Jak liczyć głosy?

*Grzegorz PIERCZYŃSKI**

* Doktorant, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Wyobraźmy sobie grupę studentów, którzy po pandemii wreszcie mieli okazję się poznać na żywo i żeby się zintegrować, postanowili zorganizować wspólne wyjście na obiad. Szybko się jednak okazało, że podjęcie decyzji, gdzie się udać, jest znacznie trudniejsze, niż wydawało się na początku – różne osoby mają zupełnie różne oczekiwania i preferencje dotyczące miejsca. Całkiem spora grupa zaproponowała pobliski fast food (oznaczmy go jako) – przeciw czemu głośno zaprotestowała większość studentów, dla której ważne jest zdrowe odżywianie. Spośród nich wielu jest wegetarianami lub weganami, więc ci zaproponowali swoją ulubioną restaurację, serwującą wyłącznie dania wegańskie ( ), co jednak wzbudziło niechęć osób mających ochotę na mięsny posiłek. Inne zgłoszone propozycje to dwie włoskie restauracje (i) i naleśnikarnia ( ).

– Skoro nie możemy się porozumieć, to zróbmy głosowanie! Podejmijmy decyzję demokratycznie! – rozległy się głosy po dłuższej chwili jałowych przekrzykiwań. Każdy student przedstawił swój *ranking preferencji*, szeregując dostępne opcje od najlepszej do najgorszej. Wyniki okazały się następujące:

6 osób: $\succ$ $\succ$ $\succ$ $\succ$,
5 osób: $\succ$ $\succ$ $\succ$ $\succ$,
3 osoby: $\succ$ $\succ$ $\succ$ $\succ$,
1 osoba: $\succ$ $\succ$ $\succ$ $\succ$.

Jednak zupełnie nie rozwiązało to konfliktu. Zwolennicy natychmiast ogłosili swoje zwycięstwo – w końcu patrząc na najbardziej preferowaną opcję, widać, że zdobyli najwięcej głosów! Zwolennicy natomiast stwierdzili, że zdobył mniej niż 50% głosów, więc – podobnie jak w przypadku wyborów prezydenckich – powinna się odbyć druga tura głosowania, do której weszłyby dwie opcje występujące najczęściej na pierwszym miejscu. Przy takiej metodzie to okazałaby się zwycięzcą, pokonując w drugiej turze stosunkiem głosów 9 : 6.

Gdyby historyjka miała miejsce w Australii, to zwolennicy mogliby się powołać na metodę *pojedynczego głosu przechodniego*, wykorzystywaną w tym kraju w wyborach do Senatu. Według tej metody głosowanie powinno być wieloturowe, przy czym za każdym razem powinna odpadać opcja wskazana najrzadziej na pierwszym miejscu, a głosy na nią oddane powinny przechodzić na następną opcję w rankingu preferencji. W tym przypadku również zwycięzcą okazałaby się restauracja wegańska.

Problem, na który natrafili studenci, został już w przeszłości zauważony przez filozofów i matematyków zajmujących się teorią wyboru społecznego. Wielu z nich zwróciło uwagę, że w sytuacji braku wyraźnej większości powinno nas interesować wybranie opcji najbardziej kompromisowej. W naszym przypadku na oko takimi opcjami są i . Jednak czy da się jednoznacznie rozstrzygnąć, która z nich jest lepsza? Jak można zdefiniować „kompromisowy wybór” w ogólnej sytuacji? Dwóch matematyków francuskich żyjących w XVIII wieku – Nicolas de Condorcet i Jean-Charles de Borda – udzieliło zupełnie różnych odpowiedzi na to pytanie.

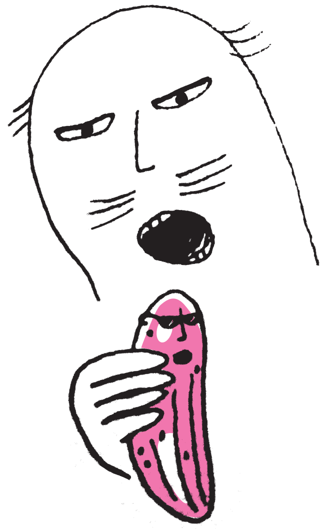
Tak naprawdę metody znane pod nazwiskami Bordy i Condorceta wymyślił już w 1299 roku majorkański teolog Ramon Llull, jednak jego manuskrypty na ten temat zostały odkryte dopiero w 2001 roku.

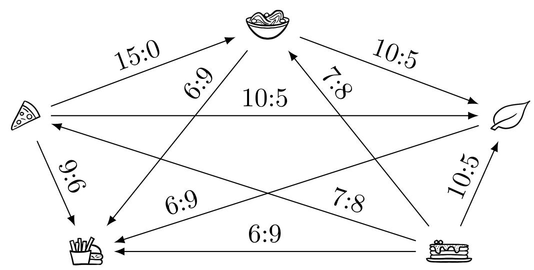
Postępując zgodnie z metodą zaproponowaną przez Bordę, oznaczamy liczbę dostępnych opcji przez m i od każdego wyborcy każdej opcji przydzielamy $m-i$ punktów za pojawienie się na i-tej pozycji w jego rankingu (czyli np. od wyborcy z preferencjami $\succ$ $\succ$ $\succ$ $\succ$ opcje w jego rankingu dostają kolejno 4, 3, 2, 1 i 0 punktów). Zwycięzcą powinna być ta opcja, która sumarycznie otrzymała najwięcej punktów. Wyniki uzyskane tą metodą są następujące:

24	41	26	35	24

Wygrywa zatem .

Borda przedstawił również alternatywną definicję swojej metody. Wyobraźmy sobie, że rozgrywamy pojedynki „jeden na jeden” między wszystkimi parami opcji. Niech $\mathrm{Pref}(A,B)$ oznacza liczbę wyborców preferujących opcję A nad B. Wtedy liczba punktów dla każdej opcji A wynosi $\sum_{B\neq A}\mathrm{Pref}(A,B)$. Możemy to zilustrować w formie grafu:





Prosty rachunek pokazuje, że w naszym przykładzie rzeczywiście obydwie definicje są równoważne – udowodnienie tego w ogólnym przypadku pozostawiamy Dociekliwemu Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Metoda Bordy, choć została przyjęta m.in. przez Francuską Akademię Nauk do wyboru nowych członków, spotkała się z krytyką markiza de Condorceta. Zgodnie z jego opinią w naszej sytuacji wygrać powinna . Zauważmy, że w rozważanym grafie pojedynków wygrywa pojedynek z (zatem jeśli studenci zdecydują się na , to większość będzie wolała zmienić decyzję na). Możemy nawet powiedzieć coś więcej: wygrywa pojedynek z każdą inną opcją!

Jedyny powód, dla którego metoda Bordy wybiera , wynika ze zgłoszenia drugiej włoskiej restauracji , która jest jej „gorszym klonem" – każdy głosujący woli bardziej niż , co sztucznie zawyża wynik punktowy (gdyby nie obecność , zwycięzcą byłaby). Ciekawe w takim razie, kto w ogóle zaproponował opcję ? Czyżby zwolennik ?

Nicolas de Condorcet stwierdził, że to właśnie opcja wygrywająca pojedynek z każdym przeciwnikiem jest najlepszym wyborem (dlatego taką opcję nazywa się *zwycięzcą condorcetowskim*). Czy jednak zawsze taka opcja musi istnieć?

Wyobraźmy sobie wybory, w których startuje 3 kandydatów, A, B, C, i mamy 3 wyborców o następujących preferencjach:

$$A \succ B \succ C,$$
$$B \succ C \succ A,$$
$$C \succ A \succ B.$$

Okazuje się, że A wygrywa pojedynek z B, B wygrywa z C... a jednocześnie C wygrywa z A! Zwycięzca condorcetowski może zatem nie istnieć – ten fakt nazywany jest *paradoksem condorcetowskim.*

Dziś ta metoda jest często nazywana metodą Copelanda, na cześć matematyka amerykańskiego, który odkrył ją niezależnie w 1951 roku. Jednak Condorcet (gdyby żył) nie powinien mieć o to pretensji, gdyż jak napisaliśmy wcześniej, i tak właściwszą nazwą byłaby „metoda Llulla".

Jak sobie można z tym poradzić? Metoda zaproponowana przez Condorceta zakładała wybór kandydata, który wygrał *najwięcej* pojedynków. W powyższym przykładzie należy więc uznać, że mamy remis między kandydatami A, B, C. Istnieją też inne, bardziej skomplikowane metody, które zawsze wybierają zwycięzcę condorcetowskiego (jako unikalnego zwycięzcę), gdy istnieje – nazywa się je ogólnie *metodami condorcetowskimi.*

Czyj zatem pomysł jest lepszy, Bordy czy Condorceta? Nie jest to oczywiste – nie ma metody wyborczej, która byłaby wolna od rozmaitych paradoksów. Przedstawiona dotychczas intuicja raczej sugerowałaby wyższość metod condorcetowskich, więc na zakończenie, dla równowagi, podamy argument przeciwko nim.

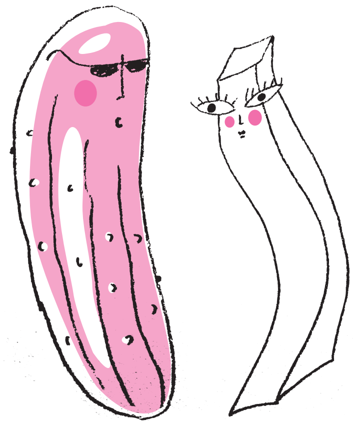
[*]Za każdym razem, gdy bez dalszego komentarza mówimy, że metoda wyborcza *wybiera* jakiegoś kandydata, mamy na myśli to, że jest on w gronie zwycięzców – nawet jeśli remisuje z innymi kandydatami.

Rozważmy metodę wyborczą $\mathcal{W}$ i dowolny układ głosów, dla którego ta metoda wybiera[*] kandydata A, ale nie wybiera B. Metoda $\mathcal{W}$ spełnia aksjomat *uczestnictwa,* jeżeli po dodaniu głosu, w którym $A \succ B$, albo po usunięciu głosu, w którym $B \succ A$, metoda nie wybierze B. Intuicyjnie oznacza to, że wyborcy nigdy nie mogą sobie „zaszkodzić" poprzez uczestnictwo w wyborach – co wydaje się racjonalnym oczekiwaniem. Dla reguły Bordy jest to w oczywisty sposób spełnione: dodając nowy głos, uzyskuje się wzrost różnicy w liczbie punktów między zwycięskim A a każdym mniej preferowanym kandydatem B. Nie jest to jednak prawdą dla żadnej metody condorcetowskiej, co pokażemy w następującym twierdzeniu.

Dowód opiera się na pracy: F. Brandt, C. Geist and D. Peters. *Optimal bounds for the no-show paradox via SAT solving.* Mathematical Social Sciences 90 (2017): 18–27.

Twierdzenie 1. *Żadna metoda condorcetowska nie spełnia aksjomatu uczestnictwa.*

Dowód. Załóżmy nie wprost, że taka metoda wyborcza $\mathcal{W}$ istnieje. Rozważmy następujący układ 10 głosów I_0:



2 głosy: $A \succ B \succ D \succ C$,
3 głosy: $B \succ D \succ C \succ A$,
3 głosy: $C \succ A \succ B \succ D$,
2 głosy: $D \succ C \succ A \succ B$.

Przypuśćmy, że metoda $\mathcal{W}$ wybiera A lub B. Możemy to zrobić bez straty ogólności ze względu na symetrię: zamieniając etykietami A z D i B z C, otrzymamy identyczny układ głosów. Teraz rozważmy układ I_1 otrzymany z I_0 przez dodanie 2 dodatkowych głosów, dopisanych na początku:

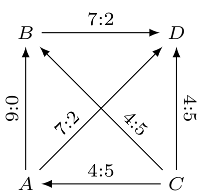
2 głosy: $A \succ B \succ C \succ D$,
2 głosy: $A \succ B \succ D \succ C$,
3 głosy: $B \succ D \succ C \succ A$,
3 głosy: $C \succ A \succ B \succ D$,
2 głosy: $D \succ C \succ A \succ B$.

Jeśli metoda $\mathcal{W}$ w I_0 wybiera A lub B, to w I_1, z aksjomatu uczestnictwa, też wybiera A lub B – pokażemy, że obydwie te możliwości prowadzą do sprzeczności.

Przypuśćmy, że metoda $\mathcal{W}$ w I_1 wybiera A. Wtedy rozpatrujemy układ I_2 (otrzymany z I_1 przez skasowanie 3 środkowych głosów):

2 głosy: $A \succ B \succ C \succ D$,
2 głosy: $A \succ B \succ D \succ C$,
3 głosy: $C \succ A \succ B \succ D$,
2 głosy: $D \succ C \succ A \succ B$.

Graf pojedynków dla I_2

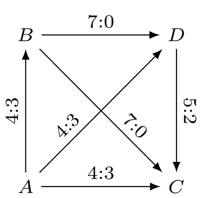


W takiej sytuacji C jest zwycięzcą condorcetowskim, zatem tylko on zostanie wybrany przez $\mathcal{W}$. Ale wtedy z aksjomatu uczestnictwa wynika, że po dodaniu 3 głosów $B \succ D \succ C \succ A$ zwycięzcą nie może zostać A – a przecież po takim dodaniu otrzymujemy I_1! Otrzymaliśmy sprzeczność.

Zatem jedyna możliwość jest taka, że w I_1 wygrywa B. Wtedy rozpatrujemy układ I_3 (otrzymany z I_1 przez skasowanie 5 ostatnich głosów):

2 głosy: $A \succ B \succ C \succ D$,
2 głosy: $A \succ B \succ D \succ C$,
3 głosy: $B \succ D \succ C \succ A$.

Graf pojedynków dla I_3



Tutaj to A jest zwycięzcą condorcetowskim, zatem tylko on zostanie wybrany przez $\mathcal{W}$. Ale wtedy z aksjomatu uczestnictwa wynika, że po dodaniu 3 głosów $C \succ A \succ B \succ D$ i 2 głosów $D \succ C \succ A \succ B$ zwycięzcą nie może zostać B – a po takim dodaniu otrzymujemy ponownie I_1. Zatem również tu otrzymaliśmy sprzeczność, która kończy dowód. □

Ijon Tichy na orbicie wokółksiężycowej

*Paweł TURKOWSKI**

* Uniwersytet Rolniczy w Krakowie

Ijon Tichy to jeden z bohaterów wykreowanych przez Stanisława Lema. Stał się na tyle znany, że jego imię w formie „Ijontichy" nadano niewielkiej planetoidzie krążącej pomiędzy orbitą Marsa i Jowisza. W książce „Pokój na Ziemi" Tichy pojawia się, aby spełnić pewną ważną misję na powierzchni Księżyca. Swoje zadanie ma wykonać na odległość, posługując się „zdalnikiem". Zdalnik nie jest samodzielnym robotem, lecz tworem, którego poczynaniami trzeba sterować na bieżąco poprzez zespół przymocowanych do ciała Tichego sensorów. Gdyby próbować to sterowanie prowadzić z Ziemi, to opóźnienie działania zdalnika związane z dystansem, który dzieli Ziemię i Księżyc, wyniosłoby:

$$t = \frac{2\,d}{c},$$

przy czym: t – czas opóźnienia, d – odległość Ziemia–Księżyc, c – prędkość światła w próżni. Opóźnienie to ze względu na eliptyczny kształt orbity księżycowej waha się w granicach od 2,4 s do 2,7 s. Ponieważ taki czas reakcji