# Statystyka Ligi K44M

Statystyka prezentowana w rozbiciu na sezony ligowe. W kolejnych kolumnach:

- (w nawiasie) liczba zadań z matematyki w sezonie;
- liczba nowych uczestników ligi;
- (grubą czcionką) liczba nowych członków **Klubu 44 M**;
- liczba przekroczeń bariery „44 punkty” (różni się od poprzedniej tym, że liczone są przekroczenia powtórne i wszystkie dalsze);

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1981/82 | (24) | 75 | **0** | 0 |
| 1982/83 | (33) | 96 | **9** | 11 |
| 1983/84 | (30) | 99 | **17** | 26 |
| 1984/85 | (25) | 54 | **11** | 18 |
| 1985/86 | (20) | 55 | **7** | 14 |
| 1986/87 | (20) | 51 | **6** | 16 |
| 1987/88 | (20) | 21 | **6** | 10 |
| 1988/89 | (20) | 31 | **3** | 8 |
| 1989/90 | (20) | 11 | **4** | 8 |
| 1990/91 | (10) | 13 | **3** | 3 |
| 1991/92 | (20) | 12 | **3** | 5 |
| 1992/93 | (20) | 13 | **3** | 9 |
| 1993/94 | (20) | 21 | **4** | 8 |
| 1994/95 | (20) | 14 | **1** | 4 |
| 1995/96 | (22) | 15 | **3** | 7 |
| 1996/97 | (20) | 13 | **4** | 9 |
| 1997/98 | (20) | 6 | **1** | 3 |
| 1998/99 | (20) | 9 | **4** | 7 |
| 1999/00 | (20) | 8 | **4** | 8 |
| 2000/01 | (20) | 11 | **2** | 10 |
| 2001/02 | (20) | 5 | **2** | 7 |
| 2002/03 | (20) | 9 | **0** | 6 |
| 2003/04 | (20) | 15 | **2** | 6 |
| 2004/05 | (20) | 7 | **2** | 8 |
| 2005/06 | (20) | 15 | **1** | 5 |
| 2006/07 | (20) | 12 | **4** | 12 |
| 2007/08 | (20) | 5 | **4** | 9 |
| 2008/09 | (20) | 5 | **1** | 9 |
| 2009/10 | (20) | 11 | **2** | 9 |
| 2010/11 | (20) | 11 | **1** | 6 |
| 2011/12 | (20) | 5 | **1** | 6 |
| 2012/13 | (20) | 7 | **4** | 10 |
| 2013/14 | (20) | 6 | **5** | 9 |
| 2014/15 | (20) | 5 | **2** | 8 |
| 2015/16 | (20) | 7 | **0** | 8 |
| 2016/17 | (20) | 9 | **1** | 8 |
| 2017/18 | (20) | 8 | **1** | 7 |
| 2018/19 | (20) | 9 | **1** | 9 |
| 2019/20 | (20) | 9 | **4** | 10 |
| 2020/01 | (20) | 7 | **2** | 11 |

# Rozwiązania Uczestników

*Piotr Kumor*

**806**. Nieskończony ciąg liczb naturalnych $(a_n)$ jest określony wzorami $a_1 = 2$; $a_{n+1} = 2^{a_n} + 2$ dla $n \geqslant 1$. Niech $f(x) = x^2 - x$.

Udowodnić, że dla każdego $n \geqslant 1$ liczba $f(a_{n+1})$ dzieli się przez $f(a_n)$.

**Rozwiązanie**

Prawdą jest nawet nieco więcej, mianowicie dla wszystkich $n \geqslant 1$ liczba $a_{n+1}$ dzieli się przez liczbę $a_n$ oraz liczba $a_{n+1} - 1$ dzieli się przez liczbę $a_n - 1$ (oczywiście teza zadania wynika stąd natychmiast).

Prawdziwy jest też jeszcze nieco ogólniejszy fakt, który wraz z dowodem widnieje na zdjęciu **Fot 1** poniżej:

**18*. We shall prove that if $n$ is even and such that $n|2^n+2$ and $n-1|2^n+1$ (which is true, for instance, for $n=2$), then for the number $n_1 = 2^n+2$ we also have $n_1|2^{n_1}+2$ and $n_1-1|2^{n_1}+1$. In fact, if $n|2^n+2$ and $n$ is even, then $2^n+2 = nk$, where $k$ is odd, hence**

$$2^n+1|2^{nk}+1 = 2^{2^n+2}+1$$

**and for $n_1 = 2^n+2$ we have**

$$n_1-1 = 2^n+1|2^{n_1}+1.$$

**Next, we have $n-1|2^n+1$, which implies $2^n+1 = (n-1)m$, where $m$ is odd. We obtain therefore $2^{n-1}+1|2^{(n-1)m}+1 = 2^{2^n+1}+1$, which yields $2^n+2|2^{2^n+2}+$ $+2$, or $n_1|2^{n_1}+2$.**

**Fot. 1**

Zdjęcie **Fot. 1** pochodzi z ( łatwo dostępnej w sieci ) książeczki Wacława Sierpińskiego *250 zadań z elementarnej teorii liczb* (po angielsku, Warszawa, Nowy York 1970). Jak widać na **Fot. 1** jest to w tym wydaniu książeczki zadanie numer 18. Natomiast w późniejszym ( więc rozszerzonym ) wydaniu tej samej książeczki z roku 1987 (po polsku, seria Biblioteczka Matematyczna, nr 17 WSiP Warszawa 1987) zadanie to występuje z numerem 22 (na str. 8 i 39). Oba rozwiązania ( po polsku i po angielsku ) są identyczne. Oba kończą się też uwagą, widoczną na zdjęciu **Fot. 2**

**Since $n_1 = 2^n+2 > n$, there are infinitely many even numbers $n$ satisfying our conditions. Starting from $n = 2$, we get successively numbers $2, 6, 66, 2^{66}+2, \ldots$. However, C. Bindschedler noticed that this method does not lead to all numbers $n$ for which $n|2^n+2$ since we have, for instance, $946|2^{946}+2$. See a solution to my problem 430 in *Elemente der Mathematik*, *18* (1963), p. 90, given by C. Bindschedler.**

**Fot. 2**

Jednak liczba $2^{946} + 1$ nie dzieli się przez 945. (przynajmniej według mojego starego kompa, który potwierdził podzielność $2^{946} + 2$ przez 946 ). Zatem liczba 946 nie spełnia drugiej podzielności i nie jest początkiem nowej serii, o jakiej mowa na **Fot. 1**.

Prowokuje to pytania następujące: Załóżmy, że liczba całkowita $m \geqslant 2$ spełnia oba warunki: $2^m + 2$ dzieli się przez $m$ oraz $2^m + 1$ dzieli się przez liczbę $m - 1$. Czy liczba $m$ musi być jednym z wyrazów ciągu $(a_n)$? Czy istnieje liczba całkowita $m$ różna od 946 i nie należąca do ciągu $(a_n)$ taka, że $2^m + 2$ dzieli się przez $m$?

Nie znam odpowiedzi ( na żadne z tych pytań ), nie natrafiłem na żadne informacje w sieci. Nie zdołałem też dotrzeć do pracy Bindschedlera w „Elemente der Mathematik" cytowanej na **Fot 2**.

Janusz Olszewski

**Zadanie nr 812** (*Delta* nr 12 (559) 2020)
Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ iloczyn $\Pi_{k=2}^{n}(2^k - 2)$ dzieli się przez $n!$.

*Zadanie 812 zaproponował pan Tomasz Ordowski.*

**Rozwiązanie**

Udowodnimy tezę zadania w wersji nieznacznie rozszerzonej:

**Twierdzenie**

Jeżeli $a$ i $n$ są liczbami naturalnymi $a, n \geqslant 2$ oraz $L_n = \Pi_{k=2}^{n}(a^k - a)$, to liczba $L$ jest podzielna przez $n!$.

Zacznijmy od prostego twierdzenia pomocniczego.

**Lemat**

Jeżeli $p$ jest liczbą pierwszą, to $p^n$ nie dzieli $n!$.

**Dowód lematu (indukcja).** Dla $n \in \{0, 1\}$ teza oczywiście zachodzi. Załóżmy, że teza lematu zachodzi dla każdej liczny naturalnej $n$ mniejszej niż $m$, tj. $p^n \nmid n!$ dla $0 \leqslant n < m$. Przypuśćmy jednak, że teza nie zachodzi dla $n = m$, tzn $p^m \mid m!$.
Jeżeli $p \nmid m$ i $p^m \mid m!$, to $p^m \mid (m-1)!$, wbrew założeniu indukcyjnemu.
Jeżeli $p \mid m$ tj. $m = p \cdot d$ i $p^m \mid m!$, to

$$p^m \mid m! = (p \cdot d)! = x_0 \cdot \dots \cdot x_{d-1} \cdot p^d \cdot d!$$

gdzie $x_k = (kp+1) \cdot \dots \cdot ((k+1)p-1)$. Liczby $x_k$ nie są podzielne przez $p$, zatem $p^{m-d} \mid d!$, Jednak $m - d = pd - d \geqslant d$, czyli $p^d \mid d!$. Liczba $d$ jest mniejsza niż $m$, czyli ponownie dostaliśmy sprzeczność z założeniem indukcyjnym.
Tak więc $p^m \nmid m!$. Mamy krok indukcyjny i dowód tezy lematu.

**Sposób 1** (teoria liczb - twierdzenie Eulera)

Weźmy dowolny dzielnik pierwszy $p$ liczby $n!$.
Jeżeli $p$ dzieli $a$, to liczba liczba $a^{n-1}$ jest podzielna przez $p^{n-1}$, czyli liczba $L = a^{n-1}(a^{n-1} - 1) \dots (a - 1)$ jest podzielna przez $p^{n-1}$. Jednak zgodnie z lematem $p^n$ nie dzieli $n!$. Tak więc, jeżeli $p^k$ dzieli $n!$, to $p^k$ dzieli $L$.
Jeżeli liczby $a$ i $p$ są względnie pierwsze, to wystarczy udowodnić, że dla każdego wykładnika naturalnego $s$, liczb podzielnych przez $p^s$ w ciągu $(1, 2, \dots, n)$ jest nie więcej niż liczb podzielnych przez $p^s$ w ciągu $(a - 1, a^2 - 1, \dots, a^{n-1} - 1)$,

wówczas bowiem w rozkładzie na czynniki pierwsze liczby $n!$ liczba $p$ wystąpi w potędze nie wyższej niż rozkładzie iloczynu $(a-1)(a^2-1)\dots(a^{n-1}-1)$.
Liczb podzielnych przez $p^s$ w ciągu $(1, 2, \dots, n)$ jest dokładnie $\lfloor n/p^s \rfloor$.
Na mocy twierdzenia Eulera $p^s \mid a^{\varphi(p^s)}-1 = a^{p^s-p^{s-1}}-1$, czyli $p^s \mid a^{k(p^s-p^{s-1})}-1$ dla $k = 1, 2, \dots$. Zatem w ciągu $(a-1, a^2-1, \dots, a^{n-1}-1)$ występuje co najmniej $\lfloor \frac{n-1}{p^s-p^{s-1}} \rfloor$ liczb podzielnych przez $p^s$. Spostrzeżenie[1], że

$$\Big\lfloor \frac{n}{p^s} \Big\rfloor \leqslant \Big\lfloor \frac{n-1}{p^s-p^{s-1}} \Big\rfloor,$$

kończy dowód.

**Sposób 2** (teoria liczb - formuła Legendre'a-Polignaca, małe twierdzenie Fermata)

Skorzystamy z dobrze znanej formuły Legendre'a-Polignaca:

$$n! = \prod_{p \in P} p^{a_p}, \quad gdzie \quad a_p = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor = \lfloor \frac{n - s_p(n)}{p-1} \rfloor \leqslant \lfloor \frac{n-1}{p-1} \rfloor$$

gdzie $s_p(n)$ jest sumą cyfr liczby $n$ przy podstawie $p$.

Weźmy dowolny dzielnik pierwszy $p$ liczby $n!$ i oznaczmy $b_p = \lfloor \frac{n-1}{p-1} \rfloor$.
Ponieważ $a_p \leqslant b_p$, więc wystarczy udowodnić, że $p^{b_p}$ jest dzielnikiem liczby $L$.
Jest to oczywiście prawdą, gdy $p \mid a$, bo $b_p = \lfloor \frac{n-1}{p-1} \rfloor \leqslant n-1$ i wtedy mamy ciąg podzielności: $p^{b_p} \mid p^{n-1} \mid a^{n-1} \mid L$.
Jeżeli $p$ nie dzieli $a$, to z małego twierdzenia Fermata $p \mid a^{p-1}-1$, a więc $p \mid a^{k(p-1)}-1$ dla $k \in \mathbb{N}$. Ponieważ $b_p(p-1) \leqslant n-1$, więc iloczyn $\prod_{k=1}^{b_p}(a^{k(p-1)}-1)$ jest czynnikiem iloczynu $(a^{n-1}-1)(a^{n-2}-1)\dots(a-1)$. Zatem

$$p^{b_p} \mid (a^{n-1}-1)(a^{n-2}-1)\dots(a-1) \mid L$$

**Sposób 3** (algebra, kominatoryka, teoria liczb)

Niech $M$ będzie liczbą wszystkich macierzy nieosobliwych $(a_{i,j})$ z działaniami modulo $a$ o wymiarach $n \times n$ których wyrazy są liczbami całkowitymi od 0 do $a-1$ oraz pierwsza kolumna macierzy złożona jest z jedynek:

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ 1 & a_{2,2} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{bmatrix}.$$

[1]gdy $n > p^s$ lewa strona nierówności $\lfloor n/p^s \rfloor \leqslant \lfloor (n-1)/(p^s-p^{s-1}) \rfloor$ jest równa 0, zaś prawa jest nieujemna, gdy $p^s \leqslant n$ wówczas $n/p^s \leqslant (n-1)/(p^s-p^{s-1})$

Pierwszy wiersz takiej macierzy możemy wybrać na $a^{n-1}$ sposobów. Drugi wiersz możemy wybrać na $a^{n-1}-1$ sposobów, gdyż liczby $a_{2,1}, \dots a_{2,n}$ możemy wybrać na $a^{n-1}$ sposobów, ale ponieważ macierz ma być nieosobliwa, to wiersze nie mogą być kombinacją liniową poprzednich wierszy modulo $a$, czyli w naszym przypadku wykluczamy jeden wiersz.

Jeżeli wybraliśmy już $j$ początkowych wierszy $\mathbf{w_1}, \dots, \mathbf{w_j}$, to $j+1$-y wiersz możemy wybrać na $a^{n-1}-a^{j-1}$ sposobów. Rzeczywiście, liczby $a_{j+1,2}, \dots a_{j+1,n}$ możemy wybrać na $a^{n-1}$ sposobów, ale ponieważ macierz ma być nieosobliwa, to $j+1$-y wiersz nie może być kombinacją liniową modulo $a$ poprzednich wierszy, czyli w naszym przypadku wykluczamy tyle wierszy ile jest różnych wierszy, z jedynką na pierwszym miejscu, będących kombinacją liniową $j$ wcześniej wybranych wierszy tej samej postaci (tj. $x_1\mathbf{w_1} + \dots x_j\mathbf{w_j}$, gdzie $x_i \in \{0, 1, \dots, a-1\}$, wiersze $\mathbf{w_i}$ mają jedynkę na pierwszym miejscu). Takich kombinacji liniowych jest dokładnie tyle ile rozwiązań równania

$$x_1 + \dots + x_j = 1$$

w liczbach $x_i \in \{0, 1, \dots, a-1\}$ z działaniem modulo $a$. Rozwiązań tych jest $a^{j-1}$, gdyż liczy $x_1, \dots x_{j-1}$ możemy wybrać dowolnie, czyli na $a^{j-1}$ sposobów, zaś liczba $x_j$ jest już wyznaczona jednoznacznie.

Zatem $M = a^{n-1}(a^{n-1}-1)(a^{n-1}-a^1)\dots(a^{n-1}-a^{n-2})$. Macierze złożone z tych samych wierszy możemy uważać za równoważne, a taka klasa równoważności ma moc $n!$, bo tyle jest permutacji $n$ różnych[2] wierszy macierzy. Stąd wynika, że liczba

$$\frac{M}{n!} = \frac{a^{n(n-1)/2}(a^{n-1}-1)(a^{n-2}-1)\dots(a-1)}{n!} \tag{$*$}$$

jest całkowita.
Jeżeli liczby $a$ i $n!$ są względnie pierwsze, to liczba $(a^{n-1}-1)(a^{n-2}-1)\dots(a-1)$ jest podzielna przez $n!$. Tak więc liczba $L = a^{n-1}(a^{n-1}-1)(a^{n-2}-1)\dots(a-1)$ jest podzielna przez $n!$.
Załóżmy, że liczby $a$ i $n!$ nie są względnie pierwsze. Weźmy dowolny wspólny dzielnik pierwszy $p$ liczb $a$ i $n!$. Zgodnie z lematem, jeżeli $p^k \mid n!$, to $k \leqslant n-1$. Zatem $p^k \mid a^k \mid a^{n-1}$. Tym samym liczbę $a^{n(n-1)/2}$ w liczniku wyrażenia $(*)$ możemy zastąpić liczbą $a^{n-1}$ i nadal nowo otrzymana liczba $L = a^{n-1}(a^{n-1} - 1)(a^{n-2}-1)\dots(a-1)$ będzie podzielna przez $n!$.

[2] wiersze są różne, bo rozpatrujemy macierze nieosobliwe

Janusz Olszewski

**Zadanie nr 815** (*Delta* nr 2 (561) 2021)
Wyznaczyć wszystkie trójki funkcji $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, spełniające równanie

$$f(x+y^3)+g(x^3+y)=h(xy) \quad dla \quad x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

**Rozwiązanie**

Niech funkcje $f, g, h$ spełniają warunki zadania. Wówczas, jak łatwo sprawdzić, również funkcje $f_1(x)=f(x)-f(0)$, $g_1(x)=g(x)-g(0)$, $h_1(x)=h(x)-h(0)$ spełniają nasze równanie funkcyjne. Załóżmy dalej, że $f(0)=g(0)=h(0)=0$. Zmieniając role zmiennych $x$ i $y$ w równaniu (1) otrzymujemy równanie

$$f(x^3+y)+g(x+y^3)=h(xy). \tag{2}$$

Odejmując stronami równania (1) i (2) otrzymujemy

$$f(x+y^3)-g(x+y^3)=f(x^3+y)-g(x^3+y). \tag{3}$$

Jednak dla dowolnej liczby rzeczywistej $t$ istnieją liczby rzeczywiste $x, y$ spełniające układ: $t = x+y^3 \quad 0 = x^3+y$. Istotnie: z układu tego wynika, że $w(x)=0$, gdzie $w(x)=x^9-x+t$. Wielomian $w$ ma stopień nieparzysty, więc ma pierwiastek rzeczywisty $x_0$, czyli $y_0=-x_0^3$. Para $(x_0, y_0)$ jest rzeczywistym rozwiązaniem tego układu.
Tak więc podstawiając $t = x+y^3 \quad 0 = x^3+y$ do równania (3) otrzymujemy $f(t)-g(t)=f(0)-g(0)=0$ dla dowolnej liczby rzeczywistej $t$. Nasze równanie funkcyjne (1) możemy zapisać tak:

$$f(x+y^3)+f(x^3+y)=h(xy). \tag{4}$$

Podstawiając w tym równaniu $x=a$, $y=bc$ oraz $x=b$, $y=ac$, otrzymujemy

$$f(a+(bc)^3)+f(a^3+bc)=h(abc) \quad i \quad f(b+(ac)^3)+f(b^3+ac)=h(abc). \tag{5}$$

Weźmy dowolną liczbę rzeczywistą $t \neq 0$. Poszukamy liczb rzeczywistych $a, b, c$ dla których

$$a^3+bc=b+a^3c^3, \quad a+b^3c^3=0, \quad b^3+ac=t. \tag{6}$$

Z pierwszego z tych równań uzyskujemy $b=a^3(c^2+c+1)$, gdy $c \neq 1$. Z drugiego i trzeciego równania otrzymujemy $a=tc^3/(c^4-1)$, gdy $c \neq \pm 1$. Po podstawieniu tych wartości do trzeciego równania otrzymujemy

$$(tc^3)^9(c^2+c+1)^3+c(tc^3)(c^4-1)^8-t(c^4-1)^9=0.$$

Jednomian o najwyższej potędze zmiennej $c$ w tym równaniu wynosi $t^9c^{33}$. Tak więc równanie jest stopnia nieparzystego, czyli ma pierwiastek rzeczywisty, przy czym jak łatwo sprawdzić pierwiastkiem tym nie są liczby 1 i $-1$. Inaczej mówiąc, dla każdej liczby rzeczywistej $t \neq 0$ istnieją liczby rzeczywiste $a, b, c$ spełniające układ (6). Odejmując stronami równania (5) i uwzględniając równości (6) otrzymujemy dla $t \neq 0$ równanie

$$f(0) - f(t) = 0 \quad tj. \quad f(t) = f(0).$$

Tak więc przy założeniu, że $f(0) = g(0) = 0$ tylko funkcje $f, g, h$ równe tożsamościowo 0 spełniają równanie funkcyjne z zadania. Przyjmując, że $f(0) = a$, $g(0) = b$ oraz uwzględniając podstawienie wykonanie na początku zadania (tj. $f_1(x) = f(x) - f(0)$, $g_1(x) = g(x) - g(0)$, $h_1(x) = h(x) - h(0)$) otrzymujemy wszystkie funkcje spełniające warunki zadania:

$$f(x) = a, \quad g(x) = b \quad oraz \quad h(x) = f(x+1) + g(x^3+1) = a + b.$$

Janusz Olszewski

**Zadanie nr 820** (*Delta* nr 4 (563) 2021)
Udowodnić nierówność dla liczb dodatnich a, b, c :

$$\frac{a^2}{b^2+bc}+\frac{b^2}{c^2+ca}+\frac{c^2}{a^2+ab}\geqslant\frac{3}{2}.$$

*Zadanie 820 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.*

**Rozwiązanie**

Zacznijmy od prostego twierdzenia pomocniczego.

**Lemat**

Jeżeli $p$, $q$, $x$, $y$, $z$ są liczbami dodatnimi, to

$$\frac{x}{py+qz}+\frac{y}{pz+qx}+\frac{z}{px+qy}\geqslant\frac{3}{p+q}.$$

**Dowód lematu.** Z nierówności Cauchy'ego-Schwarza oraz nierówności $(x+y+x)^2\geqslant 3(xy+yz+zx)$ otrzymujemy związki

$$\begin{aligned}\sum_{cycl}\frac{x}{py+qz} &= \sum_{cycl}\frac{x^2}{x(py+qz)}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{x(py+qz)+y(pz+qx)+z(px+qy)}\\ &\geqslant \frac{3(xy+yz+zx)}{(p+q)(xy+yz+zx)}=\frac{3}{p+q}.\blacksquare\end{aligned}$$

Z nierówności między średnią arytmetyczną i geometryczną dwóch liczb oraz lematu zastosowanego do liczb $p=\frac{3}{2}, q=\frac{1}{2}, x=a^2, y=b^2, z=c^2$ otrzymujemy

$$\sum_{cycl}\frac{a^2}{b^2+bc}\geqslant\sum_{cycl}\frac{a^2}{b^2+\frac{b^2+c^2}{2}}=\sum_{cycl}\frac{a^2}{\frac{3}{2}b^2+\frac{1}{2}c^2}\geqslant\frac{3}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}}=\frac{3}{2}.$$

**820.** Udowodnić nierówność (*) dla liczb dodatnich $a$, $b$, $c$:

$$(*) \qquad \frac{a^2}{b^2+bc}+\frac{b^2}{c^2+ca}+\frac{c^2}{a^2+ab}\geqslant\frac{3}{2}$$

**Rozwiązanie**

Dla liczb dodatnich $x$, $y$ prawdziwa jest nierówność $\frac{x^2+y^2}{2}\geqslant xy$. Stosując tę nierówność do par liczb $b$, $c$; $c$, $a$; $a$, $b$ widzimy, że lewa strona nierówności (*) jest nie mniejsza niż podwojona suma

$$\frac{a^2}{3b^2+c^2}+\frac{b^2}{3c^2+a^2}+\frac{c^2}{3a^2+b^2}$$

Wystarczy więc dowieść, że dla dowolnych liczb dodatnich $a$, $b$, $c$ jest spełniona nierówność (**):

$$(**) \qquad \frac{a}{3b+c}+\frac{b}{3c+a}+\frac{c}{3a+b}\geqslant\frac{3}{4}$$

(oczywiście w tym miejscu można pominąć kwadraty).

Nierówność (**) jest prawdziwa, jej dowód (dowody) a także ogólniejszych nierówności „są ogólnie dobrze znane". Dla porządku przedstawimy dowód, jest on widoczny na zdjęciu poniżej:

*

**Theorem 1.** Let $x$, $y$, $z$, $k$ be positive real numbers. Then

$$\frac{x}{ky+z}+\frac{y}{kz+x}+\frac{z}{kx+y}\geq\frac{3}{1+k}. \tag{2}$$

*Proof.* By using the Cauchy-Schwarz inequality (see [3]), we have

$$(kxy+zx+kyz+xy+kxz+yz)\left(\frac{x^2}{kxy+zx}+\frac{y^2}{kyz+xy}+\frac{z^2}{kxz+yz}\right)\geq$$

$$\geq(x+y+z)^2.$$

Hence

$$\frac{x}{ky+z}+\frac{y}{kz+x}+\frac{z}{kx+y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(1+k)(xy+yz+zx)}=$$

$$=\frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx}{(1+k)(xy+yz+zx)}\geq\frac{3}{1+k}.$$

The Theorem 1 is proved.

*

Jest jasne, że jeżeli dla pewnej liczby naturalnej $n$ nierówność

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{3x_{k+1}+x_{k+2}}\geqslant\frac{n}{4}$$

jest prawdziwa dla każdego ciągu liczb dodatnich $x_1,\ldots,x_n$ (oczywiście $x_{n+1}=x_1$, $x_{n+2}=x_2$) to także nierówność

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k^2}{x_{k+1}^2+x_{k+1}x_{k+2}}\geqslant\frac{n}{2}$$

jest prawdziwa dla każdego ciągu liczb dodatnich $x_1,\ldots,x_n$ (argument dokładnie taki sam jak dla $n=3$).

Obie te nierówności są oczywiście „typu Shapiro". Powstaje więc naturalne pytanie dla jakich liczb naturalnych $n$ są one prawdziwe? Dla $n=3$ właśnie to wykazaliśmy. Okazuje się to być prawdą także dla $n=4$.

Jest to szczególny przypadek twierdzenia udowodnionego w pracy:
Nguyen Minh Tuan and Le Quy Thuong, *On an Extension of Shapiro's Cyclic Inequality*.

Twierdzenie 2.1 jest głównym wynikiem tej pracy.

Zatem obie nasze nierówności są prawdziwe dla $n = 3$ oraz dla $n = 4$. Jest też oczywiste, że równość zachodzi tylko dla ciągu równych liczb. (przynajmniej w przypadku naszej głównej nierówności).

Jak wygląda sytuacja dla $n \geqslant 5$? W zacytowanej pracy nie ma odpowiedzi. Wydaje się też, że poza tą pracą, temat takich nierówności nie został nigdzie podjęty. A szkoda, bo to ciekawe i bardzo naturalne pytanie, uogólnienie klasycznej nierówności Shapiro.

Jest widoczne, że nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{k+1}^2 + x_{k+1}x_{k+2}} \geqslant \frac{n}{2}$$

„ma większe szanse” być prawdziwą niż nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3x_{k+1} + x_{k+2}} \geqslant \frac{n}{4}.$$

Zamiast nierówności

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3x_{k+1} + x_{k+2}} \geqslant \frac{n}{4}$$

w rozwiązaniu zadania 820 można posłużyć się podobną, ale nieco słabszą nierównością. Otóż dla dowolnych liczb dodatnich $x$, $y$ mamy $x \cdot (x + y) \leqslant \frac{1}{8} \cdot (3x + y)^2$ (z równością tylko gdy $x = y$). Zatem

$$\frac{a^2}{b^2 + bc} \geqslant 8 \cdot \left(\frac{a}{3b + c}\right)^2$$

więc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{k+1}^2 + x_{k+1}x_{k+2}} \geqslant 8 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{3 \cdot x_{k+1} + x_{k+2}}\right)^2$$

Jeżeli więc dla pewnego $n$ nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{3 \cdot x_{k+1} + x_{k+2}}\right)^2 \geqslant \frac{n}{16}$$

jest prawdziwa, to także nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{x_{k+1}^2 + x_{k+1}x_{k+2}} \geqslant \frac{n}{2}$$

jest prawdziwa (dla każdego ciągu liczb dodatnich $x_1, \ldots, x_n$).

Jeżeli nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3x_{k+1} + x_{k+2}} \geqslant \frac{n}{4}$$

jest prawdziwa, to prawdziwa jest także nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{x_k}{3 \cdot x_{k+1} + x_{k+2}}\right)^2 \geqslant \frac{n}{16}.$$

Jest to natychmiastowe zastosowanie nierówności między średnią kwadratową i arytmetyczną. Zatem (słabsza) druga nierówność jest prawdziwa dla $n = 3$ oraz dla $n = 4$.

Wspomnieliśmy wyżej, że dla $n \geqslant 5$ pytanie o pierwszą (mocniejszą) nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{3x_{k+1} + x_{k+2}} \geqslant \frac{n}{4}$$

wydaje się być pytaniem otwartym. Co więcej, można się tu raczej spodziewać, że dla dostatecznie dużych $n$ nierówność ta okaże się fałszywa. To oczywiście tylko intuicja, wynikająca z zachowania klasycznej nierówności Shapiro.

Jak wygląda pytanie o (słabszą) nierówność

$$(***) \qquad \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{x_k}{3 \cdot x_{k+1} + x_{k+2}} \right)^2 \geqslant \frac{n}{16} ?$$

Wiadomo, że nierówność

$$\sum_{k=1}^{n} \left( \frac{x_k}{x_{k+1} + x_{k+2}} \right)^2 \geqslant \frac{n}{4}$$

jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej $n \geqslant 3$. Ten wariant nierówności Shapiro ( z wykładnikiem dwa ) udowodniono na początku lat siedemdziesiątych, dowód jest w pracach Daykina i Dianandy z tego okresu. Dowód ten nie jest trudny. Wydaje mi się (Piotr Kumor), że rozumując analogicznie można udowodnić nierówność (***) (skąd wynika też nierówność (*)) dla każdego $n \geqslant 3$. Oczywiście, o ile dobrze rozumiem dowody ze wspomnianych wyżej źródeł i poprawnie stosuję to rozumowanie do nierówności (***).