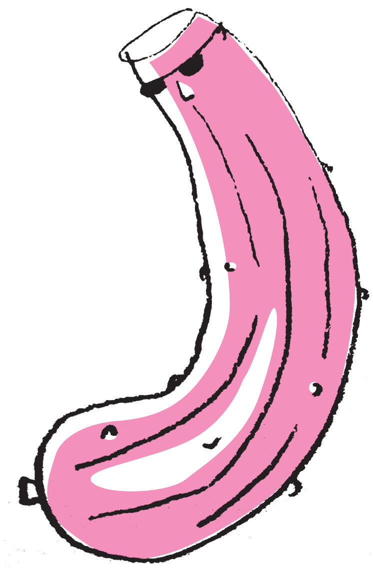
Co słychać u ubogich krewnych?

*Mariusz SKAŁBA**

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Liczby pierwsze? Wiadomo: ich królestwo jest z tego świata, ale nie potrzebują Windsoru! Wszechświatowa gawiedź matematyczna krząta się wokół nich od zawsze – ze spektakularnie umiarkowanym skutkiem. Ale inne liczby też zasługują na uwagę, np. sumy kwadratów dwóch liczb całkowitych. O nich jest ten artykulik.



Niech S oznacza zbiór takich sum:

$$S = \{0, 1, 2, 4, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17, 18, 20, 25, 26, 29, \ldots\}.$$

Mamy bowiem:

$$0 = 0^2+0^2,\ 1 = 1^2+0^2,\ 2 = 1^2+1^2,\ 4 = 2^2+0^2,\ 5 = 2^2+1^2,\ 8 = 2^2+2^2,\ 9 = 3^2+0^2, \ldots$$

Z drugiej strony: żaden wyraz ciągu arytmetycznego $3, 7, 11, 15, 19, \ldots$ nie należy do S. To jest pierwsze ważne (mimo swej prostoty) twierdzenie dotyczące S. Oto dowód. Punktem wyjścia jest obserwacja, że dla dowolnej liczby całkowitej x liczba x^2 daje resztę 0 albo 1 przy dzieleniu przez 4. Rzeczywiście liczba x jest zawsze jednej z postaci $x = 2k$ albo $x = 2k + 1$, gdzie k jest liczbą całkowitą. W żargonie ujmujemy to tak: *każda liczba jest albo parzysta albo nieparzysta.* W pierwszym przypadku $x^2 = 4k^2$, czyli x^2 daje resztę 0 z dzielenia przez 4 (a więc dzieli się przez 4). W drugim przypadku:

$$x^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1,$$

czyli x^2 daje resztę 1 z dzielenia przez 4. Po tym przygotowaniu widać, że suma $x^2 + y^2$ w dzieleniu przez 4 może dawać tylko jedną z reszt: $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 2$. Zatem $x^2 + y^2$ nigdy nie może być postaci $4k + 3$. I to kończy dowód naszego pierwszego twierdzenia o zbiorze S.

Jak powszechnie wiadomo (przynajmniej od czasów Euklidesa), liczb pierwszych jest nieskończenie wiele. Ale nie wiadomo do dziś, czy istnieje nieskończenie wiele liczb pierwszych p takich, że liczba $p + 2$ też jest pierwsza – takie pary liczb pierwszych nazywamy *bliźniakami.* Oto początkowe bliźniaki: 3 i 5, 5 i 7, 11 i 13, 17 i 19,… Ich odpowiednikiem w rodzinie S są *trojaczki*: tworzą je liczby $n, n + 1, n + 2$, jeśli każda z nich należy do S. Oto najmniejsze takie trójki:

$$8, 9, 10;\ 16, 17, 18;\ 72, 73, 74;\ 80, 81, 82;\ \ldots$$

Z naszego pierwszego twierdzenia wynika, że na pewno nie ma czworaczków, ale odpowiednikiem pytania dotyczącego bliźniaków jest pytanie następujące: *Czy istnieje nieskończenie wiele trojaczków?* Chyba od zawsze wiadomo, że tak. Oto proste uzasadnienie. Załóżmy, że $n, n + 1, n + 2$ są trojaczkami. Ponieważ

$$n = a^2 + b^2, n + 2 = c^2 + d^2,$$

więc

$$n(n + 2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2.$$

Zatem $n^2 + 2n \in S$, czyli mamy następujące „większe" trojaczki: $n^2 + 2n, (n + 1)^2 + 0^2, (n + 1)^2 + 1^2$.

To może jeszcze jakaś uboga wersja hipotezy Goldbacha? Przypomnijmy, że zgodnie z królewską etykietą pytamy:

Czy każda liczba parzysta $\geqslant 4$ jest sumą dwóch liczb pierwszych?

Do dziś nie jest znana odpowiedź na to pytanie, chociaż sprawdzono, że dla każdej liczby parzystej $n \leqslant 4 \cdot 10^{18}$ istnieją takie liczby pierwsze p, q (oczywiście nieparzyste!), że $n = p + q$. Wersję ubogą tej słynnej hipotezy można by wysłowić tak:

Czy dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją $r, s \in S$ takie, że $n = r + s$?

Pytamy zatem, czy dla każdego n istnieją takie liczby całkowite a, b, c, d, że $n = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$? Każdy miłośnik matematyki wie, że pozytywnej odpowiedzi

Rozwiązanie zadania F 1047.
Przyjmijmy, że ładunek Q jest rozłożony równomiernie na powierzchni Ziemi, wówczas wartość pola elektrycznego w każdym punkcie tej powierzchni wynosi:

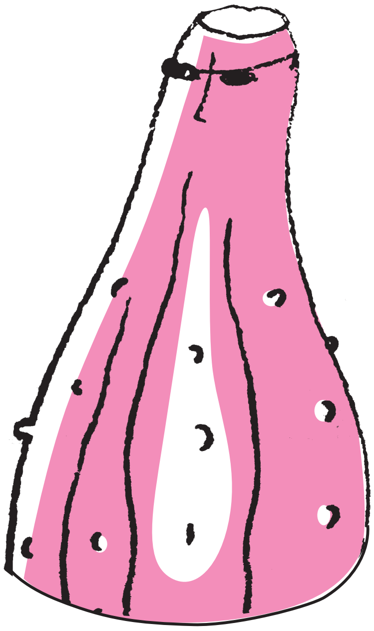
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$

a więc $Q = 4\pi\varepsilon_0 R^2 E$. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $Q \approx 4{,}52 \cdot 10^5$ C. Energia zgromadzona w polu elektrycznym ładunku Q rozmieszczonego równomiernie na powierzchni kuli o promieniu R wynosi:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = 2\pi\varepsilon_0 R^3 E^2.$$

Po podstawieniu danych liczbowych $\mathcal{E} \approx 1{,}44 \cdot 10^{14}$ J, a więc około 4,6 MWlat. Źródłami ładunku są promieniowanie kosmiczne i rozpady pierwiastków promieniotwórczych (np. ^{222}Ra).

Uwaga: Dla oceny wartości ładunku realistyczne założenie, że jest on rozmieszczony na powierzchni Ziemi, nie jest istotne – tę samą wartość pola E otrzymalibyśmy, gdyby ładunek Q był rozmieszczony wewnątrz Ziemi; dla ładunku równomiernie rozmieszczonego wewnątrz Ziemi otrzymalibyśmy energię równą 3/5 wartości obliczonej dla takiego samego ładunku zgromadzonego na jej powierzchni.



na to pytanie (razem z dowodem) udzielił jako pierwszy Joseph Louis Lagrange w 1770 roku.

No cóż... rodziny się nie wybiera, ale na koniec przyjrzyjmy się rozłożystości drzew genealogicznych. Dla $x > 0$ oznaczmy przez $\pi(x)$ liczbę liczb pierwszych p spełniających nierówność $p \leqslant x$; na przykład $\pi(15) = 6$, gdyż wszystkie liczby pierwsze p spełniające $p \leqslant 15$ to: $2, 3, 5, 7, 11, 13$. Analogicznie niech $S(x)$ oznacza liczbę liczb $s \in S$ spełniających $s \leqslant x$; mamy przykładowo $S(20) = 13$. W roku 1896 Jacques Salomon Hadamard i niezależnie Charles Jean de Vallée Poussin udowodnili, że

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1.$$

Jest to słynne *twierdzenie o liczbach pierwszych.* Natomiast w roku 1908 Edmund Landau wykazał odpowiednik dla zbioru S:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{S(x)}{cx/\sqrt{\log x}} = 1,$$

gdzie $c \approx 0{,}764224$ to tzw. stała Landaua–Ramanujana. Oba dowody są ważne, trudne i ciekawe. Tak więc w przedziale od 0 do x pospolitych sum dwóch kwadratów jest około $\sqrt{\log x}$ razy więcej niż najszlachetniej urodzonych liczb pierwszych. Zdradźmy na koniec, że statystycznie połowa liczb pierwszych zadaje się z plebsem, a mówi o tym twierdzenie Girarda–Fermata–Eulera, któremu nie można odmówić naturalnej urody:

Każda liczba pierwsza p postaci $4k + 1$ należy do S:

$$\exists x, y \in \mathbb{N}, p = x^2 + y^2.$$

Jedynaczka 2 też się zadaje: $2 = 1^2 + 1^2$. Ale pozostałe liczby pierwsze, czyli te postaci $4k + 3$, trzymają fason, co pokazaliśmy na samym początku.

Laserowa reologia plamkowa

Odwzorowanie mikromechanicznych właściwości tkanki w celu skuteczniejszej diagnostyki chorób

*Kwasi NYANDEY**

* Doktorant,
Instytut Fizyki Polskiej Akademii Nauk

Pomoc w tłumaczeniu tekstu: Daniel Jakubczuk

Aparatura medyczna jest niezbędnym elementem wspierającym pracowników służby zdrowia – lekarzy, pielęgniarki, analityków laboratoryjnych – w diagnozowaniu i leczeniu pacjentów. Postawienie właściwej diagnozy jest nierzadko trudnym zadaniem, ponieważ wiele objawów chorobowych nie jest jednoznacznych. Na przykład ból szyi może pojawiać się w wielu, niezwiązanych ze sobą, schorzeniach. Dlatego aby stworzyć skuteczną metodę diagnostyczną, najlepiej wykorzystać kilka sposobów oceny funkcji narządów i właściwości tkanek. Stąd złożoność współczesnych metod diagnostyki medycznej i stosowanej aparatury.

Techniki optyczne w diagnostyce. We współczesnej medycynie istnieje szereg metod diagnostycznych (zarówno prostych, jak i złożonych) wykorzystujących techniki optyczne, czy ogólniej – propagację fal elektromagnetycznych. Najprostsze z nich obejmują prześwietlanie tkanek zawierających naczynia krwionośne i, poprzez obserwację światła rozproszonego wstecz lub transmitowanego, umożliwiają pomiar tętna i stopnia utlenienia krwi. W czasie pandemii COVID-19 wiele osób spotkało się już z tak właśnie działającym pulsoksymetrem. Inne, bardziej złożone systemy obrazowania do celów medycznych obejmują na przykład analizę ekstynkcji (absorpcji i rozpraszania) promieniowania rentgenowskiego w tkankach – aparaty do prześwietleń i tomografy komputerowe, czy mniej znaną koherencyjną tomografię optyczną (OCT). Blisko spokrewniona z OCT jest koherencyjna elastografia optyczna (OCE), w której zmiany w tkance spowodowane zewnętrznym obciążeniem są odwzorowywane w optyczną odpowiedź tkanki.

Typowy wzór interferencyjny LSR. Ilustracja zaczerpnięta z [2]