Na tropie wielomianów – część 2

Bartłomiej BZDĘGA

Uwaga. W całym artykule (również w zadaniach) rozważamy wyłącznie wielomiany o współczynnikach rzeczywistych i mówimy wyłącznie o pierwiastkach rzeczywistych.

Korzystając z indukcji matematycznej oraz twierdzenia Bézouta (zob. kącik nr 12 w Δ^{12}_{19}), można wykazać, że wielomian stopnia $n \geqslant 1$ ma co najwyżej n pierwiastków. Z tego wynika następujący fakt, który jest punktem wyjścia do kolejnych rozważań.

Twierdzenie 1. *Jeśli wielomian $P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ ma więcej niż n pierwiastków, to jest on wielomianem zerowym. W szczególności zerowy jest każdy wielomian, który ma nieskończenie wiele pierwiastków.*

Prostym wnioskiem z powyższego jest

Twierdzenie 2. *Weźmy $n+1$ różnych liczb: $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Jeśli wielomiany P i Q o stopniu nieprzekraczającym n spełniają równości $P(x_k) = Q(x_k)$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$, to $P = Q$.*

Dowód. Teza wynika z twierdzenia 1 dla wielomianu $R(x) = Q(x) - P(x)$.

Twierdzenie 3. Rozważmy pary liczb rzeczywistych (x_k, y_k) dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Jeśli wszystkie liczby $x_0, x_1, \ldots, x_n$ są różne, to istnieje dokładnie jeden wielomian P o stopniu nie większym niż n, który spełnia równości $P(x_k) = y_k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. Nazywamy go *wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a.*

Dowód. Wystarczy skonstruować taki wielomian, bo twierdzenie 2 gwarantuje nam jego jedyność. W tym celu wykorzystamy wielomiany pomocnicze

$$L_k(x) = \frac{x-x_0}{x_k-x_0} \cdot \frac{x-x_1}{x_k-x_1} \cdot \ldots \cdot \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} \cdot \frac{x-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} \cdot \ldots \cdot \frac{x-x_{n-1}}{x_k-x_{n-1}} \cdot \frac{x-x_n}{x_k-x_n}.$$

Tu warto dokładnie się przyjrzeć, czym się różnią liczniki od mianowników oraz jakiego czynnika tu „brakuje" i dlaczego. Jest jasne, że $L_k(x_k) = 1$. Jeśli $j \neq k$, to ze względu na czynnik $\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$ mamy $L_k(x_j) = 0$. Z tych dwóch obserwacji wynika, że szukanym wielomianem jest

$$P(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + \ldots + y_nL_n(x).$$

Co więcej, każdy z wielomianów $L_0, L_1, \ldots, L_n$ jest stopnia n, więc stopień wielomianu P nie przekracza n.

Zadania.

1. Wytropić wszystkie wielomiany P, które dla każdego rzeczywistego x spełniają daną równość:
   (a) $P(x) = \frac{P(x+1)+P(x-1)}{2}$;
   (b) $xP(x-1) = (x-2)P(x)$;
   (c) $P(x+1) = P(x) + 2x + 1$.
   (H. Pawłowski, *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata*)
2. Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą naturalną. Wyznaczyć wielomiany pomocnicze $L_k(x)$ dla $x_k = k$ przy $k = 0, 1, \ldots, n$ i podać wartości $L_k(n+1)$. Korzystając z tych dobrodziejstw, wyznaczyć $P(n+1)$, jeśli P jest wielomianem o stopniu nie większym niż n oraz:
   (a) $P(k) = a^k$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$, przy czym $a \neq 0$ jest dowolną stałą;
   (b) $P(k) = \frac{k}{k+1}$ dla $k = 0, 1, \ldots, n$. (*1975 USAMO*)
3. Udowodnić, że $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (k-1)^{n-1} = 0$.
4. Dowieść, że $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = n!$.
5. Wielomiany P i Q mają co najmniej po jednym pierwiastku rzeczywistym oraz spełniają równość
$$P\big(1 + x + Q(x)^2\big) = Q\big(1 + x + P(x)^2\big).$$
   Dowieść, że $P = Q$. (*www.imomath.com*)

Wskazówki do zadań

1. (a) Niech $P(0) = b$ i $P(1) = a + b$. Ze wzoru $P(x+1) = 2P(x) - P(x-1)$ oraz indukcji wynika, że $P(x) = ax + b$ dla wszystkich naturalnych x. Rozwiązanie kończy zastosowanie twierdzenia 2.
   (b) Biorąc $x = 0$ oraz $x = 2$, stwierdzamy, że $P(0) = 0$ i odpowiednio $P(1) = 0$. Na mocy twierdzenia Bézouta możemy więc zapisać $P(x) = x(x-1)Q(x)$ dla pewnego wielomianu Q. Po podstawieniu tego do zadanego równania otrzymujemy $Q(x) = Q(x-1)$ dla wszystkich $x \neq 0, 1, 2$.
   (c) Niech $P(x) = Q(x) + x^2$ – po wstawieniu do zadanego równania otrzymamy $Q(x+1) = Q(x)$.
2. Odpowiedź: $L_k(n+1) = \binom{n+1}{k}(-1)^{n-k}$.
   (a) Wykorzystać wzór dwumianowy Newtona.
   (b) $\binom{n+1}{k} \cdot \frac{k}{k+1} = \binom{n+1}{k} - \frac{1}{n+2}\binom{n+2}{k+1}$.
3. Wielomianem interpolacyjnym Lagrange'a dla par $(x_k, y_k) = (k, k^n)$ przy $k = 0, 1, \ldots, n$ jest x^n. Z tego wynika, że $(-1)^n = \sum_{k=0}^{n} k^n L_k(-1)$. Po obliczeniu $L_k(-1)$ reszta jest kwestią przeindeksowania sum.
4. Przy oznaczeniach z poprzedniego zadania mamy $x^n = \sum_{k=0}^{n} k^n L_k(x)$, zatem współczynnik przy x^n po prawej stronie równości wynosi 1.
5. Przypuśćmy, że $P(x_0)^2 = Q(x_0)^2$ dla pewnego x_0. Określamy $x_{n+1} = 1 + x_n + P(x_n)^2 > x_n$; indukcyjnie dowodzimy, że $P(x_n) = Q(x_n)$ dla każdego $n \geqslant 1$ i korzystamy z twierdzenia 2. Wystarczy zatem wykazać istnienie takiego x_0. W tym celu należy zbadać znak wielomianu $R(x) = P(x)^2 - Q(x)^2$ na pierwiastku wielomianu P i pierwiastku wielomianu Q.