O liczbach Sierpińskiego

*Wojciech GUZICKI**

* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Historia liczb Sierpińskiego zaczyna się chyba od Pierre'a Fermata, prawnika i matematyka z Tuluzy, który około 1640 roku wyraził przypuszczenie, że wszystkie liczby naturalne postaci $F_n = 2^{2^n} + 1$ (dzisiaj nazywane liczbami Fermata) są pierwsze. Sprawdził, że liczby

$$F_0 = 2^1 + 1 = 3,\ F_1 = 2^2 + 1 = 5,\ F_2 = 2^4 + 1 = 17,$$
$$F_3 = 2^8 + 1 = 257,\ F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$$

rzeczywiście są pierwsze. Hipoteza Fermata okazała się nieprawdziwa, pierwszy kontrprzykład został znaleziony około 1747 roku przez Eulera:

$$F_5 = 2^{2^5} + 1 = 2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

Można oczywiście zapytać, jak Euler znalazł ten rozkład na czynniki pierwsze. Czy po prostu miał więcej cierpliwości niż Fermat? Otóż nie. Euler udowodnił, że każdy dzielnik pierwszy p liczby Fermata F_n ma postać

$$p = k \cdot 2^{n+1} + 1$$

dla pewnej liczby naturalnej k. Stąd wynika, że dzielnik pierwszy liczby F_5 musi mieć postać $p = 64k + 1$. Teraz wystarczyło zbadać 10 liczb (dla $k = 1, 2, \ldots, 10$), by znaleźć dzielnik 641.

Odkrycie Eulera i problem badania następnych liczb Fermata spowodowały naturalne zainteresowanie liczbami postaci $k \cdot 2^n + 1$ i w szczególności pytaniem o to, czy są one pierwsze. Wacław Sierpiński udowodnił w 1960 roku następujące twierdzenie (znane w literaturze teorioliczbowej jako twierdzenie Sierpińskiego).

Twierdzenie. *Istnieje nieskończenie wiele nieparzystych liczb naturalnych k o następującej własności:*

- *liczba $k \cdot 2^n + 1$ jest złożona dla każdej liczby naturalnej n.*

Od tego czasu nieparzyste liczby k, dla których wszystkie liczby postaci $k \cdot 2^n + 1$ są złożone, zaczęto nazywać liczbami Sierpińskiego. Przedstawię teraz dowód twierdzenia Sierpińskiego. Wcześniej jednak zaprezentuję pewne pojęcie.

Przypuśćmy, że mamy dane dwa ciągi skończone liczb naturalnych tej samej długości t:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_t) \quad \text{oraz} \quad (m_1, m_2, \ldots, m_t),$$

oraz mamy dany pewien podzbiór zbioru liczb naturalnych $A \subseteq \mathbb{N}$. Mówimy, że układ kongruencji

$$\begin{cases} n \equiv a_1 \pmod{m_1}, \\ n \equiv a_2 \pmod{m_2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n \equiv a_t \pmod{m_t} \end{cases}$$

jest systemem kongruencji pokrywającym zbiór A, jeśli każda liczba naturalna $n \in A$ spełnia co najmniej jedną z tych kongruencji. Mówimy także, że zbiór liczb naturalnych $B \subseteq \mathbb{N}$ pokrywa zbiór A, jeśli każda liczba $n \in A$ jest podzielna przez co najmniej jedną liczbę $p \in B$. Przejdźmy teraz do dowodu twierdzenia Sierpińskiego.

Dowód. Dla dowolnej liczby naturalnej k oznaczmy:

$$A_k = \{k \cdot 2^n + 1 :\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Niech następnie

$$B = \{3, 5, 17, 257, 641, 65537, 6700417\}.$$

Udowodnię, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych k o własności:

- zbiór B pokrywa zbiór A_k.

Weźmy trzy ciągi długości 7:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_7), \quad (m_1, m_2, \ldots, m_7) \quad \text{oraz} \quad (p_1, p_2, \ldots, p_7),$$

Rozwiązanie zadania F 1043.
Dla zapewnienia komfortu pasażerów wartość wektorowej sumy przyspieszenia a w kierunku poziomym i pionowego przyspieszenia ziemskiego g nie może przekroczyć $2g$. Oznacza to, że $a^2 + g^2 \leqslant (2g)^2$, czyli $a \leqslant g\sqrt{3}$. Osiągnięcie prędkości startowej v wymaga rozpędzania samolotu ze stałym przyspieszeniem a w czasie $t = v/a \geqslant v/(g\sqrt{3})$, a potrzebna do tego długość pasa startowego wynosi $s = at^2/2 = v^2/(2a) \geqslant v^2/(2g\sqrt{3})$. Po podstawieniu danych liczbowych otrzymujemy $t \geqslant 4{,}1$ s, $s \geqslant 139{,}3$ m. Obie wartości to oszacowania z dołu – osiągnięcie przyspieszenia a wymaga pewnego czasu.

zdefiniowane następująco:

$$\begin{array}{lllllll} a_1=1, & a_2=2, & a_3=4, & a_4=8, & a_5=16, & a_6=32, & a_7=0, \\ m_1=2, & m_2=4, & m_3=8, & m_4=16, & m_5=32, & m_6=64, & m_7=64, \\ p_1=3, & p_2=5, & p_3=17, & p_4=257, & p_5=65537, & p_6=641, & p_7=6700417. \end{array}$$

Wówczas układ kongruencji

$$n \equiv a_i \pmod{m_i} \quad \text{dla} \quad i \in \{1,2,3,4,5,6,7\} \qquad (*)$$

pokrywa cały zbiór liczb naturalnych $\mathbb{N}$. Możemy także zauważyć, że

$$2^{m_i} \equiv 1 \pmod{p_i} \quad \text{dla} \quad i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}.$$

Dowody obu powyższych spostrzeżeń pozostawię jako nietrudne ćwiczenie.

Ustalmy teraz na chwilę liczbę $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$. Liczba p_i jest nieparzysta, więc $\mathrm{NWD}(2^{a_i}, p_i) = 1$. Stąd wynika, że kongruencja

$$2^{a_i} \cdot x \equiv -1 \pmod{p_i}$$

z niewiadomą x ma rozwiązanie. Niech liczba b_i będzie rozwiązaniem tej kongruencji. Wówczas mamy:

$$b_i \cdot 2^{a_i} + 1 \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Teraz skorzystamy z chińskiego twierdzenia o resztach. Istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych k spełniających układ kongruencji:

$$k \equiv b_i \pmod{p_i} \quad \text{dla} \quad i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}.$$

Weźmy jedną z takich liczb k oraz dowolną liczbę $n \in \mathbb{N}$. Wówczas $k \cdot 2^n + 1 \in A_k$. Układ kongruencji $(*)$ pokrywa cały zbiór liczb naturalnych, więc istnieje taka liczba $i \in \{1,2,3,4,5,6,7\}$, że

$$n \equiv a_i \pmod{m_i}.$$

Wówczas $n = c \cdot m_i + a_i$ dla pewnej liczby $c \in \mathbb{N}$. Stąd wynika, że

$$k \cdot 2^n + 1 = k \cdot 2^{c \cdot m_i + a_i} + 1 = k \cdot 2^{c \cdot m_i} \cdot 2^{a_i} + 1 = k \cdot \left(2^{m_i}\right)^c \cdot 2^{a_i} + 1 \equiv$$
$$\equiv b_i \cdot 1^c \cdot 2^{a_i} + 1 = b_i \cdot 2^{a_i} + 1 \equiv 0 \pmod{p_i}.$$

Liczba $k \cdot 2^n + 1 \in A_k$ jest podzielna przez liczbę p_i. Z dowolności n wynika, że zbiór $B = \{p_1, p_2, \ldots, p_7\}$ pokrywa zbiór A_k. Istnieje więc nieskończenie wiele liczb k, dla których zbiór B pokrywa zbiór A_k. To kończy dowód twierdzenia. □

Warto zauważyć, że dla przeprowadzenia dowodu liczby $p_1, \ldots, p_7$ zostały dobrane tak, żeby 2^{2^i} dzieliło się przez p_i dla $1 \leqslant i \leqslant 6$ oraz żeby 2^{2^6} dzieliło się przez p_7.

Z dowodu twierdzenia Sierpińskiego możemy także odtworzyć liczby k – najmniejszą z nich jest $k = 15\,511\,380\,746\,462\,593\,381$. Nie jest to jednak najmniejsza liczba Sierpińskiego. W roku 1962 John Selfridge znalazł mniejszą: $k = 78557$. Wykazał także, że zbiór $B = \{3, 5, 7, 13, 19, 37, 73\}$ pokrywa zbiór A_{78557}. Jednak nie wiemy, czy liczba 78557 jest najmniejszą liczbą Sierpińskiego. Według *Wikipedii* do kwietnia 2021 roku było jeszcze pięć kandydatek na najmniejszą liczbę Sierpińskiego:

$$21181, \quad 22699, \quad 24737, \quad 55459 \quad \text{oraz} \quad 67607,$$

tzn. o wszystkich pozostałych liczbach mniejszych od 78557 wiadomo, że liczbami Sierpińskiego nie są.

Metoda znajdowania zbiorów pokrywających ma zastosowanie w innych zadaniach. Pokażę jedno z nich. Weźmy dowolną liczbę $k \geqslant 2$. Do niej, na końcu, dopisujemy jedynki. Powstaje pytanie, czy dla każdej liczby naturalnej k wszystkie tak utworzone liczby są złożone. Odpowiedź jest prawie natychmiastowa: to nie jest prawdą. Dla $k = 2$ mamy liczbę złożoną 21 oraz liczbę pierwszą 211. Dla $k = 3$ i $k = 4$ wystarczy jedna jedynka: liczby 31 i 41 są pierwsze. Dla $k = 5$ mamy dopiero liczbę pierwszą 511111. Jeszcze gorzej jest dla $k = 32$ i dla $k = 12$: do liczby 32 trzeba dopisać na końcu 35 jedynek, by otrzymać liczbę pierwszą, a do liczby 12 trzeba dopisać aż 136 jedynek.

Okazuje się, że dla liczby 37 jest inaczej. Oznaczmy $s_n = 37111\ldots111$, gdzie w zapisie liczby s_n mamy n jedynek. Wówczas można pokazać, że zbiór $B = \{3, 7, 13, 37\}$ pokrywa zbiór

$$A = \{s_n : \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Rozwiązanie zadania F 1044.
W zegarku mechanicznym elementem odmierzającym upływ czasu jest tzw. balans drgający pod wpływem siły sprężystości sprężyny. Balans drga w powietrzu znajdującym się wewnątrz zegarka i podczas drgań wprawia w ruch także otaczające powietrze. Masa poruszanego powietrza zwiększa „efektywny” moment bezwładności balansu. Na szczycie wysokiej góry ciśnienie atmosferyczne jest mniejsze niż u jej podnóża, a więc i powietrze wewnątrz zegarka jest rzadsze. Tym samym masa powietrza unoszonego podczas drgań zmniejsza się, co prowadzi do zmniejszenia „efektywnego” momentu bezwładności balansu i skrócenia okresu jego drgań. Na szczycie wysokiej góry zegarek profesora Rabiego spieszył się. Podobno podczas wspólnej podróży koleją Rabi wspomniał o swojej obserwacji Enrico Fermiemu, który po godzinie przedstawił dokładny ilościowy opis zjawiska.

Oto dowód. Zauważmy najpierw, że

$$s_n = 37 \cdot 10^n + \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1) = \frac{333 \cdot 10^n + 10^n - 1}{9} = \frac{334 \cdot 10^n - 1}{9}.$$

Następnie zauważmy, że liczba n jest jednej z czterech postaci:

$$n = 3m, \quad n = 6m + 1, \quad n = 6m + 4 \quad \text{lub} \quad n = 3m + 2,$$

gdzie m jest liczbą naturalną. Mamy zatem cztery przypadki.

Przypadek 1. Niech $n = 3m$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$334 = 9 \cdot 37 + 1 \equiv 1 \pmod{37},$$
$$1000 = 27 \cdot 37 + 1 \equiv 1 \pmod{37}.$$

Stąd wynika, że

$$334 \cdot 10^n - 1 = 334 \cdot 10^{3m} - 1 = 334 \cdot 1000^m - 1 \equiv$$
$$\equiv 1 \cdot 1^m - 1 = 0 \pmod{37}.$$

Przypadek 2. Niech $n = 6m + 1$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$3340 = 477 \cdot 7 + 1 \equiv 1 \pmod{7},$$
$$10^6 = 142857 \cdot 7 + 1 \equiv 1 \pmod{7}.$$

Stąd wynika, że

$$334 \cdot 10^n - 1 = 334 \cdot 10^{6m+1} - 1 = 3340 \cdot (10^6)^m - 1 \equiv$$
$$\equiv 1 \cdot 1^m - 1 = 0 \pmod{7}.$$

Przypadek 3. Niech $n = 6m + 4$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$3340000 = 256923 \cdot 13 + 1 \equiv 1 \pmod{13},$$
$$10^6 = 76923 \cdot 13 + 1 \equiv 1 \pmod{13}.$$

Stąd wynika, że

$$334 \cdot 10^n - 1 = 334 \cdot 10^{6m+4} - 1 = 3340000 \cdot (10^6)^m - 1 \equiv$$
$$\equiv 1 \cdot 1^m - 1 = 0 \pmod{13}.$$

Przypadek 4. Niech $n = 3m + 2$, gdzie m jest liczbą naturalną. Wówczas:

$$33400 = 1237 \cdot 27 + 1 \equiv 1 \pmod{27},$$
$$1000 = 37 \cdot 27 + 1 \equiv 1 \pmod{27}.$$

Stąd wynika, że

$$334 \cdot 10^n - 1 = 334 \cdot 10^{3m+2} - 1 = 33400 \cdot 1000^m - 1 \equiv$$
$$\equiv 1 \cdot 1^m - 1 = 0 \pmod{27}.$$

Skoro liczba $334 \cdot 10^n - 1$ jest podzielna przez 27, więc liczba

$$s_n = \frac{334 \cdot 10^n - 1}{9}$$

jest podzielna przez 3.

Wykazaliśmy zatem, że we wszystkich przypadkach liczba s_n jest podzielna przez co najmniej jedną liczbę ze zbioru $B = \{3, 7, 13, 37\}$, a więc zbiór B rzeczywiście pokrywa zbiór A. Stąd wynika, że jeśli liczba jedynek jest różna od zera, to otrzymana liczba jest złożona. Powstaje pytanie, czy istnieje liczba k o tej własności, że analogiczne liczby s_n są złożone dla każdej liczby n, także równej 0. Okazuje się, że liczba $k = 38$ ma tę własność.

Można udowodnić (w sposób podobny do powyższego), że:

- jeśli $n = 3m + 1$ (gdzie m jest liczbą naturalną), to liczba
$$s_n = 38 \cdot 10^n + \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1)$$
jest podzielna przez 3,
- jeśli $n = 3m + 2$ (gdzie m jest liczbą naturalną), to liczba
$$s_n = 38 \cdot 10^n + \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1)$$
jest podzielna przez 37.

Oba dowody pozostawię jako ćwiczenie. Jeśli natomiast $n = 3m$ (gdzie m jest liczbą naturalną), to liczba s_n rozkłada się na czynniki w następujący sposób:

$$s_n = 38 \cdot 10^n + \frac{1}{9} \cdot (10^n - 1) = \frac{343 \cdot (10^m)^3 - 1}{9} =$$
$$= \frac{(7 \cdot 10^m)^3 - 1}{9} =$$
$$= \frac{7 \cdot 10^m - 1}{3} \cdot \frac{(7 \cdot 10^m)^2 + (7 \cdot 10^m) + 1}{3}.$$

Sprawdzenie, że oba czynniki

$$\frac{7 \cdot 10^m - 1}{3} \quad \text{oraz} \quad \frac{(7 \cdot 10^m)^2 + (7 \cdot 10^m) + 1}{3}$$

są liczbami całkowitymi, większymi od 1, także pozostawię jako ćwiczenie.

Na koniec powróćmy jeszcze do liczb Sierpińskiego. W 1993 roku A. S. Izotov udowodnił następujące twierdzenie:

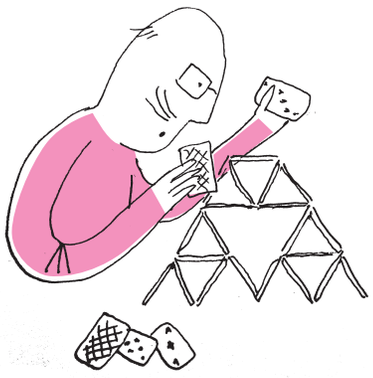
Twierdzenie. *Jeśli liczba naturalna t spełnia układ kongruencji*

$$\begin{cases} t \equiv 1 \pmod{2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65537 \cdot 6700417}, \\ t \equiv 0 \pmod{5}, \\ t \equiv 256 \pmod{641} \end{cases}$$

oraz $k = t^4$, to k jest liczbą Sierpińskiego.

Szkic dowodu. Można łatwo pokazać, że dla dowolnej liczby naturalnej $m \geqslant 0$ zachodzą następujące kongruencje:

$$k \cdot 2^{2m+1} + 1 \equiv 0 \pmod{3},$$
$$k \cdot 2^{8m+4} + 1 \equiv 0 \pmod{17},$$
$$k \cdot 2^{16m+8} + 1 \equiv 0 \pmod{257},$$
$$k \cdot 2^{32m+16} + 1 \equiv 0 \pmod{65537},$$
$$k \cdot 2^{64m+32} + 1 \equiv 0 \pmod{6700417},$$
$$k \cdot 2^{64m} + 1 \equiv 0 \pmod{641}.$$



Natomiast dla liczb n postaci $n = 4m + 2$ liczba $k \cdot 2^n + 1$ rozkłada się na czynniki. Skorzystamy mianowicie z tożsamości Sophie Germain:

$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = \\ = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2).$$

Mamy więc:

$$k \cdot 2^n + 1 = 1 + t^4 \cdot 2^{4m+2} = 1 + 4t^4 \cdot (2^m)^4 = 1^4 + 4(t \cdot 2^m)^4 = \\ = (1 + 2t \cdot 2^m + 2t^2 \cdot 2^{2m})(1 - 2t \cdot 2^m + 2t^2 \cdot 2^{2m}) = \\ = (1 + t \cdot 2^{m+1} + t^2 \cdot 2^{2m+1})(1 - t \cdot 2^{m+1} + t^2 \cdot 2^{2m+1})$$

oraz obie liczby występujące w rozkładzie po prawej stronie są większe od 1. To kończy szkic dowodu.

Zauważmy także, że dla każdej liczby n mamy kongruencję

$$k \cdot 2^n + 1 \equiv 1 \pmod 5,$$

z której wynika, że zbiór $\{3, 5, 17, 257, 641, 65537, 6700417\}$ nie pokrywa zbioru liczb postaci $k \cdot 2^n + 1$. Nie mogliśmy zatem powołać się na rozumowanie przedstawione wcześniej w dowodzie twierdzenia Sierpińskiego.

Zadania

Przygotował Dominik BUREK

M 1702. Na kartce w kratkę zaznaczono $4n$ pól. Udowodnij, że istnieje n zaznaczonych pól, które są parami rozłączne (tzn. nie mają punktów wspólnych).
Rozwiązanie na str. 15

M 1703. Punkt T leży wewnątrz trójkąta ABC, w którym $\sphericalangle BAC = 60^\circ$. Ponadto spełniona jest równość

$$\sphericalangle ATB = \sphericalangle CTA = 120^\circ.$$

Punkty X i Y są środkami odcinków AB i AC, odpowiednio. Udowodnij, że punkty A, Y, T i X leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie na str. 4

M 1704. Dane są dwie różne liczby całkowite dodatnie k oraz m. Udowodnij, że

$$\left(k - \frac{1}{k}\right)\left(m - \frac{1}{m}\right) \leqslant km - 2.$$

Rozwiązanie na str. 13

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1043. Człowiek poddany działaniu przyspieszenia nieprzekraczającego dwukrotnej wartości przyspieszenia ziemskiego nie doznaje przykrych wrażeń. Prędkość startowa dużych samolotów pasażerskich (np. Jumbo Jeta) wynosi $v \approx 250$ km/godz. Jaki jest minimalny czas „rozpędzania" samolotu przed startem, podczas którego pasażerowie nie odczuwają dyskomfortu? Jaka jest minimalna długość poziomego pasa startowego potrzebna do osiągnięcia prędkości startowej? Przyspieszenie ziemskie $g \approx 10$ m/s^2.
Rozwiązanie na str. 6

F 1044. Profesor Izydor Rabi był bardzo dumny z precyzji, z jaką odmierzał czas jego mechaniczny zegarek. Podczas pobytu w laboratorium badającym promieniowanie kosmiczne, położonym na szczycie wysokiej góry, zaobserwował jednak, że jego zegarek przestał wskazywać poprawny czas. Czy na szczycie góry zegarek spieszył się, czy późnił?
Rozwiązanie na str. 7