Klub 44 M

$\sqrt[\otimes]{\int!}=44$

Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2022

Regulamin Ligi znajduje się na naszej stronie: `deltami.edu.pl`

Zadania z matematyki nr 837, 838

Redaguje Marcin E. KUCZMA

837. Wewnątrz wypukłego n-kąta $A_1A_2\ldots A_n$ leży taki punkt P, że każdy z trójkątów PA_iA_j jest równoramienny ($1 \leqslant i < j \leqslant n$). Czy stąd wynika, że wielokąt ma okrąg opisany, którego środkiem jest punkt P?

838. Udowodnić, że istnieje nieskończenie wiele trójek liczb całkowitych x, y, z większych od 1, spełniających równanie

$$x^4 + y^4 = z^2 + 1.$$

Zadanie 838 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2022

Przypominamy treść zadań:

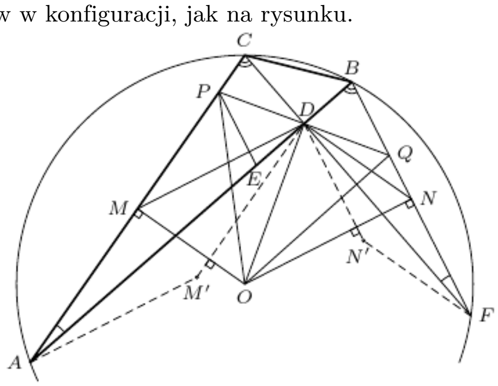
829. Trójkąt ABC, w którym $\sphericalangle A < \sphericalangle B < 90^\circ < \sphericalangle C$, jest wpisany w okrąg o środku O; odcinek CD jest wysokością. Punkt E jest symetryczny do B względem D; punkt M jest środkiem boku AC. Okrąg przechodzący przez O, D, M przecina prostą AC w punktach M i P. Udowodnić, że trójkąty DCP i DEP mają równe promienie okręgów opisanych.

830. Znaleźć wszystkie trójki dodatnich liczb całkowitych x, y, z, spełniające równanie

$$\operatorname{arc\,ctg} x + \operatorname{arc\,ctg} y + \operatorname{arc\,ctg} z = \frac{\pi}{4}.$$

829. Należy udowodnić, że $\sphericalangle DCP = \sphericalangle DEP$; teza zadania jest równoważnym (trochę wymyślnym) przeformułowaniem tej równości.

Niech prosta CD przecina okrąg ABC ponownie w punkcie F; niech N będzie środkiem odcinka BF, a Q – punktem przecięcia BF z prostą PD. Podane założenia o kątach trójkąta ABC uzasadniają układ rozważanych punktów w konfiguracji, jak na rysunku.



Równoramienne trójkąty DMA i DNF są podobne, bo ich kąty ostre MAD i NFD są kątami wpisanymi w okrąg ABC, opartymi na łuku BC. Uzupełniamy te trójkąty do rombów $AMDM'$ i $FNDN'$; widzimy cztery trójkąty podobne; połączymy je w pary: $\triangle DMA \sim \triangle DN'F$, $\triangle DNF \sim \triangle DM'A$. W obu tych parach podstawy AD i FD są prostopadłe; stąd (i z usytuowania punktów M, N', N, M' względem prostych AD, FD) wynika, że $DM \perp DN'$, $DN \perp DM'$.

Jednocześnie $ON \perp DN'$ (bo $ON \perp FN$, a $FNDN'$ jest rombem), i podobnie $OM \perp DM'$. W połączeniu z wcześniejszymi relacjami prostopadłości znaczy to, że $DM \| ON$, $DN \| OM$; czworokąt $DMON$ jest równoległobokiem.

Okrąg przechodzący przez punkty O, D, M, P (o którym mowa w treści zadania) ma średnicę OP, bo kąt OMP jest prosty. W takim razie również kąt ODP jest prosty. Tak więc czworokąt $DONQ$ ma kąty proste przy wierzchołkach D, N, czyli ma okrąg opisany o średnicy OQ. Te dwa okręgi są opisane (odpowiednio) na trójkątach DMO i OND, które są przystające, skoro $DMON$ to równoległobok. Mają zatem równe średnice: $OP = OQ$. [Czytelnicy znający *twierdzenie o motylku* (the *Butterfly Theorem*) widzą zapewne, że ostatnia równość także z niego wynika.]

W równoramiennym trójkącie POQ odcinek OD jest wysokością, więc i środkową: $DP = DQ$. Ponadto $DE = DB$ (z założenia) oraz $\sphericalangle EDP = \sphericalangle BDQ$ (kąty wierzchołkowe), i w konsekwencji trójkąty EDP i BDQ są przystające. Stąd $\sphericalangle DEP = \sphericalangle DBQ$. Pozostaje zauważyć, że kąty DBQ i DCP to kąty wpisane oparte na łuku AF. Dostajemy równość $\sphericalangle DCP = \sphericalangle DEP$, którą chcieliśmy udowodnić.

830. Przyjmijmy, że liczby x, y, z spełniają podane warunki oraz (bez straty ogólności) $x \geqslant y \geqslant z$. Liczby $\alpha = \operatorname{arc\,ctg} x$, $\beta = \operatorname{arc\,ctg} y$, $\gamma = \operatorname{arc\,ctg} z$ są dodatnie, ich suma wynosi $\pi/4$, więc $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma < \pi/4$; stąd $z = \operatorname{ctg}\gamma > 1$. Ponadto $\gamma \geqslant (\alpha+\beta+\gamma)/3$, zatem $z \leqslant \operatorname{ctg}(\pi/12) = 2 + \sqrt{3} < 4$. Tak więc $z = 2$ lub $z = 3$.

Równanie $\alpha + \beta + \gamma = \pi/4$ przekształcamy równoważnie do postaci:

$$\operatorname{ctg}\big(\alpha+\beta\big) = \operatorname{ctg}\big(\tfrac{\pi}{4} - \gamma\big);$$

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha\,\operatorname{ctg}\beta - 1}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\,\operatorname{ctg}\gamma - 1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} - \operatorname{ctg}\gamma};$$

$$\frac{xy-1}{x+y} = \frac{z+1}{z-1}.$$

Gdy $z = 2$, dostajemy równanie $xy - 1 = 3(x+y)$, czyli $(x-3)(y-3) = 10$, z rozwiązaniami $x = 13$, $y = 4$ oraz $x = 8$, $y = 5$. Gdy $z = 3$, mamy równanie $xy - 1 = 2(x+y)$, czyli $(x-2)(y-2) = 5$, z rozwiązaniem $x = 7$, $y = 3$ (wszystko przy założeniu $x \geqslant y \geqslant z$). Rozumowanie się odwraca, więc znalezione trójki (x, y, z) spełniają równanie wyjściowe.

Odpowiedź: $(x, y, z) = (13, 4, 2)$, $(8, 5, 2)$, $(7, 3, 3)$ oraz permutacje tych trójek.

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 722 ($WT = 1{,}63$) i 723 ($WT = 3{,}77$) z numeru 9/2021

Konrad Kapcia	Poznań	1 – 42,51
Tomasz Rudny	Poznań	41,38
Sławomir Buć	Mystków	36,88
Mateusz Kapusta	Wrocław	35,59
Jacek Konieczny	Poznań	31,90
Ryszard Woźniak	Kraków	31,46
Ryszard Baniewicz	Włocławek	30,74
Tomasz Wietecha	Tarnów	15 – 28,11
Aleksander Surma	Myszków	4 – 27,75
Marian Łupieżowiec	Gliwice	2 – 25,85