Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2022

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 825 ($WT = 2{,}50$) i 826 ($WT = 1{,}83$) z numeru 9/2021

Janusz Olszewski	Warszawa	43,67
Błażej Żmija	Kraków	40,50
Kacper Morawski	Warszawa	37,16
Witold Bednarek	Łódź	36,36
Adam Woryna	Ruda Śl.	36,14
Paweł Najman	Kraków	35,90
Marcin Kasperski	Warszawa	34,05
Andrzej Kurach	Ryjewo	33,26

Zadania z matematyki nr 839, 840

Redaguje Marcin E. KUCZMA

839. Funkcja f (zmiennej rzeczywistej) nazywa się *wypukła* w przedziale J, gdy dla każdej pary punktów $x, y \in J$ oraz dla każdej pary liczb $p, q \geqslant 0$, których suma wynosi 1, zachodzi nierówność $f(px+qy) \leqslant pf(x) + qf(y)$.

Niech będą dane funkcje $f, F\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ związane zależnością $F(x) = xf(1/x)$. Udowodnić, że w przedziale $(0,\infty)$ funkcja F jest wypukła wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest wypukła.

840. Dane są liczby naturalne $n, k > 1$. Niech $M = 1 + k + k^2 + \ldots + k^{n-1}$.
(**a**) Dowieść, że jeśli $M \equiv 1 \pmod{n}$, to $k^{M-1} \equiv 1 \pmod{M}$.
(**b**) Wyjaśnić, czy zachodzi implikacja odwrotna (do podanej w części (**a**)).

Zadanie 840 zaproponował pan Tomasz Ordowski

Rozwiązania zadań z numeru 12/2021

Przypominamy treść zadań:

831. (**a**) Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają warunki: $a \geqslant b \geqslant c \geqslant d \geqslant 1$; $bc < ad$. Ustalić, która z liczb A, B jest większa:
$$A = a^{2022} + b^{2021} + c^{2021} + d^{2022}; \qquad B = a^{2021} + b^{2022} + c^{2022} + d^{2021}.$$
(**b**) Pokazać, że dla dowolnie zadanych liczb $a > d \geqslant 1$ oraz $q > 1$ można znaleźć takie liczby $b, c \in (d, a)$, że $bc < qad$, ale wartości wyrażeń A, B, określonych w części (**a**), nie spełniają uzyskanej tam nierówności.

832. Numerujemy wierzchołki n-kąta wypukłego liczbami $1, \ldots, n$ (każda występuje raz; kolejność dowolna). Każda krawędź (bok wielokąta) otrzymuje etykietę ze zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$, określoną jako wartość bezwzględna różnicy liczb będących numerami jej końców.

Dla każdego $n \geqslant 3$ wyznaczyć największą liczbę k, dla której istnieje takie ponumerowanie wierzchołków, że każda liczba ze zbioru $\{1, \ldots, n-1\}$ pojawia się jako etykieta pewnej krawędzi, przy czym etykieta k (i tylko ona) pojawia się dwa razy.

831. (**a**) Przy podanych założeniach większa jest liczba A; uzasadnienie sprowadza się do wykazania, że funkcja
$$f(x) = a^x - b^x - c^x + d^x$$
jest rosnąca w przedziale $[1,\infty)$; teza $A > B$ to nierówność $f(2022) > f(2021)$. Monotoniczność funkcji f można wykazać, badając jej pochodną albo (prościej) oznaczając
$$\alpha = \frac{a}{b} \geqslant 1, \qquad \beta = \frac{b}{d} \geqslant 1, \qquad \lambda = \frac{ad}{bc} = \frac{\alpha d}{c} > 1$$
i stosując przekształcenie
$$f(x) = d^x\big((\alpha\beta)^x - \beta^x + 1\big) - c^x = d^x(\alpha^x - 1)(\beta^x - 1) + c^x(\lambda^x - 1),$$
dające przedstawienie funkcji f jako sumę funkcji niemalejącej i funkcji ściśle rosnącej.

(**b**) Teraz użyjemy funkcji $g(t) = t^{2022} - t^{2021}$, rosnącej w przedziale $[1,\infty)$. Dla zadanych liczb $a > d \geqslant 1$ oraz $q > 1$ bierzemy dowolną liczbę $c \in (d, a)$ taką, że $c < qd$. Mając ustalone $c > d$ i korzystając z ciągłości g (w punkcie a), znajdujemy liczbę $b \in (d, a)$ taką, że $g(a) - g(b) < g(c) - g(d)$. Skoro $b < a$, $c < qd$, zatem $bc < qad$; przy tym
$$A - B = \big(g(a) - g(b)\big) - \big(g(c) - g(d)\big) < 0.$$

832. Niech $(x_1, \ldots, x_n)$ będzie dowolną permutacją zbioru $\{1, \ldots, n\}$. Przyjmijmy $m = \lceil n/2 \rceil$ oraz $y_i = x_i - m$.

Ciąg $(y_1, \ldots, y_n)$ jest permutacją zbioru $\{1-m, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, n-m\}$. Dodatnie igreki mają sumę $\frac{1}{2}(n-m)(n-m+1)$; ujemne igreki mają sumę modułów $\frac{1}{2}(m-1)m$. Ponieważ
$$(1) \qquad |x_i - x_{i+1}| = |y_i - y_{i+1}| \leqslant |y_i| + |y_{i+1}|,$$
zatem
$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i+1}| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\Big(|y_i| + |y_{i+1}|\Big) = 2\sum_{i=1}^{n} |y_i| = = (n-m)(n-m+1) + (m-1)m$$
(przyjmujemy $x_{n+1} = x_1$, $y_{n+1} = y_1$). W zależności od parzystości liczby n, mamy $n = 2m$ lub $n = 2m-1$. Uzyskane wyrażenie ma (odpowiednio) wartość $2m^2$ lub $2m^2 - 2m$, czyli $n^2/2$ lub $(n^2-1)/2$. Dostajemy oszacowanie
$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i+1}| \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor.$$
Będzie tu zachodziła równość, gdy nierówność (1) stanie się (dla wszystkich i) równością; czyli gdy $y_i y_{i+1} \leqslant 0$. Możemy to uzyskać (na przykład) biorąc $y_1 = 0$ i umieszczając igreki dodatnie w dowolny sposób na pozycjach parzystych, a ujemne na pozycjach nieparzystych (lub odwrotnie).

W kontekście zadania, $x_1, \ldots, x_n$ to oczywiście liczby przyporządkowane kolejnym wierzchołkom n-kąta, a składniki sumy (2) to etykiety kolejnych krawędzi. Gdy wszystkie te etykiety są różne, z wyjątkiem etykiety k, powtarzającej się dwa razy, wówczas suma ta wynosi $\big(1 + \ldots + (n-1)\big) + k$, i z oszacowania (2) otrzymujemy
$$(3) \qquad k = \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i+1}| - \frac{n(n-1)}{2} \leqslant \left\lfloor \frac{n^2}{2} \right\rfloor - \frac{n(n-1)}{2} = = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$
Jak poprzednio, aby uzyskać równość, bierzemy $y_1 = 0$ i dalej przeplatamy na przemian igreki dodatnie i ujemne, ale teraz w porządku wzrastania ich wartości bezwzględnych. Wówczas ciąg $(r_1, \ldots, r_{n-1})$, gdzie $r_i = |y_i - y_{i+1}| = |x_i - x_{i+1}|$ jest ściśle rosnący, więc wyczerpuje wszystkie wartości od 1 do $n-1$; a zamykająca cykl różnica $|y_n - y_1|$ jest równa właśnie $\lfloor n/2 \rfloor$ (i dubluje swoje wcześniejsze wystąpienie). Dobrze to widać na przykładzie: dla $n = 5$ oraz $n = 6$ (i tu, i tu $m = 3$) mamy ciągi igreków:
$$(0, 1, -1, 2, -2) \quad \text{oraz} \quad (0, 1, -1, 2, -2, 3);$$
te same przykłady w języku iksów ($x_i = m + y_i$):
$$(3, 4, 2, 5, 1) \quad \text{oraz} \quad (3, 4, 2, 5, 1, 6);$$
różnica między wyrazem ostatnim i pierwszym wynosi odpowiednio $\lfloor 5/2 \rfloor$ oraz $\lfloor 6/2 \rfloor$.

Z oszacowania (3) i podanej konstrukcji wynika odpowiedź: $\lfloor n/2 \rfloor$ jest maksymalną możliwą wartością k.

Uwaga 1. Aż do słów „W kontekście…” nie zostało wykorzystane założenie o różnowartościowości etykiet (poza jedną). Dzięki temu ów początkowy fragment rozwiązania daje dowód własności o bardziej ogólnym charakterze, ważnej i ciekawej: dla *dowolnej* permutacji $(x_1, \ldots, x_n)$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ suma cykliczna $\sum |x_i - x_{i+1}|$ nie przekracza $\lfloor n^2/2 \rfloor$ (wzór (2)).

Uwaga 2. Michał Adamaszek, autor zadania, zwrócił uwagę, że permutacje $(x_1, \ldots, x_n)$, w których wszystkie wartości $|x_i - x_{i+1}|$ (dla $i = 1, \ldots, n-1$) są różne, były przedmiotem badań (`https://mathworld.wolfram.com/GracefulPermutation.html`). Domykająca cykl różnica $|x_n - x_1|$ dubluje jedną z tych $n-1$ wartości (to liczba k z zadania). Otwarte pozostaje pytanie o dokładną identyfikację wszystkich możliwych par (x_1, x_n) (`http://people.math.sfu.ca/~goddyn/Problems/problems.html`), a nawet pytanie o zbiór wszystkich możliwych wartości k (dla ustalonej liczby n).

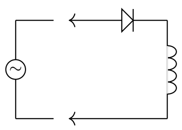
Klub 44 F

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2022

Zadania z fizyki nr 736, 737

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

736. Cewkę o indukcyjności L połączoną szeregowo z idealną diodą podłączono w chwili t_0 do źródła napięcia przemiennego $u = U \sin \omega t$ (rys. 1). Znaleźć natężenie prądu w cewce w funkcji czasu. Opory omowe zaniedbujemy.



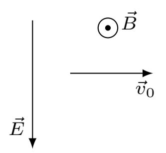
Rys. 1

737. Lodówka utrzymuje w zamrażalniku stałą temperaturę $-12°$C. Gdy temperatura w pokoju wynosi $25°$C, silnik włącza się co 8 minut, pracuje 5 minut, po czym następuje pauza. Jak często i na jak długo będzie włączać się lodówka, gdy temperatura w pokoju obniży się do $15°$C? Przy jakiej maksymalnej temperaturze w pokoju lodówka może utrzymać w zamrażalniku zadaną temperaturę? Zakładamy, że lodówka jest idealną maszyną cieplną.

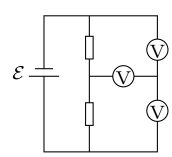
Rozwiązania zadań z numeru 12/2021

Przypominamy treść zadań:

728. Dodatnio naładowana cząstka porusza się w jednorodnych, wzajemnie prostopadłych polach: elektrycznym o natężeniu E i magnetycznym o indukcji B. W pewnej chwili prędkość cząstki wynosi $\vec{v}_0$ ($\vec{v}_0 \perp \vec{E}$ i $\vec{v}_0 \perp \vec{B}$; rys. 2), przy czym $E = v_0 B$. Ile wynosi wartość wektora prędkości cząstki w tych chwilach, gdy tworzy on kąt π z wektorem $\vec{v}_0$?



Rys. 2



Rys. 3

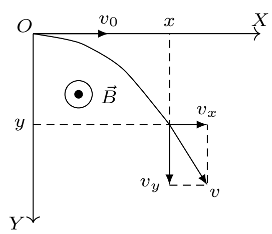
729. W obwodzie przedstawionym na rysunku 3 wszystkie woltomierze są identyczne. Siła elektromotoryczna baterii wynosi $\mathcal{E} = 5$ V, jej opór wewnętrzny jest zaniedbywalny. Górny woltomierz wskazuje napięcie $U_1 = 2$ V. Co wskazują pozostałe woltomierze?

728. Cząstka porusza się w płaszczyźnie XY (rys. 4) i w chwili, gdy jej prędkość jest równa $\vec{v} = (v_x, v_y)$, siła Lorentza wynosi $\vec{F} = q(-v_y B, v_x B)$, gdzie q jest ładunkiem cząstki. Równanie ruchu cząstki w kierunku osi X ma postać

$$m\frac{dv_x}{dt} = -qv_y B = -qB\frac{dy}{dt},$$

gdzie m jest masą cząstki, a jego rozwiązanie

$$v_x = v_0 - qBy/m.$$



Rys. 4

W chwilach, gdy prędkość cząstki tworzy kąt π z wektorem prędkości początkowej,

$$v_x = -v \quad \text{i} \quad y = m(v_0 + v)/qB.$$

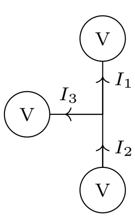
Z zasady zachowania energii

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{m{v_0}^2}{2} + qEy.$$

Uwzględniając, że $E = v_0 B$, otrzymujemy równanie kwadratowe

$$v^2 - 2v_0 v - 3{v_0}^2 = 0,$$

którego rozwiązaniem jest szukana wartość prędkości: $v = 3v_0$.



Rys. 5

729. Zgodnie z drugim prawem Kirchhoffa dla dużego oczka napięcie wskazywane przez dolny woltomierz wynosi $U_2 = 3V$. Oznaczając natężenia prądów płynących odpowiednio przez górny, dolny i środkowy woltomierz przez $I_1, I_2,\ I_3$ (rys. 5) mamy z pierwszego prawa Kirchhoffa: $I_2 = I_1 + I_3$. Stąd, ponieważ mierniki są jednakowe,

$$U_3 = U_2 - U_1 = 1V.$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przesyłać również pocztą elektroniczną pod adresem `delta@mimuw.edu.pl` (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana.** Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie `deltami.edu.pl`.