

Jak podzielić lody, czyli o nukleolusie

Oskar SKIBSKI

Adaś, Beatka i Czarek stoją przed lodówką z lodami w osiedlowym sklepie. Już jakiś czas temu zauważyli, że lody na patyku są małe i drogie, a na dodatek po zjedzeniu pozostaje w ustach smak patyka. Na lody w pudełku jednak Adasia i Beatki nie stać w ogóle, a Czarek mógłby kupić tylko 400 g. Postanowili więc się zrzucić. Okazało się, że Adaś i Beatka razem mogą kupić 500 g lodów, Adaś i Czarek też, a Beatkę z Czarkiem stać na 750 g. Jeżeli zrzucą się wszyscy, to uda im się kupić 1000 g. Tak się im najbardziej opłaca, biorą więc kilogram lodów i idą do kasy. Ich możliwości zakupowe wyglądają więc następująco:

Na marginesie warto zwrócić uwagę, że dzieci są mądre i patrzą na wagę lodów, a nie ich objętość, a nie jest to samo.

kto	A	B	C	AB	AC	BC	ABC
lody (g)	0	0	400	500	500	750	1000

Pozostaje kwestia podziału. Mogliby podzielić się po równo i każdy dostałby 333 gramów (jeden gram zostałby na nożu), ale nie byłoby to zbyt sprawiedliwe – Czarek może przecież sam kupić 400 gramów. Poza tym Beatka i Czarek dostaliby w ten sposób 666 g, a sami mogą kupić 750 g. Adaś nie powinien zatem dostać więcej niż 250 g – i tak powinien się cieszyć, bo bez przyjaciół nic by nie kupił. Czarek oczywiście powinien dostać co najmniej 400 g, ale nie więcej niż 500 g, aby Adaś z Beatką nie woleli kupić lodów bez niego. Wynika z tego, że Beatka dostanie co najmniej 250 g. Ojej, wszystko zrobiło się mocno pogmatwane. Użyjmy matematyki, aby to uporządkować.

Oznaczmy przez a , b i c ilości lodów, jakie dostaną odpowiednio Adaś, Beatka i Czarek. Zależy nam na tym, aby żadnej grupie nie opłacało się wylamać, czyli szukamy takiej trójki liczb (a, b, c) , że $a + b + c = 1000$ oraz spełnione są następujące warunki:

$$c \geq 400, \quad a + b \geq 500, \quad a + c \geq 500, \quad b + c \geq 750.$$

Przekształcając je trochę (np. $a + b = 1000 - c$ daje ograniczenie górne na c), dostajemy następujący zbiór podziałów:

$$X = \{(a, b, c) : 0 \leq a \leq 250 \leq b \leq 500, 400 \leq c \leq 500, a + b + c = 1000\}.$$

Podziałów w tym zbiorze jest jednak wciąż bardzo dużo (matematycy powiedzieliby nawet, że nieskończenie wiele, a fizycy pewnie zaczęliby liczyć lodowe kwarki). Jak zatem dzieci powinny się podzielić?

Najwyższa pora sięgnąć do książek. Nasz problem jest szczególnym przypadkiem *problemu podziału*, czyli fundamentalnego zagadnienia teorii gier koalicyjnych. Ustalmy zbiór graczy N , zwykle oznaczanych kolejnymi liczbami naturalnymi $N = \{1, \dots, n\}$. *Gra koalicyjna* to funkcja $v : 2^N \rightarrow \mathbb{R}$, która każdej grupie graczy $S \subseteq N$, czyli *koalicji*, przypisuje pewną wartość (zakładamy $v(\emptyset) = 0$). W naszej lodowej grze mamy zatem trzech graczy, a funkcja przypisuje, ile lodów są oni w stanie kupić. Pytanie, jak sprawiedliwie podzielić wartość $v(N)$ pomiędzy graczy, spędzało sen z powiek wielu naukowcom, w tym niejednemu laureatowi Nagrody Nobla.

W powyższej sytuacji wszyscy ci uczeni (a przynajmniej ci żyjący) zgodziliby się, że sprawiedliwy podział znajduje się w zbiorze X . Zbiór ten nazywany jest *rdzeniem*.

Definicja. *Rdzeń* (ang. *core*) gry v to zbiór podziałów, w których każda koalicja otrzymuje wypłatę większą bądź równą jej wartości:

$$\text{Rdzeń}(v) = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i \in N} x_i = v(N) \text{ oraz } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ dla każdego } S \subseteq N\}.$$

Z rdzeniem są jednak problemy. Po pierwsze – często jest pusty. Załóżmy na chwilę, że ze sklepu wycofano lody o pojemnościach 400 i 500 gramów, ale wprowadzono promocję na 750-gramowe, i stać na nie każdą parę dzieci



Rozwiązanie zadania F 1046.

Zacznijmy od wyznaczenia wysokości x położenia środka masy układu, gdy napój wypełnia puszkę do wysokości h – masa napoju wynosi wtedy mh/H . Mamy:

$$x(h) = \frac{MH/2 + mh^2/(2H)}{M + mh/H}.$$

Nim rozpoczniemy poszukiwanie minimum funkcji $x(h)$ przeprowadźmy eksperyment myślowy i wyobraźmy sobie, że dla każdej badanej wysokości h zamrażamy napój i kładziemy puszkę poziomo, na ostrzu noża umieszczonym dokładnie pod środkiem masy.

Przyjmijmy, że zamrożony płyn jest po lewej stronie. Jeśli $x < h$, to po dodaniu napoju (zwiększeniu h) puszka przechyli się w prawo, bo prawa strona stanie się cięższa od lewej, a odjęcie napoju spowoduje przechył w lewo. Gdy $h < x$, to dodanie napoju spowoduje przechył w lewo, a odjęcie – w prawo. Co będzie, gdy $x = h$? W tej sytuacji zarówno dodanie, jak i odjęcie płynu spowoduje przechył w prawo. Oznacza to, że dla $x = h$, środek masy pionowo stojącej puszką jest najniższy. Najniższe położenie środka masy, h_{min} , spełnia więc równanie $x(h_{min}) = h_{min}$. Rozwiązaniem jest:

$$h_{min} = \frac{MH}{m} \left(\sqrt{1 + \frac{m}{M}} - 1 \right).$$

Czytelnika lubiącego różniczkowanie zachęcamy do sprawdzenia, że podane rozwiązanie rzeczywiście odpowiada minimum funkcji $x(h)$. Przytoczone rozumowanie prowadzące do wniosku, że w swym najniższym położeniu środek masy leży na powierzchni napoju, stosuje się także do bardziej skomplikowanych kształtów niż walec – np. dla butelki – trudniej jednak wtedy wyznaczyć funkcję $x(h)$. (Problem i pomysł rozwiązania pochodzą z książki Helmuta Vogla „Probleme aus der Physik”).

Skoro $a + b \geq 750$, $a + c \geq 750$ oraz $b + c \geq 750$, to $2(a + b + c) \geq 2250$, co daje sprzeczność.

(czyli mamy grę $v(A) = v(B) = v(C) = 0$, $v(AB) = v(AC) = v(BC) = 750$ oraz $v(ABC) = 1000$). Dzieci wciąż nie są w stanie kupić więcej niż kilogram lodów, ale kilograma lodów nie da się podzielić tak, aby każda para dostała co najmniej 750 g.

Po drugie – rdzeń, jak widzimy w naszym przykładzie, często zawiera więcej niż jeden wektor i spora część z nich nie wydaje się wcale sprawiedliwa. Na przykład podział (100, 500, 400) znajduje się w zbiorze, ale Czarek na pewno nie uznałby go za fair. Dlatego też rdzeń nazywany jest czasem zbiorem podziałów stabilnych, a nie sprawiedliwych, a to trochę co innego – Czarek może się kłócić, ale sam więcej nie dostanie, a innych nie uda mu się przekonać do wyłamania się.

„Wartość Shapleya!” – mógłby zakrzyknąć Czytelnik, który miał styczność z grami koalicyjnymi (lub z autorem). O wartości Shapleya pisaliśmy już w Δ_{16}^{11} oraz Δ_{20}^{11} . Rzeczywiście często znajduje się ona w rdzeniu. Zdarza się jednak, że rdzeń jest niepusty, a wartość Shapleya do niego nie należy. Nie jest to zatem rozwiązanie, którego szukamy.

Jak więc wybrać jeden wektor z rdzenia? I jak znaleźć podział, kiedy rdzeń jest pusty? Słynną odpowiedzią na te pytania jest *nukleolus*, nazywany też *jędkerkiem*, o którym opowiemy w tym artykule.

Zastanówmy się nad następującymi trzema podziałami:

$$x = (300, 300, 400), \quad y = (200, 300, 500), \quad z = (150, 400, 450).$$

Który jest najbardziej sprawiedliwy?

Aby odpowiedzieć na to pytanie, spójrzmy znowu na to, co o tych podziałach powiedziałyby wszystkie koalicje. Wcześniej patrzyliśmy tylko zero-jedynkowo, czy nie są stratne. Tym razem dla każdej koalicji policzymy jej zysk, czyli wypłatę pomniejszoną o jej wartość.

zysk	A	B	C	AB	AC	BC
x	300	300	0	100	200	-50
y	200	300	100	0	200	50
z	150	400	50	50	100	100

$\text{zysk}(S, x) = \sum_{i \in S} x_i - v(S)$

Na przykład dla podziału x i koalicji Adasia z Beatką zysk wynosi:

$$\text{zysk}(AB, x) = (300 + 300) - 500 = 100.$$

Pomijamy koalicję wszystkich graczy ABC , bo ma zawsze zerowy zysk.

Dla każdego podziału uszeregujemy zyski rosnąco. Taką listę będziemy nazywać *listą zysków* i oznaczać $L(x)$ dla podziału x . Dostajemy:

$$L(x) = (-50, 0, 100, 200, 300, 300),$$

$$L(y) = (0, 50, 100, 200, 200, 300),$$

$$L(z) = (50, 50, 100, 100, 150, 400).$$

Patrząc na te listy, od razu widzimy, że wzięliśmy jeden podział spoza rdzenia – dla pierwszego podziału mamy jeden ujemny zysk, co oznacza, że pewna koalicja dostała mniej lodów, niż mogłaby kupić sama (są to Beatka z Czarkiem). Ten podział możemy zatem odrzucić.

A który z dwóch pozostałych podziałów jest lepszy? To oczywiście kwestia dyskusyjna, ale widzimy, że w podziale z każda koalicja coś zyskuje, a w podziale y istnieją koalicje, których wypłaty są „na styk”. Fajnie by było, gdyby wszystkie koalicje czerpały „podobne” zyski, a przynajmniej żeby żadna nie była zbyt poszkodowana.

Ta właśnie idea przyświeca nukleolusowi, który stara się maksymalizować najmniejszy zysk, a wśród podziałów z takim samym najmniejszym zyskiem – drugi najmniejszy zysk i tak dalej. Bardziej precyzyjnie, nukleolus to taki podział, którego lista zysków jest maksymalna w porządku leksykograficznym (na marginesie tłumaczymy, co to znaczy).

Definicja. *Nukleolus* (ang. *nucleolus*) gry v to podział, którego lista zysków jest maksymalna leksykograficznie:

$$\text{nukleolus}(v) = x \text{ t.ż. } L(x) \geq_{lex} L(y) \text{ dla każdego podziału } y.$$

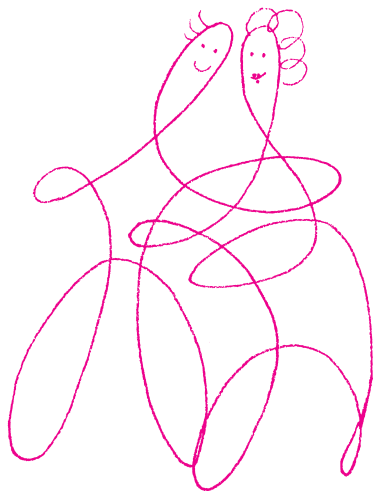


Rozwiązanie zadania F 1045.

Rozważmy najprostszy przypadek ruchu wzdłuż prostej. Kolejne klatki filmu rejestrują obraz co $\tau = 1/24$ s, co wystarcza do wywołania wrażenia ciągłości ruchu. Przyjmijmy, że na kolejnych klatkach filmu wyświetlanego „normalnie” poruszający się przedmiot znajdował się, odpowiednio, w położeniach s_1, s_2, s_3 . Widz zarejestruje wówczas kolejno prędkości jako $v_1 = (s_2 - s_1)/\tau$ i $v_2 = (s_3 - s_2)/\tau$, a przyspieszenie jako $a = (v_2 - v_1)/\tau = (s_3 - 2s_2 + s_1)/\tau^2$. Po zmianie kierunku wyświetlania dla widza odwróci się kolejność rejestrowanych położenia na $s'_1 = s_3, s'_2 = s_2, s'_3 = s_1$. Wynika stąd, że widz zarejestruje prędkości $v'_1 = (s'_2 - s'_1)/\tau = (s_2 - s_3)/\tau$ i $v'_2 = (s'_3 - s'_2)/\tau = (s_1 - s_2)/\tau$. Jak widać prędkości zmieniają znaki na przeciwne – zamieni się też ich kolejność. Wartość przyspieszenia pozostanie bez zmian. Oznacza to, że zmieni się zwrot prędkości względem zwrotu przyspieszenia, a więc np. ruch jednostajnie przyspieszony zmieni się w ruch jednostajnie opóźniony – tak jak oczekiwaliśmy.

Lista $a = (a_1, \dots, a_k)$ jest leksykograficznie większa niż lista $b = (b_1, \dots, b_k)$, co oznaczamy $a >_{lex} b$, jeżeli na pierwszej pozycji, na której listy się różnią, wartość na liście a jest większa niż na liście b :
 $a >_{lex} b \Leftrightarrow$ istnieje $i \in \{1, \dots, k\}$ takie, że $a_i > b_i$ oraz $a_j = b_j$ dla każdego $j < i$.
 Na przykład $(2, 3, 4, 5) >_{lex} (1, 5, 6, 7)$ oraz $(2, 3, 4, 5) >_{lex} (2, 3, 3, 6)$. Będziemy pisać $a \geq_{lex} b$, jeżeli $a >_{lex} b$ lub $a = b$.

Gwoli ścisłości – jeżeli wartość $v(N)$ jest mniejsza niż suma $\sum_{i \in N} v(\{i\})$, to zdefiniowany przez nas podział nazywa się *prenukleolusem*. Aby nie komplikować, nie wprowadzamy tego rozróżnienia w naszym artykule.



Wspomnieliśmy już kiedyś, że nukleolus odegrał kluczową rolę w rozwiązaniu *Problemu bankructwa z Talmudu* (Δ_{21}^{10}). O związku obu tematów napiszemy następnym razem, a Niecierpliwych Czytelników zachęcamy, aby znając oba pojęcia, sami spróbowali odkryć ten związek.

Popatrzmy na dwa podziały dla naszej oryginalnej gry: $x = (75, 425, 500)$, $y = (175, 425, 400)$. Dostajemy:

	A	B	C	AB	AC	BC
x	75	425	100	0	75	175
y	175	425	0	100	75	75

Mamy zatem:

$$L(x) = (0, 75, 75, 100, 175, 425) = L(y).$$

Rozpatrzmy teraz $z = (x + y)/2$, czyli $z = (125, 425, 450)$. Dostajemy:

	A	B	C	AB	AC	BC
z	125	425	50	50	75	125

Czyli $L(z) = (50, 50, 75, 125, 125, 425)$ i rzeczywiście $L(z) >_{lex} L(x) = L(y)$.

Łatwo zauważyć, że nukleolus zawsze należy do rdzenia, jeżeli ten jest niepusty: podział x jest w rdzeniu, jeżeli pierwszy element listy zysków $L(x)$ jest nieujemny. Jeżeli rdzeń jest niepusty, to znaczy, że są podziały spełniające ten warunek, a zatem nukleolus, którego lista jest leksykograficznie maksymalna, też ma pierwszy element nieujemny.

Wróćmy do naszego przykładu. Widzimy, że lista $L(z)$ jest leksykograficznie większa niż $L(y)$ oraz $L(x)$. Ale czy nie istnieje podział, którego lista zysków jest jeszcze większa? Okazuje się, że nie. Spróbujmy to pokazać.

Fakt. Dla lodowej gry v mamy $\text{nukleolus}(v) = (150, 400, 450)$.

Dowód. Niech (a, b, c) będzie dowolnym podziałem takim, że $a + b + c = 1000$. Nieposortowana lista zysków wygląda dla naszej gry tak:

$$(a, b, c - 400, a + b - 500, a + c - 500, b + c - 750).$$

Korzystając z równania $a + b + c = 1000$, dostajemy, że lista ta jest równa:

$$(a, b, c - 400, 500 - c, 500 - b, 250 - a).$$

Zacznijmy od środkowych elementów: $(c - 400)$ oraz $(500 - c)$. Widzimy, że któryś z tych elementów będzie mniejszy bądź równy 50. Nie da się więc stworzyć podziału, dla którego najmniejszy zysk będzie większy niż 50. Wiemy natomiast, że istnieje podział, w którym jest on równy 50 (takim podziałem jest przecież z). Dla nukleolusa najmniejszy zysk też zatem musi być równy 50. Aby tak było, musimy mieć $(c - 400) = (500 - c) = 50$, czyli $c = 450$. Lista zysków upraszcza się nam do:

$$(a, b, 50, 50, 500 - b, 250 - a).$$

Popatrzmy teraz na ostatnie dwa elementy. Ich suma jest równa

$$750 - (a + b) = 750 - 550 = 200.$$

Mniejszy z tych elementów musi być więc mniejszy bądź równy 100, a równość zachodzi tylko, jeśli $a = 150$ oraz $b = 400$. Dwa pierwsze elementy z listy są wówczas większe niż 100, więc rzeczywiście na maksymalizacji mniejszego z dwóch ostatnich elementów powinniśmy się skupić. Wychodzi nam zatem, że podział $(150, 400, 450)$ rzeczywiście daje maksymalną leksykograficznie listę. \square

Jak widzieliśmy na naszym prostym przykładzie, wyznaczenie nukleolusa nie jest takie proste. Z samej definicji nie jest także oczywiste, że nukleolus jest określony jednoznacznie ani że w ogóle istnieje! Oba te stwierdzenia są jednak prawdziwe. Nasz artykuł zakończymy, pokazując jednoznaczność – o znalezieniu jednego podziału lodów przecież nam chodziło od samego początku.

Twierdzenie. Nie istnieją dwa różne podziały x, y takie, że $L(x) = L(y)$ jest maksymalną listą zysków.

Dowód. Załóżmy przeciwnie. Skoro podziały są różne, ale listy zysków takie same, to różne musi być dopasowanie koalicji do zysków. Na marginesie prezentujemy przykład takiej sytuacji. Popatrzmy teraz na podział $z = (x + y)/2$. Wykażemy, że $L(z) >_{lex} L(x)$, co pokazuje, że x i y nie mają wcale maksymalnej listy zysków.

Dla dowolnej koalicji S mamy: $\text{zysk}(S, z) = (\text{zysk}(S, x) + \text{zysk}(S, y))/2$ (*). Niech c będzie najmniejszym zyskiem, dla którego dopasowanie koalicji się różni (dla przykładu z marginesu mamy $c = 0$). Najpierw zauważmy, że listy $L(x)$ oraz $L(z)$ mają takie same wartości mniejsze niż c . Jeżeli $\text{zysk}(S, x) < c$, to z definicji c mamy $\text{zysk}(S, x) = \text{zysk}(S, y)$, więc także $\text{zysk}(S, z) = \text{zysk}(S, x) < c$. Z kolei jeśli $\text{zysk}(S, x) \geq c$, to także $\text{zysk}(S, y) \geq c$ i z (*) też $\text{zysk}(S, x) \geq c$.

Przeanalizujmy teraz, jakie koalicje mają zysk c według podziału z . Jeżeli $\text{zysk}(S, x) = c$ oraz $\text{zysk}(S, y) = c$, to oczywiście $\text{zysk}(S, z) = c$. Jednak jeżeli $\text{zysk}(S, x) = c$, ale $\text{zysk}(S, y) > c$ (lub odwrotnie: $\text{zysk}(S, y) = c$, ale $\text{zysk}(S, x) > c$), to z (*) mamy $\text{zysk}(S, z) > c$. A skoro tak, to c pojawia się na liście zysków $L(z)$ mniej razy niż w $L(x)$ i $L(y)$. Z tego wynika, że z ma leksykograficznie większą listę zysków, a to daje nam sprzeczność. \square