowadzi do paradoksów [Birkhoff]. Spowodowało to podział środowiska na hydraulików, którzy zajmowali się zastosowaniami i posługiwali się „praktycznymi lokalnymi modelami”, i hydrodynamików, którzy zajmowali się ogólnymi równaniami dla nich samych. Ten podział pozostał zresztą w dużej mierze do dziś, ze szkodą dla zastosowań i dla nauki (G. Łukaszewicz, *Hydrodynamika a hydraulika* Δ^{8}_{17}). W artykule przybliżymy ten problem nieco dokładniej.

Równania Naviera–Stokesa dla płynu nieściśliwego (w tym również o stałej gęstości ρ) opisują ewolucję prędkości $\vec{u}$ tego płynu – wyrażone w formie wektorowej mają następującą postać:

$$\frac{\partial \vec{u}(\vec{x},t)}{\partial t} + (\vec{u}(\vec{x},t)\cdot\nabla)\vec{u}(\vec{x},t) = \nu\Delta\vec{u}(\vec{x},t) - \frac{1}{\rho}\nabla p(\vec{x},t) + \vec{f}(\vec{x},t), \quad \operatorname{div}\vec{u}(\vec{x},t) = 0.$$

Pierwsze równanie przedstawia znaną ze szkoły drugą zasadę dynamiki Newtona, $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$, w której całkowita siła działająca na elementy płynu składa się z sił zewnętrznych $\vec{f}$, tarć lepkich pomiędzy elementami płynu $\nu\Delta\vec{u}$ oraz gradientów ciśnienia w płynie. Drugie to prawo zachowania masy dla ośrodka ciągłego o takich własnościach, które pozwalają założyć, iż z dobrym przybliżeniem dowolna wyróżniona objętość ośrodka nie zmienia masy podczas swojej ewolucji w czasie, choć może oczywiście zmieniać kształt.

Biorąc pod uwagę ogromną różnorodność zachowania się płynu nieściśliwego, jaką znamy z doświadczenia, a z drugiej strony prostotę założeń będących fundamentem powyższych równań, narzucają się podstawowe pytania: *Co tak naprawdę powyższe równania mają wspólnego ze zjawiskami przepływów płynów, jakie znamy z doświadczenia i jakie występują w przyrodzie? Czy ich rozwiązania dają przewidywania zgodne z doświadczeniem i w jakim zakresie*?

Na te pytania nie ma na razie jednej prostej odpowiedzi. Równania hydrodynamiki są na to zbyt złożone. Wspomniany wyżej rozdźwięk między hydraulikami i hydrodynamikami wziął się stąd, że równania Eulera (czyli powyższy układ równań, ale z założeniem, że lepkość płynu ν jest zerowa) właśnie z powodu pominięcia faktu, że realne płyny są lepkie, generują paradoksy, np. paradoks d’Alemberta mówiący o tym, że na ciało opływane płynem nielepkim przy ruchu potencjalnym i bezwirowym nie działa żadna siła – co jest oczywiście niezgodne z doświadczeniem.

Jean Léonard Marie Poiseuille (1797–1869)

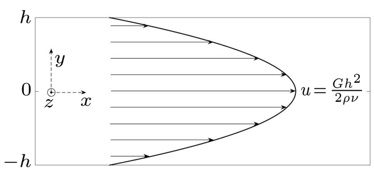
Równania NS uwzględniają lepkość, ale są modelem trudniejszym do badania, jak również nadal nieuwględniającym pewnych własności realnych płynów, np. zjawisk cieplnych. Można dodać następne równanie uwzględniające zjawiska cieplne, ale za cenę otrzymania jeszcze trudniejszego układu równań, również nieuwzględniającego innych własności. Musimy zatem uznać powyższe modele jedynie za pewne przybliżenia rzeczywistego ruchu płynu.

2. Przepływ Poiseuille'a

Spróbujmy sprawdzić, jak równania NS „sprawdzają się” w jednym z najprostszych zagadnień.

Rozważmy ruch płynu między dwiema nieskończonymi i równoległymi do siebie płaszczyznami, odległymi od siebie o $2h$, tak jak na rysunku na marginesie. Załóżmy dla uproszczenia, że $\vec{f} = 0$. Ze względu na lepkość prędkość płynu na ściankach jest równa zeru (płyn przykleja się do nich, choć założenie to jest tylko dobrym przybliżeniem rzeczywistości). Rozważany obszar dopuszcza wiele symetrii przepływu i gdyby założyć, że płyn spełnia je wszystkie, łącznie z symetrią względem czasu, to jedynym rozwiązaniem równań NS byłby bezruch, czyli zerowa prędkość i stałe ciśnienie. Nasze rozwiązanie, słusznie zwane *trywialnym*, pozostaje w zgodzie z intuicją uzyskaną na podstawie obserwacji w przyrodzie.

Równanie NS redukuje się do $\rho\nu u_{yy}(y) = -G(x)$, a założenie o jednokierunkowości przepływu daje $G = const$.

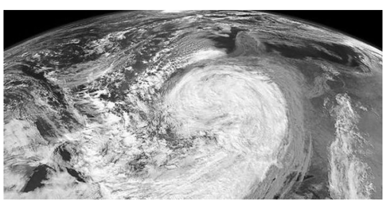


Profil prędkości przepływu Poiseuille'a w nieskończenie szerokim kanale

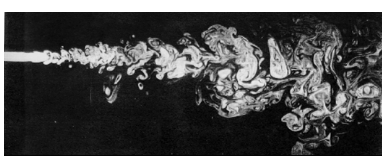
Załóżmy teraz tylko niektóre symetrie, a mianowicie, załóżmy stacjonarność ruchu, tzn. że nie zależy on od czasu, oraz niezmienniczość translacyjną prędkości w kierunku x – wzdłuż przepływu i w kierunku z – prostopadłym do przepływu i równoległym do ścianek. Możemy tak założyć ze względu na jednorodność warunków brzegowych. Mamy zatem ruch płaski, w płaszczyźnie (x, y). Załóżmy, że jest on wymuszony spadkiem ciśnienia w kierunku x, z zadanym gradientem ciśnienia $-\frac{\partial p}{\partial x} = G > 0$. Oznaczając współrzędne prędkości w kierunkach x i y przez $u = u(y,t)$ i $v = v(y,t)$, odpowiednio, oraz $p = p(x,t)$, po podstawieniu do równań NS i biorąc pod uwagę warunki brzegowe i założenie o niezależności przepływu od czasu, otrzymujemy następujące rozwiązanie:

$$u = u(y) = \frac{G}{2\rho\nu}(h^2 - y^2), \quad v = v(x,y) = 0, \quad p = p(x).$$

Zauważmy, że dzięki prostej geometrii obszaru i założonym symetriom przepływu otrzymaliśmy jawne rozwiązanie równań NS. Przy tych założeniach rozwiązanie w pewien sposób odzwierciedla nasze oczekiwania. Płyn przykleja się do ścianki, jego największa prędkość jest na linii centralnej, względem której profil prędkości jest symetryczny, ponadto profil ten zależy od lepkości płynu w zgodzie z intuicją (im większa lepkość, tym mniejsza prędkość). Powyższe rozwiązanie jest przy przyjętych założeniach jednoznaczne.



Turbulencja w ziemskiej atmosferze, zobrazowana przez układ chmur



Rozwój turbulencji w przepływie eksperymentalnym

Patrząc jednak z drugiej strony, rozwiązanie to zawiera szereg uproszczeń i tylko w pewien przybliżony sposób opisuje rzeczywistość. Po pierwsze, tak jak już to zostało wspomniane, nałożony warunek brzegowy polegający na przyklejaniu się płynu do ścianek nie jest idealnie spełniony w prawdziwych przepływach. Rzeczywistość jest taka, że na samych ściankach występuje pewien poślizg. Ponieważ jednak poślizg jest bardzo mały i prędkość płynu szybko narasta z oddalaniem się od ścianki, możemy uznać warunek „braku poślizgu” za dobre przybliżenie na gładkich ścianach. Po drugie, w eksperymencie oraz w naturalnych przepływach napędzanych gradientem ciśnienia zawsze występują zaburzenia. W eksperymentach staramy się je minimalizować, co się często udaje, jednak są one zawsze obecne, powodując niedokładność naszych założeń dotyczących symetrii czasowych oraz translacyjnych.

Ostatnia obserwacja prowadzi nas do ważnego problemu stabilności otrzymanego przepływu. Trzeba od razu zaznaczyć, że na samym wstępie dopuściliśmy się idealizacji zagadnienia, zakładając, że oba brzegi to *nieskończone* płaszczyzny. W rzeczywistych sytuacjach eksperymentalnych nie ma układów o wymiarach nieskończonych. Oznaczmy wymiar liniowy układu laboratoryjnego w kierunku z przez ℓ. W kierunku przepływu długość układu laboratoryjnego jest również

Literatura

G. Birkhoff: *Hydrodynamics. A Study in Logic, Fact and Similitude*, Princeton University Press, 1960.
O. Darrigol: *Worlds of flows. A history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford University Press, 2005.

skończona, jednak ten fakt ma najmniejsze znaczenie, ponieważ generujemy przepływ różnicą ciśnień i to jej wartość na końcach kanału decyduje o strukturze przepływu. Okazuje się, że im stosunek ℓ do h jest większy, tym przepływ Poiseuille'a jest generalnie lepszym przybliżeniem rzeczywistego przepływu.

Wróćmy teraz do problemu stabilności. Stabilność układów hydrodynamicznych bada się, wprowadzając zaburzenia do przepływu i analizując ich zachowanie. Jeśli zaburzenia nikną w czasie, bądź po prostu nie rozwijają się, układ uważa się za stabilny, jeśli jednak narastają, oznacza to, że dany przepływ utracił stabilność, ponieważ zaburzenia wyprowadzają układ ze stanu określonego tym przepływem.

W zagadnieniach mechaniki płynów kluczowym parametrem fizycznym jest *liczba Reynoldsa*, $Re = \frac{UL}{\nu}$, opisująca stosunek wielkości sił bezwładności płynu $\vec{u} \cdot \nabla \vec{u} \sim \frac{U^2}{L}$ do sił tarcia pomiędzy jego warstwami $\nu \Delta \vec{u} \sim \frac{\nu U}{L^2}$, gdzie U oznacza natężenie przepływu (np. jego maksymalną prędkość), zaś L – charakterystyczną liniową skalę układu (np. szerokość kanału). W ten sposób mierzone jest relatywne znaczenie bezwładności względem tarć lepkich. Sytuacja jest trochę podobna do sytuacji z filiżanką postawioną na stole, na kartce papieru: gdy będziemy powoli ciągnąć za kartkę, przesuniemy ją razem z filiżankę, jeśli jednak raptownie szarpniemy, inercja filiżanki spowoduje, iż dojdzie do zerwania sił tarcia i wyciągniemy spod niej kartkę. To właśnie zwiększanie liczby Reynoldsa, a zatem intensywności przepływu (lub powiększenie jego skali przestrzennej) doprowadza do destabilizacji układów hydrodynamicznych, gdyż siły lepkie stopniowo tracą na znaczeniu. Przepływ staje się *turbulentny*, chaotyczny i niezwykle złożony, bardzo daleki od rozwiązania Poiseuille'a (choć podobny w sensie statystycznym rozkładu średnich prędkości). Znakomita większość przepływów płynów i gazów we Wszechświecie, we wszystkich jego skalach, od mikro do makro, to przepływy turbulentne.

3. Modele w geometrii i hydrodynamice

Hydrodynamikę można porównać do geometrii, rozszerzonej o aksjomaty dynamiczne, dotyczące ruchu. Jest jednak istotna różnica. Wyjaśnimy to na przykładzie. Chcąc wykonać obliczenia dotyczące pola trójkątnej działki, którą chcemy kupić, dokonujemy jej pomiarów liniowych z wystarczającą dokładnością, następnie rysujemy na kartce papieru przeskalowany trójkąt i od tej pory przenosimy się w świat *geometrii euklidesowej*, nie martwiąc się, że ani sama działka nie jest idealnym trójkątem, ani nie jest takim jej odwzorowaniem na papierze. Wiemy, że nasze *idealne* obliczenia będą bardzo dokładnym przybliżeniem pola działki wystarczającym na nasze potrzeby związane z zakończeniem transakcji (pomijamy tu subtelności związane z definicją pojęcia pola dla rzeczywistego terenu [fraktale]). Geometria euklidesowa jest tu bliska świata realnego, choć wiemy, że nie zawsze tak jest w dużych skalach.

Spostrzeżenie kłopotu z tzw. piątym aksjomatem Euklidesa to prosta, ale bardzo głęboka obserwacja, wskazująca na podstawową różnicę między założeniem (matematycznym) a wiedzą, a raczej niewiedzą (dotyczącą fizyki), i potrzebę wprowadzenia pojęcia *modelu*.

A jak jest w hydrodynamice? Hydrodynamika jest dużo trudniejsza od geometrii. Jak mogliśmy zobaczyć na rozważanym w tym artykule przykładzie prostego, zdawałoby się, przepływu, odwzorowanie realnego przepływu na teorię, której rolą jest badanie tego przepływu za pomocą wybranego *modelu*, w tym przypadku równań Naviera–Stokesa, nastręcza od samego początku mnóstwa kłopotów.

Podobnie jak w naturze nie istnieją idealne trójkąty, nie istnieje także przepływ Poiseuille'a, który przyjęliśmy jako idealizację realnego przepływu. Badając przepływ Poiseuille'a (a każdego roku ukazują się dziesiątki artykułów temu poświęconych), nie mamy jednak a priori żadnych gwarancji, że jest on przybliżeniem realnego przepływu. Dzieje się tak, ponieważ: po pierwsze same modele są iluzoryczne (produkują paradoksy, może jest w nich zbyt mało fizyki? [Birkhoff]); po drugie przyjęte dalsze założenia upraszczające, na przykład założone symetrie czy warunki brzegowe, są nierealne; a po trzecie własności strukturalne rozważanego układu, na przykład jego nieliniowości, nie gwarantują stabilności jego rozwiązania, a tym samym ewentualnego dobrego przybliżenia realnego przepływu przez to rozwiązanie w trakcie ewolucji przepływu. Pełne równania modelowe są zbyt złożone, samo zaś zjawisko przepływu turbulentnego jest nieuchwytne analitycznie w ramach zamkniętej teorii matematycznej (choć są oczywiście różne mniej lub bardziej wyrafinowane metody jego opisu). Rozwój hydrodynamiki wymaga bliskiej współpracy między eksperymentatorami i teoretykami. W przeciwnym wypadku ryzykujemy sytuacją opisaną w poniższej opinii laureata Nagrody Nobla – Sir Cyrila Hinshelwooda, odniesionej do paradoksu d'Alemberta w równaniu Eulera:

Mechanika płynów została więc zdyskredytowana przez inżynierów od samego początku, co spowodowało niefortunny rozłam między dziedziną hydrauliki, obserwującej zjawiska, które nie mogły być wyjaśnione, a teoretyczną mechaniką płynów wyjaśniającą zjawiska, których nie można było zaobserwować.

W 1932 roku na posiedzeniu British Association w Londynie Sir Horace Lamb miał jakoby powiedzieć:

Jestem już starym człowiekiem, a kiedy umrę i pójdę do nieba, mam nadzieję na oświecenie w dwóch sprawach. Jedną z nich jest elektrodynamika kwantowa, a drugą turbulentny ruch płynów. Co do tej pierwszej jestem raczej optymistą.

Przytoczona na początku artykułu ocena Daniela Bernoulliego – mimo upływu ponad dwustu lat i ogromnego postępu badań hydrodynamicznych – nie straciła na swojej aktualności.