Twierdzenie Zeckendorfa: Jeżeli N jest liczbą naturalną, to N może być w sposób jednoznaczny przedstawione jako:

$$N = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j F_{j+1}, \tag{4}$$

gdzie α_j równa się 0 lub 1, dla $j = 1, \ldots, m$, $\alpha_m = 1$, F_j są liczbami z ciągu Fibonacciego oraz jeżeli $\alpha_i = 1$, to $\alpha_{i+1} = 0$ dla $i = 1, \ldots, m-1$.

W sumie (4) występuje F_{j+1}, aby uniknąć dwóch 1. Reprezentacją Zeckendorfa liczby N nazywamy odpowiadający jej ciąg skończony α_1, α_2, …, α_m, np. dla liczby 1 jest (1), dla liczby 4 jest (1, 0, 1), dla liczby 6 jest (1, 0, 0, 1), dla liczby 12 jest (1, 0, 1, 0, 1). Reprezentacja Zeckendorfa określa kod Fibonacciego, który zamienia, w sposób jednoznaczny, każdą liczbę naturalną na skończony ciąg binarny. Kod Fibonacciego używany jest do kompresji danych, czyli wyrażenia tej samej informacji za pomocą mniejszej liczby bitów. W reprezentacji Zeckendorfa nigdy dwie jedynki nie mogą wystąpić obok siebie, stąd w kodzie Fibonacciego stosuje się dodatkową jedynkę na końcu ciągu, aby zaznaczyć w ten sposób koniec ciągu, czyli np. dla 4 będzie to 1011, a dla 6 – 10011.

Ciekawostką jest, że ten sam wynik co Zeckendorf otrzymał Cornelis Lekkerkerker (1922–1999) w roku 1952, czyli 20 lat przed Zeckendorfem, i opisał w pracy w języku holenderskim (Zeckendorf napisał swoją pracę po francusku).

Okazuje się, że dla uogólnionego ciągu G_n nie dla wszystkich a i b mamy odpowiednik reprezentacji Zeckendorfa, np. dla $a = -5$ i $b = 6$ nie ma – por. pracę L. Childersa i K. Gopalakrishnana.

Ciąg Fibonacciego i jego uogólnienia są dalej przedmiotem interesujących badań matematyków, a nawet jest wydawane specjalne pismo naukowe poświęcone tym badaniom – *The Fibonacci Quarterly* – związane z *The Fibonacci Association*.

Liczba Eulera przy obliczaniu NWW

*Karol GRYSZKA**

* Wydział Nauk Ścisłych i Przyrodniczych, Uniwersytet Pedagogiczny w Krakowie

W poprzedniej części odkryliśmy liczbę Eulera w trójkącie Pascala. Tym razem spróbujemy sięgnąć do jednej z najciekawszych dziedzin matematyki – teorii liczb.

Najmniejsza wspólna wielokrotność

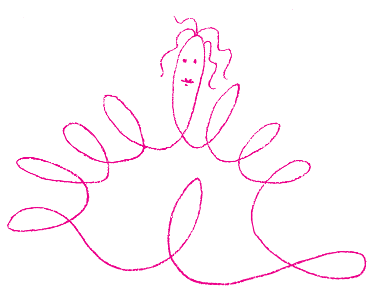
$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, 15) = 360\,360$,
$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, 30) = 2\,329\,089\,562\,800$,
$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, 60) =$
$= 9\,690\,712\,164\,777\,231\,700\,912\,800$.

Niech $a_n = \sqrt[n]{\mathrm{NWW}(1, 2, 3, \ldots, n)}$. Obliczając początkowe wyrazy tego ciągu, zauważmy, że są one zawsze „małe”. Na przykład

$$a_{15} = 2{,}34665, \qquad a_{30} \approx 2{,}58368, \qquad a_{60} \approx 2{,}60879.$$

Zaskakujące jest jednak to, że wyrazy ciągu a_n tworzą bardzo przyjazny ciąg, jest on bowiem zbieżny do liczby Eulera!

W dalszej części zobaczymy jedno z możliwych uzasadnień tego faktu. Nie jest ono całkowicie elementarne, gdyż wykorzystuje twierdzenie o liczbach pierwszych (o nim również za chwilę napiszemy). Rozumowanie podzielimy na trzy etapy. Każdy z nich zawiera w sobie ciekawe rozważania na temat liczb oraz funkcji teorioliczbowych.



Krok 1. W tym kroku przyjrzymy się wyłącznie zachowaniu najmniejszej wspólnej wielokrotności kolejnych liczb naturalnych.

Jeśli n jest potęgą liczby pierwszej, czyli $n = p^k$ dla pewnej liczby pierwszej p i $k > 0$, to żadna z liczb $1, 2, \ldots, n-1$ oprócz mniejszych potęg p nie dzieli p^k. Tym samym więc $\mathrm{NWW}(1, 2, 3, \ldots, n-1) = p^{k-1} \cdot m$ dla pewnej liczby m, niepodzielnej przez p. Ponadto liczba $p^k \cdot m$ jest wielokrotnością liczb $1, 2, \ldots, n = p^k$ i każda wielokrotność tych liczb musi być wielokrotnością p^k oraz m. Stąd wynika więc równość

$$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n) = p \cdot \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1).$$

Załóżmy teraz, że n nie jest potęgą liczby pierwszej. Wtedy $n = p^k \cdot m$ dla pewnych $k, m > 0$ i liczby pierwszej p (spełniających $p \nmid m$). Ponieważ $p^k < n$ i $m < n$, to $p^k | \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1)$ i $m | \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1)$. Ale liczby p^k i m są względnie pierwsze, więc ich iloczyn dzieli $\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1)$. Tym samym otrzymujemy równość

$$\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n) = \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1).$$

Wykorzystujemy następujący fakt: jeśli $a|c$, $b|c$ i liczby a i c są względnie pierwsze, to $ab|c$.

Krok 2. W tym kroku, z dokładnością do jednej zależności, wskażemy główny tok rozumowania dowodzący istnienia granicy. Wykorzystamy własności NWW, wykazane w kroku 1.

Zdefiniujmy dla $n > 1$ funkcję

$$\Lambda(n) = \ln \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n) - \ln \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n-1).$$

Funkcja Λ opisana klamrą nazywa się funkcją Von Mangoldta. Ma kilka ciekawych zastosowań w teorii liczb i jest związana ze słynną funkcją zeta Riemanna.

Wtedy z kroku 1. wnioskujemy, że

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{dla } n = p^k, \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku.} \end{cases}$$

Funkcja $\psi(n)$ dana sumą funkcji Λ jest tak zwaną drugą funkcją Czebyszewa. Istnieje jawny wzór tej funkcji wiążący ze sobą nietrywialne zera funkcji zeta Riemanna.

Dodając do siebie kolejne wartości funkcji Λ, zauważamy, że wiele składników się redukuje. Pozwala to stwierdzić, że

$$\ln \mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n) = \Lambda(2) + \cdots + \Lambda(n) =: \psi(n).$$

Załóżmy teraz, że wiemy z jakiegoś powodu, że

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\psi(n)}{n} = 1. \tag{5}$$

Ciągłość funkcji pozwala „przejść" z symbolem granicy z argumentu na wartość.

Wtedy wykorzystując ciągłość funkcji wykładniczej oraz własności logarytmu naturalnego, otrzymujemy:

$$e = e^{\lim \frac{\psi(n)}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\psi(n)}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \sqrt[n]{\mathrm{NWW}(1,2,\ldots,n)}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{NWW}(1, 2, \ldots, n)},$$

i tym samym dowodzimy niezwykłej równości.

Krok 3. Pozostaje nam do wykonania najtrudniejszy krok – uzasadnienie równości (5). W tym celu korzystamy z twierdzenia o liczbach pierwszych. Pozwala ono na szacowanie funkcji $\pi(x)$, zliczającej liczby pierwsze nieprzekraczające x. Zachodzi mianowicie przybliżenie

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\ln x}, \quad \text{to znaczy} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1.$$

Funkcja ϑ to tak zwana pierwsza funkcja Czebyszewa.

Zdefiniujmy na początek funkcję $\vartheta(x) = \sum\limits_{p\leqslant x} \ln p$, gdzie podana suma (oraz wszystkie kolejne, w których sumujemy po liczbach p) rozważana jest po liczbach pierwszych nieprzekraczających x. Wtedy

$$\vartheta(x) \leqslant \sum_{p\leqslant x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p \leqslant \sum_{p\leqslant x} \ln x = \pi(x) \ln x.$$

Równość $\sum\limits_{n\leqslant x} \Lambda(n) = \sum\limits_{p\leqslant x} \left\lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \right\rfloor \ln p$ wynika z tego, że jest dokładnie $\lfloor \log_p x \rfloor = \lfloor \frac{\ln x}{\ln p} \rfloor$ liczb postaci p^k w zakresie od 1 do x.

Środkowy wyraz to nic innego jak $\psi(x)$ (zob. wyjaśnienie na marginesie), więc – o ile odpowiednie granice istnieją – mamy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x}. \tag{6}$$

Niech teraz $n \geqslant 3$ i $y = x/(\ln x)^2$. Wtedy

$$\pi(x) = \pi(y) + \sum_{y<p\leqslant x} 1 \leqslant \pi(y) + \sum_{y<p\leqslant x} \frac{\ln p}{\ln y} \leqslant y + \frac{\vartheta(x)}{\ln y}$$

(w ostatniej nierówności skorzystaliśmy z $\pi(y) \leqslant y$ oraz $\sum_{y<p\leqslant x} \ln p \leqslant \vartheta(x)$). Stąd z kolei

$$\frac{\pi(x) \ln x}{x} \leqslant \frac{y \ln x}{x} + \frac{\ln x}{\ln y} \frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{1 - 2\frac{\ln \ln x}{\ln x}} \frac{\vartheta(x)}{x}.$$

Ponieważ $\frac{1}{\ln x} \to 0$ oraz $\frac{\ln \ln x}{\ln x} \to 0$ (w obu przypadkach rozważamy $x \to \infty$), dostajemy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}. \tag{7}$$

Łącząc (6) i (7), wnioskujemy, że granica ciągu $\left(\frac{\vartheta(n)}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ istnieje i jest równa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\vartheta(n)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n) \ln n}{n} = 1.$$

Epilog. Fascynujące w powyższym ciągu jest to, że zamiast rozważać w definicji wszystkie liczby, wystarczy rozważać liczby pierwsze. Tym samym otrzymujemy wzór

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\prod_{p\leqslant n} p} = e.$$

To nie koniec poszukiwań! Trzeci odcinek poświęcimy pewnemu problemowi z rachunku prawdopodobieństwa.

Rozwiązanie zadania M 1705.
Niech O będzie takim punktem, że $PO \parallel AB$, $PO = AB = CD$ oraz PO przecina odcinek AD. Wtedy czworokąty $ABPO$ oraz $CDOP$ są równoległobokami. Niech Q będzie punktem na prostej PO takim, że $OQ = OA$ i punkty P i Q leżą po przeciwnych stronach punktu O. Wtedy

$$\sphericalangle OQA = \sphericalangle OAQ = \frac{\sphericalangle AOP}{2} = \frac{\sphericalangle ABP}{2} = \sphericalangle ADP,$$

więc punkty A, P, D i Q leżą na jednym okręgu Ω. Wobec tego

$$\sphericalangle ODQ = \sphericalangle DOP - \sphericalangle DQO = \sphericalangle DCP - \sphericalangle DAP = \sphericalangle DAP = \sphericalangle DQO,$$

skąd $OD = OQ = OA$, więc O jest środkiem okręgu Ω. Zatem

$$AB = OP = OA = OD = PB = PC.$$