Klub 44 M

Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2022

Lista uczestników ligi zadaniowej
Klub 44 M
po zakończeniu sezonu
(roku szkolnego) 2020/21

Błażej Żmija	1 – 40,50
Janusz Olszewski	21 – 39,34
Kacper Morawski	37,16
Witold Bednarek	8 – 36,36
Adam Woryna	3 – 36,14
Paweł Najman	8 – 34,25
Tomasz Czajka	33,74
Marcin Kasperski	4 – 32,80
Andrzej Kurach	2 – 29,11
Stanisław Bednarek	2 – 27,19
Radosław Kujawa	27,13
Piotr Sołtan	27,12
Tomasz Wietecha	13 – 25,91
Janusz Wojtal	25,48
Marek Spychała	3 – 24,85
Norbert Porwol	24,02
Jędrzej Biedrzycki	23,05
Piotr Lipiński	1 – 23,02
Marian Łupieżowiec	1 – 21,26
Marcin Małogrosz	4 – 20,62
Michał Kieza	4 – 20,46
Karol Matuszewski	1 – 19,74
Szymon Tur	19,46
Grzegorz Wiączkowski	19,44
Semen Słobodianiuk	17,86
Paweł Kubit	7 – 17,80
Marek Prauza	4 – 16,62
Jerzy Cisło	15 – 15,81
Roksana Słowik	2 – 14,38

Legenda (przykładowo): stan konta 8 – 36,36 oznacza, że uczestnik już ośmiokrotnie zdobył 44 punkty, a w kolejnej (dziewiątej) rundzie ma 36,36 punktów.

Zestawienie obejmuje wszystkich uczestników ligi, którzy spełniają następujące dwa warunki:
– stan ich konta (w aktualnie wykonywanej rundzie) wynosi co najmniej 13 punktów;
– przysłali rozwiązanie co najmniej jednego zadania z rocznika 2019, 2020 lub 2021.

Nie drukujemy więc nazwisk tych uczestników, którzy rozstali się z ligą trzy lata temu (lub dawniej); oczywiście jeśli ktokolwiek z nich zdecyduje się wrócić do naszych matematycznych łamigłówek, jego nazwisko automatycznie wróci na listę. Serdecznie zapraszamy!

Zadania z matematyki nr 835, 836

Redaguje Marcin E. KUCZMA

835. Dana jest liczba naturalna n podzielna przez 3 oraz ciąg $(x_1, \ldots, x_n)$ o wyrazach 1, 2 lub 3, przy czym jedynek, dwójek i trójek jest tyle samo (po $n/3$). Dowieść, że dla pewnych numerów k, l $(1 \leqslant k \leqslant l \leqslant n)$ zachodzi równość $x_k + \ldots + x_l = n$.

836. (**a**) Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele dodatnich liczb rzeczywistych x, dla których oba wyrażenia $x^{1/2} + x^{-1/2}$ oraz $x^{1/3} + x^{-1/3}$ mają wartości całkowite.
(**b**) Ustalić, ile jest liczb $x \geqslant 1$ o powyższej własności takich, że $\lfloor x \rfloor$ ma w zapisie dziesiętnym nie więcej niż 2022 cyfry.

Zadanie 836 zostało opracowane na podstawie propozycji, którą przysłał pan Paweł Kubit.

Rozwiązania zadań z numeru 10/2021

Przypominamy treść zadań:

827. Niech T_m oznacza liczbę naturalną, której zapis dziesiętny składa się z m trójek (np. $T_4 = 3333$). Wyjaśnić, czy istnieją takie liczby naturalne m, n, że suma cyfr liczby nT_m jest mniejsza niż $3m$.

828. Dana jest liczba naturalna $n \geqslant 2$. Wyznaczyć wszystkie liczby rzeczywiste c takie, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x_1, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor cx_i \rfloor \geqslant (c-1) \sum_{i=1}^{n} \lfloor x_i \rfloor + \Big\lfloor \sum_{i=1}^{n} x_i \Big\rfloor.$$

827. Odpowiedź: nie istnieją.
Dowód: niech $s(N)$ oznacza sumę cyfr liczby N. Ustalmy liczbę naturalną m. Tezę $s(nT_m) \geqslant 3m$ wykażemy przez indukcję względem n. Dla $n = 1, 2, 3$ jest to oczywiste. Weźmy $n \geqslant 4$ i załóżmy, że $s(kT_m) \geqslant 3m$ dla $k = 1, \ldots, n-1$. Przyjmijmy, że liczba nT_m ma $m+r+1$ cyfr $(r \geqslant 0)$. Zapiszmy ją w postaci $nT_m = 10^r A + C$, gdzie $10^m \leqslant A < 10^{m+1}$, $0 \leqslant C < 10^r$. Weźmy pod uwagę różnicę

$$R = nT_m - 3T_m \cdot 10^r = (10^r A + C) - (10^m - 1) \cdot 10^r =$$
$$= 10^r B + C, \qquad \text{gdzie } B = A + 1 - 10^m.$$

Jasne, że $s(A+1) \leqslant s(A) + 1$. Zapis liczby B to zapis liczby $A+1$, z cyfrą wiodącą zmniejszoną o 1. Stąd $s(B) = s(A+1) - 1 \leqslant s(A)$, i wobec tego $s(nT_m) = s(A) + s(C) \geqslant s(B) + s(C) = s(R)$. A ponieważ $R = (n - 3 \cdot 10^r)T_m$, zatem z założenia indukcyjnego $s(R) \geqslant 3m$, i mamy nierówność $s(nT_m) \geqslant 3m$, czyli tezę indukcyjną. Na mocy zasady indukcji ta nierówność zachodzi dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

828. Załóżmy, że c jest liczbą o podanej własności. Biorąc najpierw $x_1 = \ldots = x_n = 1$, a następnie $x_1 = \ldots = x_n = 1/n$, dostajemy (odpowiednio) $n\lfloor c \rfloor \geqslant nc$ oraz $n\lfloor c/n \rfloor \geqslant 1$. Pierwsza z tych nierówności pokazuje, że c jest liczbą całkowitą; druga – że $\lfloor c/n \rfloor$ jest liczbą dodatnią, więc nie mniejszą niż 1. Uzyskujemy warunki:

$$c \in \mathbb{N}, \qquad c \geqslant n, \tag{1}$$

konieczne do tego, by liczba c miała żądaną własność. Pokażemy, że są one również wystarczające.

Niech więc liczba c spełnia warunki (1) i niech $x_1, \ldots, x_n$ będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Oznaczając $k_i = \lfloor x_i \rfloor$ oraz pisząc $x_i = k_i + r_i$, dostajemy do udowodnienia nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \big(ck_i + \lfloor cr_i \rfloor\big) \geqslant (c-1) \sum_{i=1}^{n} k_i + \sum_{i=1}^{n} k_i + \Big\lfloor \sum_{i=1}^{n} r_i \Big\rfloor, \tag{2}$$

równoważną następującej:

$$\sum_{i=1}^{n} \lfloor cr_i \rfloor \geqslant \Big\lfloor \sum_{i=1}^{n} r_i \Big\rfloor.$$

Oznaczmy lewą i prawą stronę tej ostatniej nierówności odpowiednio przez L i P. Szacujemy:

$$L > \sum_{i=1}^{n} \big(cr_i - 1\big) \geqslant n \sum_{i=1}^{n} r_i - n \geqslant n\big(P - 1\big) \geqslant P - 1.$$

Liczby L i P są całkowite, więc skoro $L > P - 1$, znaczy to, że $L \geqslant P$; nierówność (2) jest wykazana.

Stąd odpowiedź: własności (1) dokładnie charakteryzują liczby c, o które pyta zadanie.

Podsumowanie ligi zadaniowej Klub 44 M w roku szkolnym 2020/21

Liczby zakończone zerem domagają się uczczenia: oto 40 lat skończyła matematyczna liga zadaniowa! Dwadzieścia lat temu, z okazji analogicznej (choć o połowę skromniejszej), w dorocznym omówieniu (Δ^2_{02}), uraczyliśmy Czytelników ciekawą statystyką, dającą obraz uczestnictwa w pierwszych dwudziestu sezonach ligowych. Przypomnijmy: sezon ligowy to w zasadzie rok szkolny, wrzesień–czerwiec. We wrześniu roku 1981 ukazały się zadania nr 1, 2, 3 (!). Tak; bowiem przez pierwsze trzy i pół roku mieliśmy po trzy zadania w numerze. Potem do matematyki dołączyła fizyka i od stycznia 1985 zaczęliśmy zamieszczać po dwa zadania z każdej z tych dwóch dziedzin.

Wspomniana statystyka zasługuje na kontynuację. Popatrzmy, jak to się kształtowało w kolejnych czterech dziesięcioleciach, od startu aż do sezonu czterdziestego. W kolejnych kolumnach tabelki widzimy:
– (w nawiasie) liczbę zadań z matematyki w dziesięcioleciu;
– liczbę nowych uczestników ligi;
– (grubą czcionką) liczbę nowych członków **Klubu 44 M**;
– liczbę przekroczeń bariery „44 punkty” (różni się od poprzedniej tym, że liczone są przekroczenia powtórne i wszystkie dalsze);

1981–1991	(222)	506	**66**	114
1991–2001	(202)	122	**29**	70
2001–2011	(200)	95	**19**	77
2011–2021	(200)	72	**21**	86

(statystykę w rozbiciu na pojedyncze roczniki znajdzie Czytelnik w elektronicznym wydaniu numeru).

Najliczniejszy udział widać w latach początkowych; działał urok nowości – ale chyba nie tylko: życie wówczas było trochę inne; więcej czasu można było przeznaczać na beztroską zabawę (jaką nasza liga zawsze pragnęła być i pragnie pozostać).

Suma liczb z przedostatniej kolumny, równa 135, to aktualna liczba osób zaliczonych w grono członków **Klubu 44 M**; suma liczb z jeszcze poprzedniej kolumny – to łączna liczba wszystkich uczestników, którzy pojawili się w lidze (do momentu zamknięcia sezonu 2020/21); wynosi ona 795.

Pamiętajmy jednak, że niektórzy z nich odeszli tam, skąd się nie wraca. O niektórych wiemy (notki żałobne w lutowych numerach roczników 1993, 1999, 2008, 2016); o innych możemy nie wiedzieć; im wszystkim należy się chwila smutnej zadumy i ciepłe wspomnienie.

* * *

Teraz wybrane zadania z omawianego sezonu (ostatniego, czterdziestego) – więc, jak zwykle, te trudniejsze (wysoki współczynnik trudności WT i/lub niska liczba poprawnych rozwiązań LPR), a także te, w których uczestnicy zaintrygowali niebanalnymi pomysłami rozwiązań albo ciekawymi komentarzami. W e-wydaniu, jak przed rokiem, zamieszczamy wybrane fragmenty prac (w zakładce: „Załącznik do elektronicznego omówienia ligi matematycznej”).

Weterani Klubu 44 M (w kolejności uzyskiwania statusu Weterana):

J. Janowicz (8), P. Kamiński (5), M. Gałecki (5), J. Uryga (4), A. Pawłowski (4), D. Sowizdrzał, T. Rawlik (6), M. Mazur, A. Bonk, *K. Serbin*, *J. Ciach* (5), M. Prauza (4), P. Kumor (15), *P. Gadziński* (7), K. Jedziniak, J. Olszewski (21), L. Skrzypek (4), H. Kornacki, T. Wietecha (13), T. Józefczyk, J. Witkowski (5), W. Bednorz, B. Dyda (5), M. Peczarski, M. Adamaszek (6), P. Kubit (7), J. Cisło (15), W. Bednarek (8), D. Kurpiel, P. Najman (8), M. Kieza (4), M. Kasperski (4), K. Dorobisz, A. Woryna, T. Tkocz, Z. Skalik (4), A. Dzedzej, M. Miodek, M. Małogrosz (4), K. Kamiński, J. Fiett, M. Spychała (jeśli uczestnik przekroczył barierę 44 punktów więcej niż trzy razy, sygnalizuje to liczba w nawiasie).

Pozostali członkowie Klubu 44 M (alfabetycznie):

„dwukrotni”: Z. Bartold, S. Bednarek, A. Czornik, A. Daniluk, Z. Galias, Ł. Garncarek, J. Garnek, *A. Idzik*, P. Jędrzejewicz, G. Karpowicz, H. Kasprzak, T. Komorowski, Z. Koza, A. Kurach, J. Łazuka, J. Małopolski, Ł. Merta, J. Mikuta, E. Orzechowski, R. Pagacz, M. Pater, K. Patkowski, K. Pióro, F. S. Sikorski, J. Siwy, R. Słowik, S. Solecki, T. Warszawski, G. Zakrzewski;

„jednokrotni”: R. M. Ayoush, T. Biegański, W. Boratyński, P. Burdzy, T. Choczewski, M. Czerniakowska, P. Duch, P. Figurny, M. Fiszer, L. Gasiński, A. Gluza, T. Grzesiak, K. Hryniewiecki, K. Jachacy, M. Jastrzębski, P. Jaśniewski, A. Jóźwik, J. Klisowski, J. Kraszewski, A. Krzysztofowicz, T. Kulpa, A. Langer, R. Latała, P. Lipiński, P. Lizak, P. Łabędzki, M. Łupieżowiec, W. Maciak, J. Mańdziuk, B. Marczak, M. Marczak, M. Matlęga, K. Matuszewski, R. Mazurek, H. Mikołajczak, M. Mikucki, J. Milczarek, R. Mitraszewski, M. Mostowski, W. Nadara, W. Olszewski, R. Pikuła, B. Piotrowska, W. Pompe, M. Roman, M. Rotkiewicz, A. Ruszel, Z. Sewartowski, A. Smolczyk, P. Sobczak, Z. Surduka, T. Szymczyk, W. Szymczyk, W. Tobiś, *K. Trautman*, P. Wach, J. Węgrecki, K. Witek, A. Wyrwa, M. Zając, Z. Zaus, K. Zawisławski, B. Żmija, P. Żmijewski.

Zadanie **806.** [$a_1 = 2;\ \ a_{n+1} = 2^{a_n} + 2;\ \ f(x) = x^2 - x \Rightarrow\ \forall n \geqslant 1\colon\ f(a_{n+1}) \equiv 0 \pmod{f(a_n)}$] ($WT$=1,80; LPR=14). Trudności tu niewiele. **Piotr Kumor** zwrócił uwagę (→ e-wydanie numeru), że już w klasycznej książeczce W. Sierpińskiego *250 zadań z elementarnej teorii liczb* znajduje się rozumowanie indukcyjne, dające rozwiązanie naszego zadania; postawił też pytanie, czy poza ciągiem (a_n) istnieją liczby całkowite $m \geqslant 2$ takie, że $m \mid 2^m + 2,\ \ (m-1) \mid 2^m + 1$; pierwszy z tych warunków spełnia np. liczba $m = 946$ ($\neq a_n$ dla wszystkich n); czy jedyna taka?

Zadanie **810.** [Permutacje $(x_1, \ldots, x_n)$ zbioru $\{1, \ldots, n\}$ o własnościach (mod n): (i) $\sum_{i=1}^{k} x_i \not\equiv \sum_{i=1}^{l} x_i$ dla $k \neq l$; (ii) $k + x_k \not\equiv l + x_l$ dla $k \neq l$; teza: permutacja o własności (i) istnieje ⇔ permutacja o własności (ii) nie istnieje] (WT=2,03; LPR=11). Wszyscy pokazali, bez większych trudności, że istnienie permutacji jednego lub drugiego typu zależy po prostu od parzystości liczby n. Kto ciekawy, ile jest takich permutacji (dla danego parzystego/nieparzystego n), znajdzie odpowiedź w OEIS (ciągi A141599, A006717) – na co zwrócił uwagę **Michał Adamaszek**.

Zadanie **812.** [$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2:\ \prod_{k=2}^{n}(2^k - 2) \equiv 0 \pmod{n!}$] ($WT$=1,60; LPR=19). To teoria liczb – jak sugeruje treść zadania i prawie wszystkie rozwiązania (w tym firmowe)? Czy może raczej algebra liniowa z kombinatoryką? Popatrzmy na rozwiązanie, jakie przysłał **Jerzy Cisło**: W przestrzeni liniowej $\mathbb{Z}_2^n$ wybieramy bazę wektorów $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$, biorąc dowolny wektor $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$ ($2^n - 1$ możliwości); zaś mając wektory $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_j$, rozpinające podprzestrzeń wymiaru j (więc mocy 2^j), mamy $2^n - 2^j$ możliwości wyboru wektora $\mathbf{v}_{j+1}$; liczba uporządkowanych baz wynosi zatem

$$M_n := \prod_{j=0}^{n-1}(2^n - 2^j) = 2^{n(n-1)/2}\prod_{k=1}^{n}(2^k - 1).$$

Zliczamy teraz n-wymiarowe sympleksy o ponumerowanych wierzchołkach: pierwszy wierzchołek wybieramy na 2^n sposobów, a pozostałe uzyskamy, dodając do niego wektory dowolnej bazy uporządkowanej; zatem liczba takich sympleksów wynosi $2^n{\cdot}M_n$ i dzieli się przez $(n+1)!$, bo tyle jest możliwości ponumerowania wierzchołków. Cofając n o jeden, widzimy, że $n!$ jest dzielnikiem liczby $2^{n-1}M_{n-1}$. To już prawie teza zadania – pozostaje jedynie skontrolować potęgi dwójki w liczbach: $n!$ oraz tej danej w zadaniu – a to nietrudne ćwiczenie.

Na podobnym pomyśle (dopracowanym w języku macierzy) oparł **Janusz Olszewski** jedno z trzech (!) przysłanych rozwiązań; w każdym z nich (→ e-wydanie) wykazał słuszność tezy zadania ze stałą 2 zastąpioną przez dowolną liczbę naturalną $a \geqslant 2$.

[Mała uwaga. Przytoczone rozumowanie pokazuje, że $2^nM_n/(n+1)!$ to liczba n-sympleksów w $\mathbb{Z}_2^n$ (bez numeracji wierzchołków). Dla $n=3$ to jest 56; wynikałoby stąd, że jest dokładnie 56 czworościanów rozpiętych przez czwórki wierzchołków sześcianu. Jednak nie. Pozostawiamy Czytelnikom znalezienie ich faktycznej liczby oraz zagadkę: czy właśnie została wykryta sprzeczność w matematyce?]

Zadanie **813.** [Dany n-kąt wypukły W, ma N przekątnych; $m \in \mathbb{N}$, $m < N$; S – zbiór wszystkich punktów przecięć przekątnych wewnątrz W (żadne trzy się nie spotykają) $\Rightarrow\ \exists\, M \subset S\colon\ |M| = m$, nie zawierający cyklu (w *cyklu* każde kolejne dwa punkty na jednej przekątnej – ale żadne trzy)] (WT=2,95; LPR=7). Wystarczy rozważać $m = N - 1$. **Michał Adamaszek** prosto i dobitnie wyjaśnił, o czym jest to zadanie: należy patrzeć na N przekątnych jako wierzchołki grafu; połączone są takie dwa wierzchołki, że odpowiadające im przekątne przecinają się wewnątrz W. Cykle krawędziowe w tym grafie to dokładnie cykle punktów S według określenia w zadaniu. Graf jest spójny (każde dwa niepołączone wierzchołki mają wspólnego sąsiada); bierzemy jako M dowolny minimalny spójny podzbiór S (czyli zbioru krawędzi grafu), wiążący wszystkie N wierzchołków; z minimalności wynika, że nie ma w nim cyklu – jest więc drzewem, zatem $|M| = N - 1$, czyli tak, jak trzeba.

Zadanie **815.** [$f, g, h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\forall\, x, y\colon\ f(x + y^3) + g(x^3 + y) = h(xy)$; $f, g, h = ?$] (WT=3,01; LPR=6). Tylko funkcje stałe (takie, że $f + g = h$) spełniają to równanie. Rozwiązanie firmowe znalazł **P. Kumor**. Nieco inaczej: **M. Adamaszek**, **K. Matuszewski**, **M. Spychała**, **A. Woryna** – pokazując (różnymi metodami, nie bez wysiłku), że f jest stała w pewnym otoczeniu zera; iterowanie równości $f(x^9) = f(x)$ (łatwej do uzasadnienia) pozwala wtedy wywnioskować, że f jest stała na $\mathbb{R}$. Jeszcze inaczej, oryginalnie, **J. Olszewski** – przez sprowadzenie do ciekawego układu trzech równań wielomianowych – choć też nie całkiem krótko (→ e-wydanie). I jeszcze jedna praca, zawierająca istotę rozumowania, ale z tak licznymi pomyłkami i niedopracowaniami, że nie można jej uznać za pełne rozwiązanie.

Zadanie zostało wzięte z dawnej olimpiady matematycznej jednego z krajów europejskich i włączone do konkursu w nadziei, że błyskotliwe rozwiązanie poznamy od uczestników; jednak nie – więc zapewne prościej zrobić się tego nie da.

Zadanie **818.** [$\forall\, n \geqslant 9\ \exists\, m \leqslant n/3\colon\ 2^n - 2^m \equiv 0 \pmod n$; $(m, n \in \mathbb{N})$] (WT=2,23; LPR=11). Kilku uczestników zauważyło (a nie zauważył tego zawczasu redaktor ligi), że prawie takie samo zadanie było już kiedyś w lidze (Δ_{16}^9, zadanie 726). W tym „prawie” kryje się jednak spory kawałek matematyki. Jedyna różnica w treści to oszacowanie dla m: tam $n/2$, tu $n/3$; wszelako to różnica jakościowa. Rozwiązanie firmowe znacznie łatwiejszego zadania 726 nie dawało się łatwo przenosić na nową sytuację, nie dawało nawet znaczącej wskazówki (choć jeden z uczestników złapał się na tę niezamierzoną pułapkę). W obecnym zadaniu wszystkie (poprawne) rozwiązania biegły jednym torem: albo (jak w „firmówce”) z jawnym użyciem funkcji Eulera, albo z wyprowadzeniem jej potrzebnych własności (nie nazywając jej po imieniu).

Zadanie **820.** [$\forall\, a, b, c > 0\colon\ \sum_{\text{cykl}} \frac{a^2}{b^2+bc} \geqslant \frac{3}{2}$] ($WT$=1,76; LPR=16). Urokliwie elementarne rozwiązanie, jakie zaproponował **Witold Bednarek**, autor zadania (i które zamieściliśmy jako firmowe), pokazuje, że zadanie mogłoby się nadawać do konkursu dla juniorów. Ale oczywiście było ono podatne i na inne techniki. Odnotujmy niektóre podejścia: **Janusz Olszewski** udowodnił ogólniejszą nierówność, słuszną dla $p, q, x, y, z > 0$: $\sum_{-\text{cykl}} \frac{x}{py+qz} \geqslant \frac{3}{p+q}$; daje ona tezę zadania, gdy $(x, y, z) = (a^2, b^2, c^2)$, $(p, q) = (\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$ (bo $bc \leqslant (b^2 + c^2)/2$). Podobną nierówność, tylko dla $p/q = 3$, ale z rozszerzeniem na n składników x_i, wskazał **Piotr Kumor**; szczegóły tych prac w e-wydaniu numeru.

Szczyt zwięzłości osiągnął **Mikołaj Pater**, używając nierówności Höldera $\left(\sum x_iy_iz_i\right)^3 \leqslant \left(\sum x_i^3\right)\left(\sum y_i^3\right)\left(\sum z_i^3\right)$; (sumy po $i = 1, 2, 3$); wystarczy podstawić $x_i = a_i^{2/3}(a_{i+1}^2 + a_{i+1}a_{i+2})^{-1/3}$, $y_i = (a_ia_{i+1})^{1/3}$, $z_i = (a_{i+1} + a_{i+2})^{1/3}$, by przy oznaczeniu $(a_1, a_2, a_3) = (a, b, c)$ dostać nierówność nieco mocniejszą od tej z zadania.

Kilka prac zaczynało się słowami: „Załóżmy b.s.o., że $a \geqslant b \geqslant c$”. Tak by było, gdyby rozważane wyrażenie było symetryczne; tu jednak mamy tylko niezmienniczość cykliczną, więc logika szwankuje. Można jedynie „b.s.o.” przyjąć, że $a \geqslant b \geqslant c$ lub $a \leqslant b \leqslant c$ (i oddzielnie analizować te dwie sytuacje).

Zadanie **822.** [$\triangle ABC$; dla $D \in BC$: U, V – środki okręgów wpisanych w ABD, ACD; ω_D – okrąg DUV $\Rightarrow$ wszystkie okręgi ω_D mają punkt wspólny] (WT=3,05; LPR=6). Przekombinowane było rozwiązanie firmowe (choć ciekawe; koncepcja: **Mikołaj Pater**, autor zadania). Uczestnicy ligi robili to prościej. **Jerzy Cisło**: U, V leżą na dwusiecznych kątów ADB, ADC, więc $\sphericalangle UDV = 90°$, co oznacza, że środek S odcinka UV jest środkiem okręgu ω_D; jeśli teraz K, L, M to punkty styczności boku BC z okręgami wpisanymi w trójkąty ABC, ABD, ACD, to dodając stronami trzy równości $BK = \frac{1}{2}(AB + BC - AC)$, $-BL = \frac{1}{2}(AD - AB - BD)$, $-DM = \frac{1}{2}(AC - AD - CD)$, otrzymujemy $LK - DM = 0$; a skoro S leży na symetralnej odcinka LM, wynika stąd, że $SK = SD$, czyli $K \in \omega_D$; tak więc S jest punktem, którego istnienie należało wykazać. Podobne rozwiązania: **M. Adamaszek**, **Ł. Merta**, **J. Olszewski** oraz (z pomocą trygonometrii) **A. Woryna**.

Klub 44 F

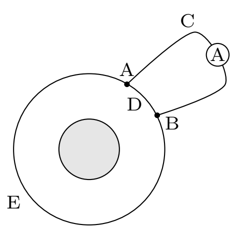
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 IV 2022

Zadania z fizyki nr 732, 733

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

732. Nieważki pręt z umocowaną na końcu kulką o masie m postawiono pionowo na podłodze. Kulkę możemy traktować jako punkt materialny. Pręt zaczyna przewracać się z zerową prędkością początkową i nie ślizga się do chwili, gdy przestaje naciskać na podłogę. Jaką wartość ma w tej chwili kąt α_0, jaki pręt tworzy z pionem? Ile wynosi współczynnik tarcia między prętem a podłogą? Ile wynosi siła tarcia, gdy pręt tworzy z pionem kąt $\alpha \leqslant \alpha_0$?

733. Zmienne pole magnetyczne wytwarza w jednorodnym przewodniku ADBEA w kształcie okręgu (rys. 1) stałą siłę elektromotoryczną ε. Linie pola magnetycznego są prostopadłe do płaszczyzny przewodnika i przechodzą przez powierzchnię w kształcie koła zacieniowaną na rysunku, pole ma oś symetrii przechodzącą przez środek przewodzącego pierścienia i prostopadłą do płaszczyzny przewodnika. W punktach A i B do pierścienia podłączony jest amperomierz. Opory przewodników ADB, AEB i ACB wynoszą odpowiednio R_1, R_2 i R_3. Jakie jest napięcie między punktami A i B?



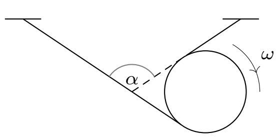
Rys. 1

Rozwiązania zadań z numeru 10/2021

Przypominamy treść zadań:

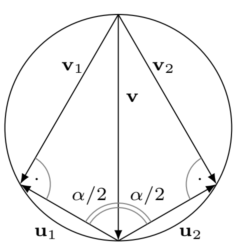
724. Ciężka tarcza o promieniu R stacza się na dwóch nierozciągliwych niciach. Nici są nawinięte na tarczę, a ich wolne końce są zamocowane (rys. 2). Podczas ruchu tarczy nici są cały czas napięte. W pewnej chwili prędkość kątowa tarczy wynosi ω, kąt pomiędzy nićmi jest wtedy równy α. Jaką prędkość ma w tym momencie środek tarczy?

725. Przyjmijmy, że Ziemia obiega Słońce po orbicie kołowej o promieniu $R = 1$ j.a. Po jakim czasie spadłaby na Słońce, gdyby nagle została zatrzymana? Ziemię i Słońce potraktujmy jako punkty materialne.



Rys. 2

724. Oznaczmy prędkości punktów styczności nici z tarczą w układzie odniesienia związanym ze środkiem tarczy przez $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$. Tworzą one ze sobą kąt α i mają jednakowe wartości $u = \omega R$. W układzie odniesienia związanym z Ziemią prędkości tych punktów wynoszą odpowiednio $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{v}$ i $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 + \mathbf{v}$, gdzie $\mathbf{v}$ jest szukaną prędkością środka tarczy. Ponieważ nici są nierozciągliwe, wektory $\mathbf{v}_1$ i $\mathbf{v}_2$ są prostopadłe do nici, a tym samym do wektorów $\mathbf{u}_1$ i $\mathbf{u}_2$. Z rysunku 3 widać, że wektor prędkości tarczy tworzy z każdą z nici kąt $\alpha/2$, a jego wartość $v = u/\cos(\alpha/2) = \omega R/\cos(\alpha/2)$.

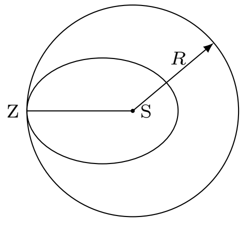


Rys. 3

725. Gdy Ziemia krąży wokół Słońca o masie M po orbicie kołowej, jej prędkość $v_0 = \sqrt{GM/R}$, a okres obiegu $T_0 = 2\pi R\sqrt{R/GM}$. Rozważmy kolejno przypadki, w których Ziemia znajduje się w odległości R od Słońca w pewnym punkcie Z orbity kołowej, a jej prędkość w tym momencie jest mniejsza od v_0 i coraz bardziej maleje (rys. 4). Tory ruchu są wtedy elipsami o malejących półosiach, a Słońce znajduje się w ognisku bardziej oddalonym od punktu Z. Dla każdej z tych elips spełnione jest trzecie prawo Keplera: $T^2/a^3 = {T_0}^2/R^3$, gdzie

$$T = T_0\sqrt{a^3/R^3} \qquad (*)$$

jest okresem obiegu, zaś a półosią wielką danej elipsy. W granicznym przypadku, gdy prędkość Ziemi w punkcie Z jest równa zeru, elipsa staje się odcinkiem ZS, a półoś wielka tej zdegenerowanej elipsy wynosi $R/2$. Zgodnie z $(*)$ szukany czas spadania $t = 0{,}5T_0\sqrt{1/8} = 0{,}25\pi R\sqrt{2R/GM} \cong 65$ dób.



Rys. 4