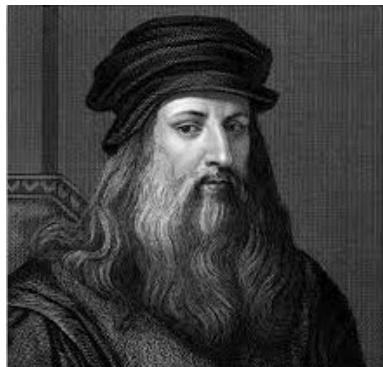


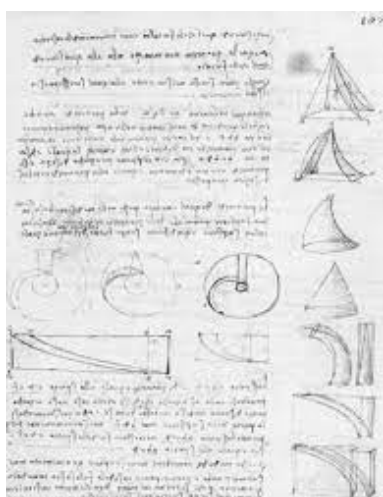
Leonardo da Vinci i topologia

Grzegorz ŁUKASZEWICZ*

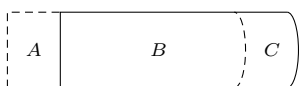
*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



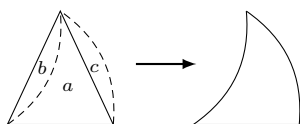
Leonardo da Vinci (1452–1519)



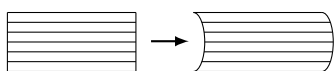
Przykłady trzech rodzajów transformacji. Kodeks Madrycki II, folio 107 r.



Rys. 1. Transformacja pierwszego rodzaju



Rys. 2. Transformacja drugiego rodzaju



Rys. 3. Transformacja trzeciego rodzaju

O Leonardzie napisano bardzo dużo. Istnieją rozliczne obszerne monografie dotyczące jego osiągnięć w różnych dziedzinach, na przykład w botanice [Emboden] czy anatomii [Clayton, Philo], nie wspominając już o malarstwie. Nie ma natomiast stosownego opracowania wkładu Leonarda do matematyki. Popularna wiedza na ten temat ogranicza się przeważnie do jego pięknych ilustracji w dziele *Divina proportione* Paciolego (1509). A przecież badania Leonarda w dziedzinie matematyki są zdumiewające, mimo że, jako nieopublikowane, nie odegrały swojej roli w rozwoju matematyki.

Leonardo patrzył na świat holistycznie, doszukując się wszędzie wzajemnych powiązań, wszystko było dla niego procesem zmian i transformacji, w anatomii, botanice, geologii czy hydrodynamice. Świat był dla niego procesem dynamicznym, sterowanym siłami, które należy poznać.

Bardzo zaawansowane badania hydrodynamiczne Leonarda [zob. Capra, 2013], zmierzające do opisu ruchu wody, stanowiły motywację do pomysłu opisu jakościowego jej dynamiki. Pamiętajmy, że w tamtej epoce, a także jeszcze w XVII wieku, rozważania matematyczne były prowadzone głównie w języku geometrii [zob. *Trysekcja kąta w „Geometrii” Kartezjusza Δ_{20}^{11}*], a właściwy dla fizyki aparat matematyczny pozwalający ująć te procesy ilościowo, czyli równania różniczkowe, pojawił się dopiero w XVII wieku, w kontekście mechaniki i geometrii.

Językiem dla opisu jakościowych procesów dynamicznych jest *topologia*, badająca między innymi ciągle w obie strony i wzajemnie jednoznaczne transformacje, a także *dynamika topologiczna*, natomiast w obrębie hydrodynamiki – *hydrodynamika topologiczna*. Same te pojęcia nie istniały oczywiście w XV wieku, ale badania Leonarda miały już pewne cechy o charakterze topologicznym, czyniąc go prekursorem w dziedzinie, której pierwsze załóżki przypisuje się czasom i badaczom znacznie późniejszym – Leibnizowi (1646–1716) i Eulerowi (1707–1783).

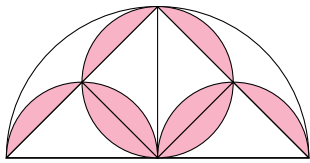
Na przykład, chcąc badać ruch wody, Leonardo rozważał transformacje (dziś powiedzielibyśmy *homeomorfizmy*) zachowujące objętość. W tym artykule opiszemy kilka jego prostych pomysłów, od których zaczynał swoje badania. Podamy także przykłady studiów Leonarda nawiązujące do dzisiejszej *topologii kombinatorycznej* oraz *teorii węzłów*.

Transformacje ciągłe. Pokażemy trzy rodzaje takich transformacji, rozważane przez Leonarda.

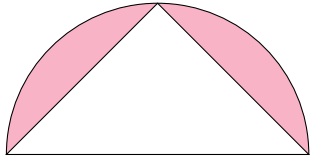
Na rysunku 1 widzimy figurę zaznaczoną ciągłą linią oraz figurę powstałą przez jej przesunięcie w lewo. Ponieważ zaznaczona część *B* jest wspólną częścią obu figur, pola figur *A* i *C* są równe. W ten prosty sposób Leonardo zbudował przekształcenie homeomorficzne między figurami *A* i *C*, zachowujące pole. Jeśli patrzeć na przekształcenie *A* na *C* jako na odzwierciedlenie ruchu wody, to zachowanie pola odpowiada jej nieściśliwości.

Na rysunku 2 widzimy trójkąt równoramienny oraz figurę krzywoliniową powstałą z wycięcia z naszego trójkąta obszaru *b* i doklejenia go wzdłuż drugiego boku, tak aby powstał obszar *c*. Otrzymaliśmy transformację trójkąta na figurę krzywoliniową, będącą jego deformacją z zachowaniem pola.

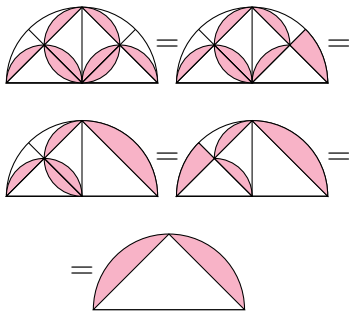
Na rysunku 3 widzimy dwie równoważne topologicznie figury o tym samym polu. Tym razem za konstrukcją stoi pomysł nawiązujący do tzw. *metody niepodzielnych*, którą stosował już Archimedes w celu obliczania pola figur, a która później, w XVII wieku, została ujęta w twierdzeniu Bonaventury Cavalieriego (1635). Niepodzielnymi są tu linie (nieskończenie



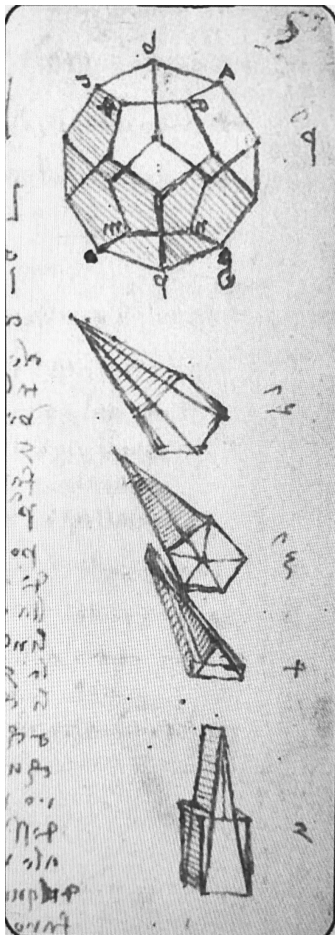
Rys. 4a. Równanie geometryczne



Rys. 4b. Rozwiązanie równania geometrycznego



Rys. 5. Rozwiązywanie równania geometrycznego



Rys. 6. Transformacja dwunastościanu foremnego na sześcian. Kodeks Forster I, folio 7 r.

cienkie „podobszary” danej figury), na które daną figurę dzielimy, a później ustawiamy w innej konfiguracji, tworząc w ten sposób inną figurę o tym samym polu (co wynika z twierdzenia Cavalieriego w przypadku dwuwymiarowym [Edwards]). W podanym przykładzie Leonardo rozważa ciągle transformacje zespołu takich niepodzielnych.

W manuskryptach Leonarda jest wiele innych przykładów myślenia topologicznego. Jednym z nich jest tworzenie map danego terenu, gdzie pewna jego część, na przykład plan miasta, jest mapowana dokładnie, z zachowaniem kątów i proporcji, a druga, przedstawiająca okolice miasta, jest mapowana tylko z dokładnością do zachowania struktury topologicznej terenu.

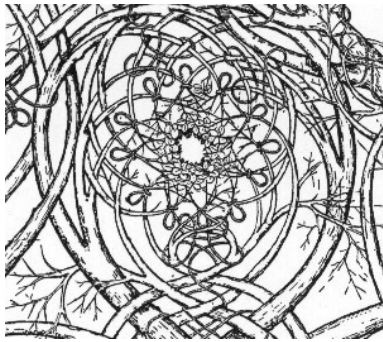
W badaniach dotyczących relacji między mikrokosmosem a makrokosmosem – na przykład podobieństwa między układem krwionośnym w ręku człowieka a rzeką z jej dopływami czy z pnem drzewa z jego rozgałęzieniami – Leonardowi chodzi przede wszystkim o porównanie struktury topologicznej. Dzisiaj takie badania należą do *teorii grafów*.

Równania geometryczne. Leonardo zamierzał napisać cały traktat o czymś, co można nazwać równaniami geometrycznymi. W „Kodeksie Atlantyckim” zebrał dużą kolekcję transformacji figur, którą zatytułował *De ludo geometrico*, czyli *O grze geometrycznej*. Jego pomysły w tym zakresie zostały dziś wykorzystane w rozmaitych książeczkach do rysowania służących terapiom antystresowym, patrz np. [Margara]. Aby zrozumieć, o co w tym chodzi, spójrzmy na figury na rysunkach 4a i 4b. Rysunek 4a przedstawia *równanie geometryczne*, a rysunek 4b jego *rozwiązanie*. Na rysunku 4a duże półkole ma promień R , a w nim jest osiem zaciemnionych segmentów powstałych z wpisania w to półkole czterech półkoli o promieniach $\frac{R}{2}$.

Pola zaciemnione na obu rysunkach są równe, a patrząc na rysunek 4b, łatwo je obliczyć. Konkretnie liczby nie są tu zresztą ważne. Rzecz w tym, aby pokazać równość tych pól, tworząc ciąg transformacji, homeomorficznych i zachowujących pole, kolejnych segmentów figury zaciemnionej na rysunku 4a, które to transformacje prowadzą do otrzymania w końcu figury na rysunku 4b. Taki ciąg transformacji możemy nazwać *rozwiązaniem równania geometrycznego*, przy czym rozwiązań może być oczywiście wiele. Na rysunku 5 przedstawiono kolejne kroki rozwiązania rozważanego równania geometrycznego.

Transformacje figur trójwymiarowych. Leonardo wniósł także swój wkład w badanie relacji między bryłami platońskimi. Rysunek 6 przedstawia kolejne kroki transformacji dwunastościanu foremnego na sześcian, z zachowaniem objętości. Widzimy rozkład dwunastościanu na dwanaście równych ostrosłupów o podstawach będących pięciokątami foremnymi, następnie rozkład każdego takiego ostrosłupa na pięć mniejszych ostrosłupów o podstawach trójkątnych. Dostajemy w sumie sześćdziesiąt takich brył. Każdą z nich przekształcamy na ostrosłup o tej samej wysokości, ale o podstawie prostokątnej, której pole jest równe polu trójkąta stanowiącego podstawę przekształcanego ostrosłupa. W ten sposób dostajemy sześćdziesiąt ostrosłupów, których suma objętości jest równa objętości wyjściowego dwunastościanu. Końcowy krok to upakowanie ich w sześcian.

Węzły. Badanie i użycie rozmaitych rodzajów węzłów dla celów dekoracyjnych czy symbolicznych ma bardzo długą tradycję w wielu kulturach [Przytycki]. W czasach Leonarda dekoracje z wykorzystaniem węzłów były popularne. Sam Leonardo również studiował węzły dla celów dekoracyjnych, ale także zainteresował się nimi głębiej [zob. Hoy, Capra, 2008, Cocciaardi]. Wszystko zresztą, czym się zajmował, chciał poznać bardzo dokładnie i w różnych kontekstach – co wynikało z jego holistycznego myślenia. Warto zajrzeć do Internetu, aby zobaczyć liczne przykłady bardzo złożonych węzłów, które skomponował i badał Leonardo da Vinci.



Przykład węzła dekoratywnego

Literatura

- F. Capra: *The Science of Leonardo. Inside the Mind of the Great Genius of the Renaissance*, Anchor Books, New York, 2008.
- F. Capra: *Learning from Leonardo. Decoding the Notebooks of a Genius*, Berrett-Koehler Publishers, San Francisco, 2013.
- M. Clayton, R. Philo: *Leonardo da Vinci Anatom*, ITEM Publishing, Warszawa, 2017.
- C. Cocciardi: *Leonardo's Knots, Mona Lisa Knot*, 2019.
- C. H. Edwards, Jr: *The Historical Development of the Calculus*, Springer, 1994.
- W. A. Emboden: *Leonardo da Vinci on Plants and Gardens*, Christopher Helm, London, 1987.
- J. Hoy, K. C. Millett: *A Mathematical Analysis of Knotting and Linking in Leonardo da Vinci's Cartelle of the Accademia Vinciana*, Journal of Mathematics and the Arts, 2014.
- D. Margara: *De Ludo Geometrico: Anti-Stress Colouring Inspired by Leonardo Da Vinci*, White Star, 2015.
- J. H. Przytycki: *History of knot theory*, 2007.



Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1705. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym
 $\sphericalangle ABP = 2\sphericalangle ADP$ oraz $\sphericalangle DCP = 2\sphericalangle DAP$.

Udowodnij, że $AB = PB = PC$.

Rozwiązanie na str. 15

M 1706. Niech x, a, b, c i d będą takimi liczbami całkowitymi, że

$$(x - a)(x - b)(x - c)(x - d) - 4 = 0,$$

oraz a, b, c, d są parami różne. Udowodnij, że $x = \frac{1}{4}(a + b + c + d)$.

Rozwiązanie na str. 8

M 1707. Niech n i r będą nieujemnymi liczbami całkowitymi, takimi że żadna z liczb

$$n^2 + r - k(k + 1), \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots$$

nie jest liczbą dodatnią złożoną lub równą -1 . Udowodnij, że liczba $4n^2 + 4r + 1$ jest pierwsza lub równa 1 lub 9.

Rozwiązanie na str. 12

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1045. Podczas projekcji zamieniono kierunek przewijania taśmy filmowej, i widzowie oglądali film od końca. Jak zmieniły się prędkości i przyspieszenia w scenach obserwowanych przez widzów?

Rozwiązanie na str. 10

F 1046. W całkowicie wypełnionej, walcowej puszcze o masie M i wysokości H mieści się napój o masie m . Puszka stoi pionowo. Gdy jest pełna i gdy jest pusta środek masy puszki z napojem znajduje się na wysokości $H/2$. Dla pośredniego stopnia wypełnienia środek masy jest poniżej $H/2$. Przy jakiej wysokości h napoju (mierząc od dna) środek masy znajduje się najniżej?

Rozwiązanie na str. 9

