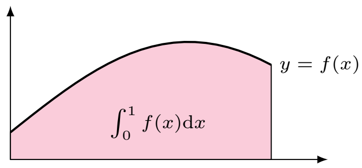
Miara i całka

Michał MIŚKIEWICZ



Ilustracja zasady **(A)**

Miara – czyli długość, pole, objętość etc. – oraz całka idą ramię w ramię. Kto zna jedno z tych pojęć, tak naprawdę zna oba, a to dzięki poniższym dwóm obserwacjom:

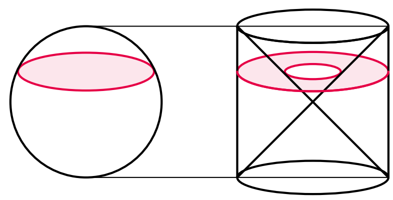
(A) Całka $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ to pole figury pod wykresem funkcji f.

(B) Miara zbioru $A \subseteq [0,1]$ to całka z jej funkcji charakterystycznej $\int_0^1 \mathbb{1}_A(x)\,\mathrm{d}x$.

Funkcja charakterystyczna zbioru A to funkcja $\mathbb{1}_A\colon [0,1] \to \{0,1\}$ zadana wzorem $\mathbb{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } x \in A, \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$

Pojęcia te idą ramię w ramię już od czasów starożytnych. Mówi o tym zasada Cavalieriego:

(C) Dwie bryły M, N leżące na poziomym stole przecinamy płaszczyzną na wysokości $h > 0$, otrzymując „plasterki”, które oznaczymy odpowiednio przez M_h, N_h. Jeśli dla każdego h zachodzi równość pól $|M_h| = |N_h|$, to wyjściowe bryły mają tę samą objętość.


Objętość kuli można wyznaczyć, porównując jej plasterki z odpowiednimi plasterkami walca z wyciętym stożkiem

Choć precyzyjne sformułowanie pochodzi od Bonaventury Cavalieriego (1598–1647) (ucznia Galileusza, zob. notkę M. Kordosa w Δ^{11}_{11}), to zasadę **(C)** i jej warianty znał i wykorzystywał już Archimedes. Dzięki niej był w stanie wyznaczyć wzór na objętość kuli i pole sfery (zob. Δ^{4}_{14}, Δ^{1}_{12}). Ten pierwszy wzór Czytelnik może spróbować wyprowadzić sam, stosując zasadę Cavalieriego do dwóch brył na marginesie.

A gdzie tutaj całka? Rzeczywiście, jest trochę schowana, ale **(C)** jest szczególnym przypadkiem formuły:

(D) Całka z pól plasterków $\int_0^{h_{\max}} |M_h|\,\mathrm{d}h$ daje objętość M.

W istocie jest to wariant zasady **(A)**, w której długości odcinków zastąpiono polami plasterków, a pole pod wykresem – objętością bryły. W omawianym przed chwilą przypadku **(C)** objętości M i N okazują się całką z tej samej funkcji $|M_h| = |N_h|$, więc istotnie muszą być równe.

Jeśli plasterki powstają przez dowolne, niekoniecznie płaskie równoległe cięcia – jak np. warstwy cebuli albo ucięte nożem kawałki tortu – objętość również daje się wyznaczyć na podstawie pól plasterków. Odpowiednia formuła nosi nazwę *wzoru na całkowanie po włóknach* (ang. *coarea formula*).

Wzajemne przenikanie się teorii miary i całki jest owocne również w dzisiejszych czasach – do tego tematu wrócimy jeszcze w dalszej części tekstu.

Całka Riemanna

Oparcie teorii całki na związku wyrażonym w **(A)** ma jednak swoją wadę – dopóki pojęciem *pola* operujemy jedynie intuicyjnie, rozważania dotyczące całek również są nieścisłe. Mimo to matematycy XVII i XVIII wieku poczynili wielkie postępy, na przykład Isaac Barrow (1630–1677) – nauczyciel Newtona – odkrył i uzasadnił związek między pochodną i całką.

Związek między całką a pochodną można też przekuć na definicję: całką (dziś powiedzielibyśmy – nieoznaczoną) funkcji f nazwiemy każdą funkcję F, której pochodną jest f. Oczywiście definicja taka nie rozwiązuje wszystkich problemów.

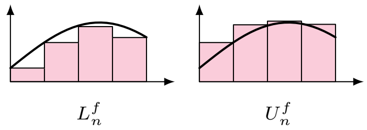
Tradycyjne podejście miało swoje ograniczenia – nie pozwalało np. w satysfakcjonujący sposób badać szeregów Fouriera – więc poszukiwano takiej charakteryzacji całki, która nie odwoływałaby się do miary. Dla funkcji ciągłych ścisłą definicję zaproponował Augustin Cauchy (1789–1857), a następnie Bernhard Riemann (1826–1866) uogólnił ją na szerszą klasę funkcji. W pewnym uproszczeniu, definicja jest następująca:

Klasyczna definicja Riemanna jest odrobinę bardziej skomplikowana; konstrukcja podana tutaj jest modyfikacją konstrukcji Darboux.

Definicja. Niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nieujemną ograniczoną. Dla każdego $n = 0, 1, 2, \ldots$ podzielmy przedział $[0,1]$ na 2^n równych przedziałów $I_1, \ldots, I_{2^n}$, następnie zdefiniujmy dolne i górne sumy:

$$L_n^f := \sum_{k=1}^{2^n} 2^{-n} \inf_{x \in I_k} f(x), \qquad U_n^f := \sum_{k=1}^{2^n} 2^{-n} \sup_{x \in I_k} f(x).$$

Jeśli ciągi L_n^f, U_n^f są zbieżne do tej samej granicy, całkę Riemanna $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ definiujemy jako właśnie tę granicę.



Całka Riemanna: sumy L_n^f i U_n^f ograniczają pole pod wykresem z dołu i z góry, choć bez używania słowa *pole*

W definicji powyżej inf i sup to odpowiednio kres dolny i górny wartości f na odpowiednim przedziale. Czytelnik nieznający tych pojęć może jednak śmiało przyjąć, że chodzi o minimum i maksimum – dla dalszych rozważań nie ma to znaczenia.

Zadanie 1. Oba ciągi L_n^f, U_n^f są monotoniczne – pierwszy niemalejący, drugi nierosnący – oraz $L_n^f \leqslant U_n^f$ dla każdego n. W szczególności, oba są zbieżne i w ogólnym przypadku zawsze $\lim L_n^f \leqslant \lim U_n^f$.

Jak widać z definicji, nie każdą funkcję *da się scałkować* – dla niektórych funkcji f (przykładowo, dla $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}(x)$) całka po prostu nie jest określona. Dla odpowiednio *porządnych* funkcji jest to jednak możliwe, o czym Czytelnik sam łatwo się przekona:

Zadanie 2. Jeśli f jest jednostajnie ciągła, to jest całkowalna.
Wskazówka. Spróbować prostszego przypadku: np. przy założeniu $|f(x) - f(y)| \leqslant \sqrt{|x-y|}$ wykazać $|L_n^f - U_n^f| \leqslant 2^{-n/2}$.

Zadanie 3. Jeśli f jest monotoniczna, to jest całkowalna.
Wskazówka. Porównać sumy L_n^f, U_n^f wyraz po wyrazie i przekonać się, że $|L_n^f - U_n^f| = 2^{-n}|f(1) - f(0)|$.

Całka Lebesgue'a

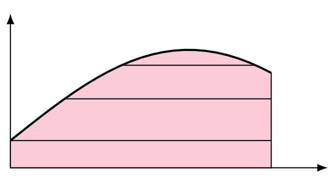
Przytoczone tu informacje historyczne pochodzą z książki T. Hawkinsa *Lebesgue's theory of integration. Its origins and development*, AMS Chelsea Publishing (2001).

Współczesnym całka Riemanna wydawała się szczytem ogólności. Rzeczywiście, definicja dopuszcza zupełnie dowolne funkcje – zamiast koncentrować się np. na funkcjach ciągłych – a klasa funkcji całkowalnych jest niejako produktem ubocznym. Biorąc pod uwagę, że w czasach Riemanna *dowolne funkcje* były względną nowością (zamiast tego rozważano raczej funkcje zadane jawnymi wzorami), jest to niezwykłe osiągnięcie.

Jak wiedzą studenci pierwszych lat studiów ścisłych, całka Riemanna rozwiązuje całe mnóstwo praktycznych problemów. Nie jest jednak pozbawiona wad, również z punktu widzenia zastosowań. Problematyczne okazuje się np. *przechodzenie do granicy pod znakiem całki*; chodzi tu o sformułowanie typu „jeśli ciąg funkcji f_n zbiega do f, to ciąg liczb $\int_0^1 f_n$ zbiega do $\int_0^1 f$".

Motywowani potrzebą rozwiązania tych problemów, matematycy XIX wieku opracowali teorię miary (więcej o tym w Δ^6_{19}), która pozwalała na zdefiniowanie całki jako pola pod wykresem. Z dzisiejszego punktu widzenia zwyciężyła propozycja Henriego Lebesgue'a (1875–1941), oparta na obserwacji podobnej do **(A)**. Otóż jeśli całka ma być polem pod wykresem, to równie dobrze owo pole możemy ciąć pionowo (według argumentów), co poziomo (według wartości). Trzeba się tylko zastanowić, jak duże są powstałe poziome plasterki. Można więc zdefiniować całkę Lebesgue'a następująco:

Dowolną funkcję ograniczoną można rozłożyć na różnicę $f = f_+ - f_-$ funkcji nieujemnych, co pozwala rozszerzyć klasę funkcji całkowalnych: $\int f := \int f_+ - \int f_-$.



Całka Lebesgue'a: efekt cięcia na plasterki poziome zamiast pionowych

Definicja. Jak poprzednio, niech $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nieujemną ograniczoną. Dla każdego $0 \leqslant t \leqslant f_{\max}$ definiujemy *nadpoziomicę* jako zbiór $P_t := \{x \in [0,1] : f(x) > t\}$, a następnie całkę Lebesgue'a jako liczbę

$$(\star) \qquad \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x := \int_0^{f_{\max}} |P_t|\,\mathrm{d}t,$$

gdzie $|P_t|$ jest miarą zbioru $P_t \subseteq [0,1]$.

Definicja taka wydaje się tłumaczyć nieznane przez nieznane. Narzucają się od razu dwa główne zarzuty:

- W odróżnieniu od całki Riemanna, definicja całki Lebesgue'a zmusza nas do określenia miary przed określeniem całki. Niejako kręcimy się więc w kółko.
- Nawet przy określeniu miary całkę definiujemy jako całkę, więc gdzie tutaj postęp?

Drugi zarzut łatwo jest oddalić. Jakkolwiek patologiczna nie byłaby funkcja f, jej nadpoziomice maleją, to znaczy $P_t \subseteq P_s$, o ile $s \leqslant t$. A ponieważ większe zbiory mają większą miarę (do tego faktu jeszcze wrócimy), więc funkcja $t \mapsto |P_t|$ jest funkcją nierosnącą. Zgodnie z zadaniem 3 taka funkcja jest zawsze całkowalna w sensie Riemanna, powinniśmy więc definicję $(\star)$ uściślić: całkę *Lebesgue'a* $\int f$ określamy jako całkę *Riemanna* $\int |P_t|$.

* Dlaczego *miarę zewnętrzną*, a nie po prostu *miarę*? Otóż za chwilę się wyjaśni, dlaczego λ rzeczywiście nie zasługuje na miano miary.

Rodzina przedziałów *pokrywa* zbiór A, jeśli zawiera się on w sumie mnogościowej tych przedziałów. Dopuszczamy przy tym rodziny skończone (zawsze możemy je rozszerzyć, dodając wiele przedziałów długości 0).

Aby jakoś ominąć (na chwilę) pierwszy z zarzutów, można wprowadzić *miarę zewnętrzną* Lebesgue'a* λ wzorem

$$\lambda(A) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} |a_k - b_k| :\ \text{rodzina przedziałów } [a_k, b_k] \text{ pokrywa } A\right\}$$

i wyjaśnić, że przez $|A|$ będziemy tak naprawdę rozumieli $\lambda(A)$. Co prawda wzór ten wymaga rozważenia *wszystkich* pokryć zbioru A przez rodziny przedziałów, ale można sprawdzić pewne podstawowe pożądane własności:

Zadanie 4. Dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$ zachodzi $\lambda([a,b]) = |a-b|$. Ponadto dla dowolnego zbioru $A \subseteq \mathbb{R}$ i funkcji liniowej $f(x) = ax + b$ mamy $\lambda(f(A)) = |a|\lambda(A)$.

Przykład. Z zadań 4 i 5 wynika, że $\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) = 0$, więc całka Lebesgue'a z funkcji $f(x) = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ wynosi okrągłe zero.

Zadanie 5. Dla dowolnych zbiorów $A_1, A_2, \ldots$ zachodzi nierówność $\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$.

Lebesgue (i jego poprzednicy) wiedzieli jednak, że z tak zdefiniowaną całką jest **jeden fundamentalny problem**. Zanim do niego przejdziemy, zilustrujmy pożytki płynące z nowej teorii.

Nowe perspektywy

Konstrukcja Lebesgue'a pozwala definiować całkę wszędzie tam, gdzie umiemy zdefiniować miarę. Przykładowo, Lebesgue podał konstrukcję miary powierzchniowej na sferze $\mathbb{S}^2$. Dla funkcji $f\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ zdefiniował więc całkę $\int_{\mathbb{S}^2} f$ jako całkę Riemanna $\int_0^{f_{\max}} |P_t| \, dt$, przy czym tym razem P_t są podzbiorami $\mathbb{S}^2$. Nadaje to sens takim pojęciom jak *średnia temperatura na Ziemi* – jest to całka funkcji temperatury $T\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ podzielona przez pole powierzchni Ziemi.

Rozwiązanie zadania M 1706.
Liczby $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ i $(x-d)$ są całkowite o iloczynie równym 4. Wobec tego ich wartości bezwzględne są równe 1, 1, 1, 4 lub 1, 1, 2, 2 (w pewnej kolejności). Jednakże wśród dowolnych trzech liczb dwie z nich mają ten sam znak, stąd w pierwszym przypadku dwie liczby byłyby równe 1 – oznaczałoby to, że dwie liczby spośród a, b, c i d są równe – sprzeczność.

Zatem moduły rozważanych liczb są równe 1, 1, 2, 2. Podobnie jak wyżej, uwzględniając, że a, b, c i d są parami różne, widzimy, że liczby $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)$ i $(x-d)$ są równe ± 1, ± 2 w pewnej kolejności. Jednakże wtedy

$$(x-a)+(x-b)+(x-c)+(x-d) = \\ = (+1)+(-1)+(+2)+(-2) = 0,$$

skąd szybko dostajemy tezę.

Innym owocem nowej teorii była nowoczesna interpretacja rachunku prawdopodobieństwa, pochodząca od Andrieja Kołmogorowa (1903–1987). Zapostulował on mianowicie, by funkcja przyporządkowująca zdarzeniu A jego prawdopodobieństwo $\mathbb{P}(A)$ była właśnie *miarą* na zbiorze zdarzeń elementarnych. Jednym z plusów takiego ścisłego podejścia jest możliwość zdefiniowania wartości oczekiwanej $\mathbb{E}(X)$ (danej zmiennej losowej X) jako całki.

Jako przykład rozważmy zmienną o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda > 0$. Rozkład ten jest scharakteryzowany przez warunek $\mathbb{P}(\{X > t\}) = e^{-\lambda t}$ dla $t > 0$ (innymi słowy, przez swoją *dystrybuantę*), co pozwala wyznaczyć oczekiwaną wartość takiej zmiennej:

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} \mathbb{P}(\{X > t\}) \, dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \, dt = \tfrac{1}{\lambda}.$$

A co jest nie tak?

Czas na wspomniane Poważne Zastrzeżenie: od całki oczekujemy, by dla dowolnych funkcji f, g zachodziła równość $\int_0^1 (f+g) = \int_0^1 f + \int_0^1 g$. I całka Riemanna tę własność posiada, ale całka w $(\star)$ nie! (a przynajmniej nie w podanym sformułowaniu).

Jeśli wejdziemy o krok głębiej, to okaże się, że podobną ułomność posiada miara zewnętrzna Lebesgue'a λ: istnieją rozłączne zbiory ograniczone $A, B \subseteq \mathbb{R}$, dla których $\lambda(A \cup B) \neq \lambda(A) + \lambda(B)$. Radykalne rozwiązanie przyjęte przez twórców teorii miary jest następujące: ograniczyć rodzinę zbiorów, których miarę będziemy rozważać.

O konstrukcjach zbiorów niemierzalnych (czyli zbiorów A, B o opisanych tu paradoksalnych własnościach) można przeczytać w artykułach P. Zakrzewskiego w Δ^8_{08} i Ł. Rajkowskiego w Δ^6_{19}. Paradoksalny rozkład kuli Banacha–Tarskiego, opisany przez J. Jaszuńską w Δ^4_{17}, jest tu szczególnie spektakularnym przykładem.

Definicja. Niepustą rodzinę $\mathcal{F}$ podzbiorów $\mathbb{R}$ nazwiemy σ-ciałem, jeśli jest zamknięta na przeliczalne działania teoriomnogościowe (sumy, przecięcia, dopełnienia). Miarą na $(\mathbb{R}, \mathcal{F})$ nazwiemy wówczas dowolną funkcję $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$ spełniającą $\mu(\emptyset) = 0$ oraz

$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \quad \text{dla dowolnego ciągu rozłącznych zbiorów } A_n \in \mathcal{F}.$$

Ostatecznie, funkcję $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy mierzalną, jeśli każdy ze zbiorów $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > t\}$ (dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$) należy do $\mathcal{F}$.

Na koniec jestem więc winien Czytelnikowi pewne wyjaśnienie. Można dowieść, że po ograniczeniu do pewnego σ-ciała $\mathcal{F}$, zawierającego m.in. wszystkie skończone przedziały, $\lambda\colon \mathcal{F} \to [0, \infty]$ staje się miarą. Dalej, należy zawęzić rozważania jedynie do mierzalnych funkcji $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$. Wkładem Lebesgue'a do teorii całki było wykazanie, że:

– każda funkcja całkowalna w sensie Riemanna jest mierzalna;
– dla funkcji mierzalnych całka określona w $(\star)$ ma wszystkie oczekiwane własności, w tym wiele takich, których brakowało całce Riemanna;
– dla funkcji całkowalnych w sensie Riemanna oba pojęcia całki się pokrywają.

Ale to jest już temat na dłuższą opowieść, zazwyczaj opowiadaną w formie semestralnego wykładu.