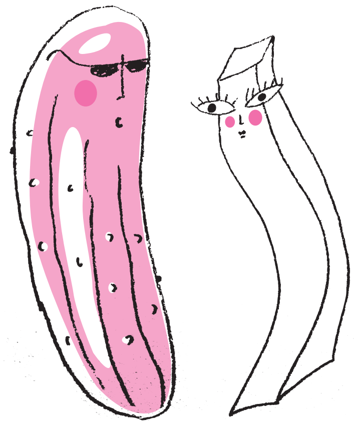


$$\begin{array}{ll}
2 \text{ głosy:} & A \succ B \succ D \succ C,\\
3 \text{ głosy:} & B \succ D \succ C \succ A,\\
3 \text{ głosy:} & C \succ A \succ B \succ D,\\
2 \text{ głosy:} & D \succ C \succ A \succ B.
\end{array}$$

Przypuśćmy, że metoda $\mathcal{W}$ wybiera A lub B. Możemy to zrobić bez straty ogólności ze względu na symetrię: zamieniając etykietami A z D i B z C, otrzymamy identyczny układ głosów. Teraz rozważmy układ I_1 otrzymany z I_0 przez dodanie 2 dodatkowych głosów, dopisanych na początku:

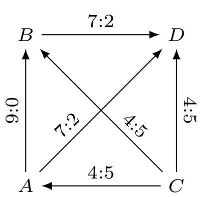
$$\begin{array}{ll}
2 \text{ głosy:} & A \succ B \succ C \succ D,\\
2 \text{ głosy:} & A \succ B \succ D \succ C,\\
3 \text{ głosy:} & B \succ D \succ C \succ A,\\
3 \text{ głosy:} & C \succ A \succ B \succ D,\\
2 \text{ głosy:} & D \succ C \succ A \succ B.
\end{array}$$

Jeśli metoda $\mathcal{W}$ w I_0 wybiera A lub B, to w I_1, z aksjomatu uczestnictwa, też wybiera A lub B – pokażemy, że obydwie te możliwości prowadzą do sprzeczności.

Przypuśćmy, że metoda $\mathcal{W}$ w I_1 wybiera A. Wtedy rozpatrujemy układ I_2 (otrzymany z I_1 przez skasowanie 3 środkowych głosów):

$$\begin{array}{ll}
2 \text{ głosy:} & A \succ B \succ C \succ D,\\
2 \text{ głosy:} & A \succ B \succ D \succ C,\\
3 \text{ głosy:} & C \succ A \succ B \succ D,\\
2 \text{ głosy:} & D \succ C \succ A \succ B.
\end{array}$$

Graf pojedynków dla I_2

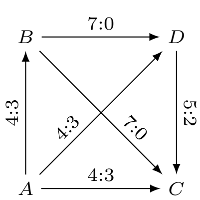


W takiej sytuacji C jest zwycięzcą condorcetowskim, zatem tylko on zostanie wybrany przez $\mathcal{W}$. Ale wtedy z aksjomatu uczestnictwa wynika, że po dodaniu 3 głosów $B \succ D \succ C \succ A$ zwycięzcą nie może zostać A – a przecież po takim dodaniu otrzymujemy I_1! Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zatem jedyna możliwość jest taka, że w I_1 wygrywa B. Wtedy rozpatrujemy układ I_3 (otrzymany z I_1 przez skasowanie 5 ostatnich głosów):

$$\begin{array}{ll}
2 \text{ głosy:} & A \succ B \succ C \succ D,\\
2 \text{ głosy:} & A \succ B \succ D \succ C,\\
3 \text{ głosy:} & B \succ D \succ C \succ A.
\end{array}$$

Graf pojedynków dla I_3



Tutaj to A jest zwycięzcą condorcetowskim, zatem tylko on zostanie wybrany przez $\mathcal{W}$. Ale wtedy z aksjomatu uczestnictwa wynika, że po dodaniu 3 głosów $C \succ A \succ B \succ D$ i 2 głosów $D \succ C \succ A \succ B$ zwycięzcą nie może zostać B – a po takim dodaniu otrzymujemy ponownie I_1. Zatem również tu otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód. □

Ijon Tichy na orbicie wokółksiężycowej

*Paweł TURKOWSKI**

* Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Ijon Tichy to jeden z bohaterów wykreowanych przez Stanisława Lema. Stał się na tyle znany, że jego imię w formie „Ijontichy” nadano niewielkiej planetoidzie krążącej pomiędzy orbitą Marsa i Jowisza. W książce „Pokój na Ziemi” Tichy pojawia się, aby spełnić pewną ważną misję na powierzchni Księżyca. Swoje zadanie ma wykonać na odległość, posługując się „zdalnikiem”. Zdalnik nie jest samodzielnym robotem, lecz tworem, którego poczynaniami trzeba sterować na bieżąco poprzez zespół przymocowanych do ciała Tichego sensorów. Gdyby próbować to sterowanie prowadzić z Ziemi, to opóźnienie działania zdalnika związane z dystansem, który dzieli Ziemię i Księżyc, wyniosłoby:

$$t = \frac{2\,d}{c},$$

przy czym: t – czas opóźnienia, d – odległość Ziemia–Księżyc, c – prędkość światła w próżni. Opóźnienie to ze względu na eliptyczny kształt orbity księżycowej waha się w granicach od 2,4 s do 2,7 s. Ponieważ taki czas reakcji zdalnika jest za długi, Tichy jako doświadczony międzygwiezdny podróżnik zostaje wysłany na orbitę księżycową, by sterować zdalnikiem z mniejszej odległości.

Astronomiczne zagadnienie dwóch ciał

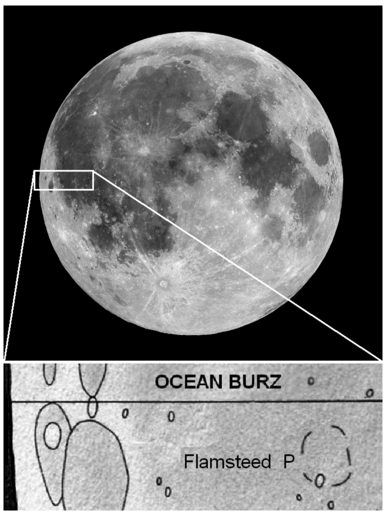
Załóżmy, że Tichy krąży wokół Księżyca w płaszczyźnie równikowej na wysokości 100 km po orbicie kołowej, podobnie jak astronauci programu Apollo. Masa statku Tichego m jest niezmiernie mała w porównaniu z masą Księżyca, zatem możemy przyjąć, że środek masy tego układu dwóch ciał pokrywa się ze środkiem masy Księżyca. Tichy obiegałby Księżyc z prędkością kątową ω spełniającą warunek:

$$G\frac{M_\mathrm{K}\, m}{r^2} = m\,\omega^2 r.$$

Wyrażenie po lewej stronie tego równania to siła grawitacyjnego przyciągania statku Tichego przez Księżyc, przy czym r oznacza jego odległość od środka Księżyca, G – stałą grawitacji, M_K – masę Księżyca. Po prawej stronie równania, zgodnie z II zasadą dynamiki, rozpoznajemy iloczyn masy statku Tichego i przyspieszenia dośrodkowego $\omega^2 r$. Ponieważ prędkość kątowa $\omega = 2\pi/T$, więc czas T jednego obiegu po takiej orbicie wynosi:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{G\,M_\mathrm{K}}}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych: $r = 100\ \mathrm{km} + 1737\ \mathrm{km} = 1837\ \mathrm{km}$ (1837 km to promień Księżyca), $G = 6{,}674 \times 10^{-11}\ \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg\,s}^2}$ oraz $\mathrm{M_K} = 7{,}248 \times 10^{22}$ kg, otrzymujemy $T = 7065$ s, czyli $T = 1^\mathrm{h}58^\mathrm{m}$. Uzyskany wynik jest podobny do czasu jednego okrążenia Ziemi przez Jurija Gagarina. Ta zbieżność związana jest z tym, że średnia gęstość Ziemi 5,51 g/cm^3 nie różni się bardzo od gęstości Księżyca (3,34 g/cm^3), a czas obiegu na niskiej orbicie wokół dowolnego ciała niebieskiego jest odwrotnie proporcjonalny do pierwiastka z jego gęstości.



Rys. 1. Miejsce lądowania „zdalnika", krater Flamsteed P widziany jest z Ziemi blisko lewej krawędzi tarczy Księżyca

Z wysokości 100 km Tichy widziałby wąski pas Księżyca w pobliżu równika. Lemowy pierwszy zdalnik faktycznie ląduje w tym pasie, na obszarze zwanym Oceanem Burz (rys. 1). Zdalnik wymaga jednak stałej łączności radiowej z Tichym, który nim steruje. Musi więc widzieć statek kosmiczny orbitującego Tichego bez przerw. Gdyby Tichy krążył po omawianej przez nas orbicie, to czas bezpośredniej widoczności jego statku sięgałby najwyżej kilkunastu minut, przez resztę czasu byłby schowany pod horyzontem. Autor wysyła więc Tichego na orbitę „stacjonarną". Domyślamy się, że okres obiegu Księżyca T_s na tej orbicie ma być równy czasowi rotacji Księżyca względem gwiazd stałych, czyli miesiącowi syderycznemu $T_\mathrm{s} = 27^\mathrm{d}07^\mathrm{h}43^\mathrm{m}11^\mathrm{s}{,}5$. Przeanalizujmy, jaki musiałby być promień r_s takiej orbity selenostacjonarnej. Przekształcenie poprzednio użytego już równania do postaci:

$$r_\mathrm{s} = \sqrt[3]{\frac{GM_\mathrm{K}T_\mathrm{s}^2}{4\pi^2}}$$

i wstawienie odpowiednich danych prowadzi do wniosku, że promień r_s musiałby przekraczać 88 tysięcy kilometrów. Jest to wartość zbliżona do $\frac{1}{4}$ odległości Ziemia–Księżyc. Tichemu nie uda się więc sztuka wprowadzenia statku na orbitę stacjonarną, tak by „zawisnąć" nad wybranym punktem równika księżycowego. Znajdzie się ona zbyt blisko Ziemi, której obecności (a co za tym idzie, masy) nie uwzględnialiśmy w obliczeniach.

Astronomiczne zagadnienie trzech ciał i punkty Lagrange'a

Wokółksiężycowa orbita stacjonarna co prawda nie istnieje, ale na orbicie wokółziemskiej można znaleźć szczególne punkty, w których statek Tichego mógłby przebywać jako nieruchomy dla księżycowego obserwatora. Jest ich tylko pięć i noszą nazwę punktów Lagrange'a. Umieszczony w jednym z nich statek Tichego poruszałby się po wokółziemskiej orbicie współbieżnie z Księżycem, wykonując jeden obieg w czasie miesiąca syderycznego T_s.

Wbrew pozorom żaden z punktów Lagrange'a nie leży dokładnie na orbicie księżycowej. Możliwość obiegu Ziemi przez statek kosmiczny w czasie T_s tym

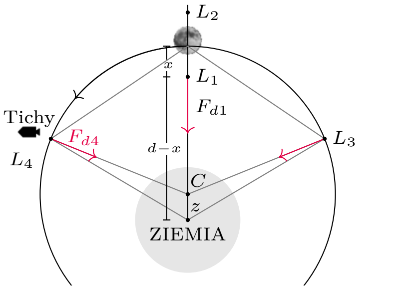
Rozwiązanie zadania F 1048.
Przed rozpoczęciem ruchu windy ciężarek będzie spoczywał, a sprężyna będzie rozciągnięta do długości $x_0 = l + mg/k$.

W przypadku a) w chwili rozpoczęcia ruchu sprężyna jest rozciągnięta do długości $x_0 = l + mg/k$, a ciężarek porusza się względem punktu zawieszenia sprężyny z prędkością v w górę – to stan początkowy ruchu (winda poruszająca się ze stałą prędkością jest układem inercjalnym). Ciężarek będzie wykonywał drgania harmoniczne względem położenia x_0 z okresem $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ i amplitudą $A = v\sqrt{m/k}$. Długość x sprężyny będzie zmieniała się z czasem t według wzoru:

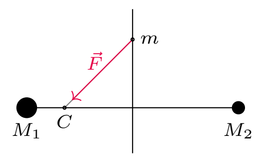
$$x = x_0 - v\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$

W przypadku b) w chwili rozpoczęcia ruchu grawitacja jest „wyłączona", a sprężyna rozciągnięta do długości x_0 – to stan początkowy ruchu. Ciężarek będzie wykonywał drgania względem położenia $x = l$ o amplitudzie mg/k. Długość x sprężyny będzie zmieniała się z czasem t według wzoru:

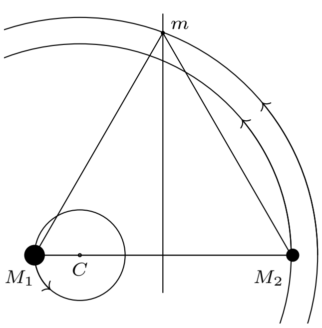
$$x = l + \frac{mg}{k}\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m}}\right).$$



Rys. 2. Ziemia, Księżyc oraz statek kosmiczny Tichego orbitujący wokół Ziemi w jednym z punktów Lagrange'a. Dla uzyskania poglądowości kulę ziemską i Księżyc narysowano w innej skali niż ich wzajemną odległość, a tarczę Księżyca przedstawiono tak, jak ją widzimy z Ziemi



Rys. 3. Niech C oznacza środek masy układu dwóch ciał niebieskich o dowolnych masach M_1, M_2, natomiast m jest niewielką ($m \ll M_1$, $m \ll M_2$) masą próbną. Na masę m działa ze strony M_1 i M_2 wypadkowa siła grawitacji F skierowana do punktu C wtedy i tylko wtedy, gdy leży on na symetralnej odcinka łączącego M_1 i M_2. Dowód polega na wykazaniu, że kąt, który tworzy siła F z symetralną odcinka $M_1\,M_2$, jest równy kątowi $C\,m\,D$



Rys. 4. Jeśli środki mas ciał niebieskich o masach M_1, M_2 oraz masa próbna m tworzą układ trójkąta równobocznego, to wszystkie te trzy ciała mogą poruszać się jednocześnie wokół środka masy C po orbitach kołowych w jednej płaszczyźnie, w tym samym kierunku i z tą samą prędkością kątową. Ponieważ wiemy już, że siła F działająca na m skierowana jest do punktu C, to dla dowodu wystarczy wykazać na mocy II zasady dynamiki, że prędkość kątowa obiegu każdego z trzech ciał wokół C jest jednakowa. Zauważmy, że dla układu Ziemia–Księżyc środek masy układu C leży wewnątrz Ziemi

samym, co okres jej obiegu przez Księżyc, ale po orbicie o innym promieniu, może na pierwszy rzut oka budzić zdziwienie. Jest to jednak możliwe dzięki temu, że rolę siły dośrodkowej działającej na statek Tichego pełni nie tylko przyciąganie grawitacyjne Ziemi. Jest to wektorowa suma sił przyciągania jego statku przez Ziemię i przez Księżyc o odpowiednim kierunku i wartości.

Rozważmy dwa z pięciu punktów Lagrange'a oznaczone jako L_1 i L_2, położone na linii Ziemia–Księżyc (rys. 2). Punkt L_5, pominięty na rysunku, położony jest po przeciwnej stronie Ziemi niż Księżyc i wobec tego dla Tichego jest nieprzydatny. Obliczymy odległość punktów L_1 i L_2 od Księżyca.

Załóżmy, że mamy do czynienia z orbitami kołowymi o środkach położonych w środku masy układu Ziemia–Księżyc (C). Ponadto przyjmijmy, że odległość Ziemia–Księżyc $d = 384{,}4$ tys. km, punkt C jest odległy od środka Ziemi o $z = 4{,}670$ tys. km, a masa Ziemi $M_\mathrm{Z} = 81{,}28\,M_\mathrm{K}$. Dla statku Tichego umieszczonego w punkcie L_1 i poruszającego się wokół punktu C z prędkością kątową $\omega = 2\pi/T_\mathrm{s}$ musi być spełniona II zasada dynamiki:

$$\frac{GM_\mathrm{Z}\,m}{(d-x)^2} - \frac{GM_\mathrm{K}\,m}{x^2} = m\,\omega^2(d-x-z).$$

Podobnie dla statku umieszczonego w punkcie L_2:

$$\frac{GM_\mathrm{Z}\,m}{(d+x)^2} + \frac{GM_\mathrm{K}\,m}{x^2} = m\,\omega^2(d+x-z).$$

Po podstawieniu danych do powyższych równań otrzymujemy dwa podobne do siebie równania piątego stopnia na odległości x Tichego od środka Księżyca. Dla punktu L_1:

$$A\,x^5 + B\,x^4 + C\,x^3 - 0{,}76\,x^2 + 2d\,x - d^2 = 0,$$

a dla punktu L_2:

$$A\,x^5 - B\,x^4 + C\,x^3 - 1{,}24\,x^2 - 2d\,x - d^2 = 0,$$

gdzie $A = 1{,}445 \times 10^{-6}$ [(tys. km)$^{-3}$], $B = -0{,}001660$ [(tys. km)$^{-2}$], $C = 0{,}6352$ [(tys. km)$^{-1}$]. Po rozwiązaniu na drodze numerycznej pierwszego z tych równań otrzymujemy wynik $x = 57{,}9$ tys. km. Jest to odległość akceptowalna na potrzeby Tichego. Mniej użyteczny dla Tichego punkt L_2 położony jest za tarczą Księżyca w odległości $x = 64{,}7$ tys. km.

Ciekawą cechą rozpatrywanych tu obu równań i wynikającej z nich lokalizacji punktów L_1 i L_2 jest to, że im większy byłby stosunek masy Ziemi do masy Księżyca, tym bardziej rozwiązania zbliżałyby się do tej samej wartości. Można sprawdzić poprzez rozwiązanie dwóch równań analogicznych do przedstawionych powyżej, ale dotyczących Słońca i Ziemi, że odległość punktu L_1 od Ziemi wynosi $x = 1{,}491$ mln km, a dla L_2 jest prawie identyczna: $x = 1{,}502$ mln km. Te punkty mają znaczenie praktyczne. Niektóre sztuczne satelity umieszczane są w ich pobliżu i orbitują wokół Słońca współbieżnie z Ziemią w czasie jednego roku. Dodajmy, że przebywanie nieruchomo w okolicy punktów L_1, L_2 oraz L_5 na dłuższą metę nie jest możliwe – są to położenia niestabilne. Natomiast można wokół nich wykonywać powolne obiegi po kwaziperiodycznych orbitach bez używania napędu. To jedna z niespodzianek, którą serwuje nam układ trzech ciał oddziaływających grawitacyjnie.

A co z pozostałymi punktami Lagrange'a, L_3 oraz L_4? Rzecz ciekawa: niezależnie od wartości mas Ziemia, Księżyc i punkt L_4 lub L_3 tworzą dokładnie trójkąt równoboczny (patrz rys. 3 i rys. 4). Czyni to punkty L_3 i L_4 nieprzydatnymi dla Tichego, ponieważ ich odległość od Księżyca równa odległości Ziemia–Księżyc jest dla potrzeb jego misji zbyt duża, nadal generująca zauważalne opóźnienie w sterowaniu zdalnikiem.

Powracając do misji Tichego, musimy się pogodzić z tym, że według autora jego wokółksiężycowe orbitowanie odbywało się na wysokości niezgodnej z naszymi obliczeniami. Dla biegu wydarzeń przedstawionych w książce kluczowe znaczenie miało jednak coś innego. Tichy po kilku próbach wywiązania się ze swojej misji przy pomocy zdalników, wbrew otrzymanemu kategorycznemu zakazowi, w końcu opuścił orbitę „stacjonarną" i zdecydował się na osobiste lądowanie na Księżycu.