Na karuzeli okręcisz się

Bartłomiej BZDĘGA

Poniżej rozwiążemy następujące zadanie z etapu korespondencyjnego bieżącej Olimpiady Matematycznej.

Zadanie. *Dana jest liczba pierwsza p. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb całkowitych n, dla których liczba $2^{3^n} - n$ jest podzielna przez p.*

Zanim to zrobimy, przedstawię dwa lematy. Przypomnijmy, że ciąg (a) jest *okresowy*, jeśli istnieje taka stała naturalna $t > 0$, że dla każdego całkowitego dodatniego n zachodzi równość $a_{n+t} = a_n$. Najmniejszą taką liczbę t nazywamy *okresem zasadniczym* ciągu (a). Mówimy, że ciąg (a) jest *okresowy od miejsca* n_0, jeśli równość $a_{n+t} = a_n$ zachodzi dla wszystkich $n \geqslant n_0$, przy czym dla $n < n_0$ równość ta nie musi zachodzić, ale może.

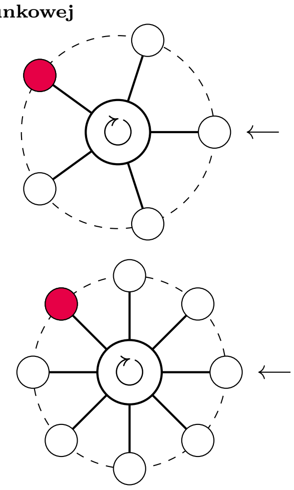
Lemat o jednej karuzeli. Niech (a) będzie ciągiem, którego wszystkie wyrazy należą do pewnego skończonego zbioru A. Załóżmy, że istnieje taka funkcja f, że dla każdego całkowitego dodatniego n mamy $a_{n+1} = f(a_n)$ (czyli każdy kolejny wyraz zależy tylko od wartości poprzedniego). Wówczas ciąg (a) jest od pewnego miejsca okresowy i jego okres zasadniczy nie przekracza liczby elementów zbioru A.

Dowód. Niech $|A| = k$. Wśród wyrazów $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ są pewne dwa równe, mające różne indeksy. Niech będą to a_{n_0} i a_{n_0+t} – wówczas $0 < t \leqslant k$. Zauważmy, że jeśli $a_{n+t} = a_n$, to także $a_{n+1+t} = f(a_{n+t}) = f(a_n) = a_{n+1}$. Wykorzystując tę własność oraz indukcję startującą od n_0, dowodzimy, że $a_{n+t} = a_n$ dla wszystkich $n \geqslant n_0$.

Lemat o dwóch karuzelach. Niech (a) i (b) będą ciągami okresowymi od miejsca n_0, z okresami odpowiednio t_a i t_b, przy czym $\mathtt{NWD}(t_a, t_b) = 1$. Rozważmy dowolną parę (x, y), w której $x = a_k$ i $y = b_l$ dla pewnych $k, l \geqslant n_0$. Wtedy istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, dla których jednocześnie $a_n = x$ i $b_n = y$.

Dowód. Z okresowości danych ciągów wynika, że jeśli $n \geqslant n_0$ oraz $n \equiv k \pmod{t_a}$ i $n \equiv l \pmod{t_b}$, to $a_n = x$ i $b_n = y$. Liczby t_a i t_b są względnie pierwsze, więc na mocy chińskiego twierdzenia o resztach (o którym jeszcze kiedyś napiszę) dwie powyższe kongruencje są równoważne jednej: $n \equiv m \pmod{t_a t_b}$, w której m jest pewną stałą. Liczb $n \geqslant n_0$ spełniających tę kongruencję jest, rzecz jasna, nieskończenie wiele.

Lemat o dwóch karuzelach w wersji rysunkowej



Pierwsza karuzela ma t_1 ramion i dokonuje pełnego obrotu w ciągu t_1 sekund; druga – analogicznie z t_2. Jeśli $\mathtt{NWD}(t_1, t_2) = 1$, to dowolnie wybrane dwa ramiona, po jednym z każdej karuzeli, będą jednocześnie skierowane w prawo raz na $t_1 t_2$ sekund.
(Na rysunku, dla zakolorowanych ramion, będzie to miało miejsce po raz pierwszy po 27 sekundach, a potem co 40 sekund.)

Rozwiązanie zadania. Niech a_n będzie resztą z dzielenia liczby n przez p, a b_n – liczby 2^{3^n} przez p. Chcemy wykazać, że $a_n = b_n$ dla nieskończenie wielu liczb naturalnych n.

Ciąg a_n jest okresowy o okresie zasadniczym $t_a = p$ i występują w nim wszystkie liczby ze zbioru $\{0, 1, \ldots, p-1\}$.

Na mocy równości $2^{3^{n+1}} = (2^{3^n})^3$ wnioskujemy, że $b_{n+1} \equiv b_n^3 \pmod{p}$, więc każdy kolejny wyraz ciągu (b) zależy tylko od poprzedniego. Ponadto zbiór wartości ciągu (b) jest równy $\{0\}$ dla $p = 2$, a dla $p > 2$ nie należy do niego liczba 0, więc dla każdego p ma on mniej niż p elementów. Na mocy lematu o jednej karuzeli, ciąg (b) jest okresowy od pewnego miejsca n_0, a jego okres zasadniczy t_b jest mniejszy niż p.

Niech $x = b_l$ dla pewnego $l \geqslant n_0$ – wtedy $a_k = x$ dla pewnego $k > n_0$. Liczba $t_a = p$ jest pierwsza oraz $t_b < p$, więc $\mathtt{NWD}(t_a, t_b) = 1$. Rozwiązanie kończy zastosowanie lematu o dwóch karuzelach z $x = y$.

Zadania.

1. Ciąg (a) spełnia równanie rekurencyjne $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ z warunkiem początkowym $a_1 = 0$. Udowodnić, że dla każdej liczby pierwszej p istnieją dwie różne liczby całkowite dodatnie m i n, dla których $p \mid a_n + a_m$.
2. Niech $d(m)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby całkowitej dodatniej m. Ciąg liczb całkowitych dodatnich (a) spełnia równość $a_{n+1} = d(a_n) + a_1$ dla $n \geqslant 1$. Dowieść, że ten ciąg jest od pewnego miejsca okresowy.
3. Niech W będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych. Dla pewnych liczb pierwszych $p \neq q$ i pewnych liczb całkowitych dodatnich n_1, n_2 zachodzą podzielności $p \mid W(n_1)$ i $q \mid W(n_2)$. Wykazać, że dla pewnego całkowitego dodatniego n mamy $pq \mid W(n)$.
4. Uogólnić lemat o jednej karuzeli:
   Jeśli zbiór A wartości ciągu a jest skończony, a każdy kolejny wyraz ciągu (a) zależy tylko od m poprzednich wyrazów, to ciąg (a) jest od pewnego miejsca okresowy, a jego okres zasadniczy nie przekracza $|A|^m$.
5. Dowieść, że dla każdego całkowitego dodatniego d w ciągu Fibonacciego (F) istnieje dodatni wyraz podzielny przez d.

Wskazówki do zadań

1. Niech r_n będzie resztą z dzielenia a_n przez p. Rozumując jak w dowodzie lematu o jednej karuzeli, dowodzimy, że istnieją takie liczby całkowite $m > n > 0$, że $r_m = r_n$, równoważnie $p \mid a_m - a_n$. Spośród wszystkich takich par (m, n) wybierzmy tę, w której n jest najmniejsze. Jeśli $n = 1$, to $a_m + a_n = a_m - a_n$. W przeciwnym razie $p \mid a_{m-1}^2 - a_{n-1}^2$ i wystarczy skorzystać z minimalności n.

2. Stosując nierówność $d(m) \leqslant \frac{1}{2}m + 1$ oraz indukcję, wykazujemy, że $a_n < 2(a_1 + 1)$ dla wszystkich n całkowitych dodatnich.

3. Wystarczy zastosować lemat o dwóch karuzelach do ciągów reszt z dzielenia $W(n)$ przez p i q oraz fakt, że $p \mid W(n+p) - W(n)$ dla każdego całkowitego n (zobacz kącik nr 12 w Δ_{19}^{12}).

4. Możemy zapisać $a_{n+m} = F(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+m-1})$. Jeśli zbiór wartości ciągu (a_n) jest k-elementowy, to liczba różnych jego podciągów postaci $(a_{n+1}, \ldots, a_{n+m+1})$ nie przekracza k^m, więc powtórzą się pewne dwa, których wyrazy początkowe mają indeksy nieprzekraczające $k^m + 1$.

5. Niech r_n będzie resztą z dzielenia F_n przez d. Rozumując jak w poprzednim zadaniu, wnioskujemy, że $r_{n_0+t} = r_{n_0}$ i $r_{n_0+1+t} = r_{n_0+1}$ dla pewnego $n_0 \geqslant 0$ i pewnego $t > 0$. Z równości $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$ wynika, że jeśli $r_{n+t} = r_n$ i $r_{n+1+t} = r_{n+1}$, to $r_{n-1+t} = r_{n-1}$. Stosując indukcję wsteczną o głębokości 2, dochodzimy do $r_t = r_0 = 0$, więc $d \mid F_t$.