Sinus i cosinus w akcji

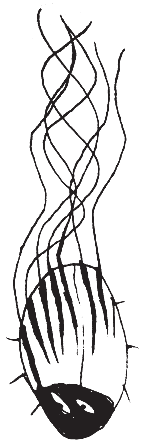
*Jarosław GÓRNICKI**

* Wydział Matematyki i Fizyki Stosowanej, Politechnika Rzeszowska

Równania potrafią łączyć różne światy (np. $E = mc^2$), a w matematyce zjawiska dyskretne z ciągłymi. Odkrywanie tożsamości zawierających działania nieskończone jest trudne, ale mogą je tworzyć wszyscy, którzy znają elementarne wzory

$$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha, \quad 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha. \tag{1}$$

Idea jest prosta: stosując wzory (1) dla wybranego kąta (np. $5°$, $9°$, $10°$, $15°$, $18°$, $20°$, $25°$, $27°$, $30°$, $35°$, $36°$, $40°$ oraz ich dopełnień do $90°$), w skończonej liczbie kroków uzyskujemy równość, w której po obu jej stronach jest taki sam składnik. Iterowanie w nieskończoność tak otrzymanej „pętli” generuje wzór.



Przykład 1. Ponieważ $2\sin 18° = \sqrt{2 - 2\cos 36°}$ oraz

$$2\cos 36° = 2\sin 54° = \sqrt{2 - 2\cos 108°} = \sqrt{2 + 2\sin 18°},$$

więc $2\sin 18° = \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\sin 18°}}$ i

$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \ldots}}}} = 2\sin 18° = 2\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{4}, \tag{2}$$

przy czym ostatni wzór wynika z analizy dziesięciokąta foremnego.

Uwaga. Ciąg

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}, \quad a_3 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \quad a_4 = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 - \sqrt{2}}}}, \ldots$$

jest zbieżny. Ponieważ

$$a_3 < a_4 < a_7 < a_8 < a_{11} < a_{12} \quad \ldots \quad < a_{10} < a_9 < a_6 < a_5 < a_2 < a_1,$$

więc:

- podciąg $\{a_2, a_6, a_{10}, \ldots\}$, jako ograniczony i malejący, jest zbieżny do granicy $\alpha \in [a_3, a_1]$,
- podciąg $\{a_4, a_8, a_{12}, \ldots\}$, jako ograniczony i rosnący, jest zbieżny do granicy $\beta \in [a_3, a_1]$.

Zatem granice α, β muszą być rozwiązaniami ciągłego równania funkcyjnego, $\sqrt{2 - \sqrt{2 + x}} = x$. Zamieniamy to równanie na układ równań $\begin{cases} x = \sqrt{2 - y}, \\ y = \sqrt{2 + x}, \end{cases}$ każde z nich podnosimy do kwadratu, odejmujemy je stronami i tworzymy postać iloczynową. Ponieważ nasze równanie ma dokładnie jedno rozwiązanie: $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \in [a_3, a_1]$, więc $\alpha = \beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ i ciąg $\{a_n\}$ jest zbieżny.

Podobne postępowanie (choć istotnie trudniejsze) pokazuje zbieżności działań nieskończonych w kolejnych przykładach.

Przykład 2. Ponieważ

$$\begin{aligned} (2\sin 10°)^2 &= 2 - 2\cos 20°, \\ (2\cos 20°)^2 &= 2 + 2\cos 40°, \\ (2\cos 40°)^2 &= 2 + 2\cos 80° = 2 + 2\sin 10°, \end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned} 2\sin 10° = \sqrt{2 - 2\cos 20°} &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\cos 40°}} = \\ &= \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\sin 10°}}}, \end{aligned}$$

a stąd

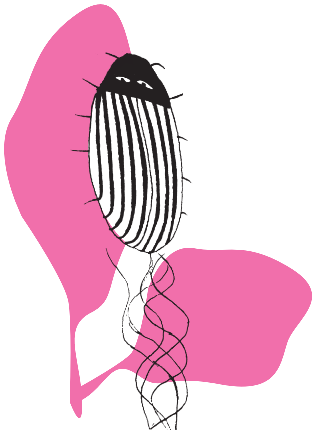
$$\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 - \ldots}}}} = 2\sin 10°, \tag{3}$$

przy czym cyklicznie powtarzają się znaki $-, +, +$.

Korzystając z bogatego arsenału wzorów trygonometrycznych, możemy rozpatrywać bardziej skomplikowane przypadki.

Rozwiązanie zadania F 1041.
„Ośrodek słabo przewodzący” otaczający elektrody oznacza, że materiał elektrod znacznie lepiej przewodzi prąd niż ośrodek, w którym się znajdują.
W dobrym przybliżeniu powierzchnia każdej z elektrod jest więc powierzchnią ekwipotencjalną. Niech potencjał jednej elektrody wynosi V, a drugiej $-V$.
Odległość między elektrodami jest znacznie większa od ich rozmiarów, a więc w pobliżu powierzchni każdej z nich, z dobrym przybliżeniem, pole elektryczne jest sferycznie symetryczne (jak od ładunku punktowego). Wartość pola elektrycznego na powierzchni elektrody równa jest $E = V/r$. W ośrodku przewodzącym gęstość prądu $\vec{j} = \vec{E}/\rho$.
Całkowity prąd I wypływający z elektrody wynosi $I = 4\pi r^2 j$. Taki sam prąd wpłynie na drugą elektrodę.
Napięcie U między elektrodami wynosi: $U = 2V$. Otrzymujemy:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{2V}{4\pi r^2 j} = \frac{2V\rho}{4\pi r^2 E} = \frac{\rho}{2\pi r}.$$



Przykład 3. Ponieważ

$$\begin{aligned}(1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ)^2 &= 1+4\sqrt{3}\sin 20^\circ + 12\sin^2 20^\circ = \\ &= 1+4\sqrt{3}\sin 20^\circ + 6 - 6\cos 40^\circ = \\ &= 7+4\sqrt{3}\sin 20^\circ - 4\sqrt{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 40^\circ = \\ &= 7+4\sqrt{3}\sin 20^\circ - 4\sqrt{3}\cos 30^\circ\cos 40^\circ = \\ &= 7+4\sqrt{3}\sin 20^\circ - (2\sqrt{3}\cos 70^\circ + 2\sqrt{3}\cos 10^\circ) = \\ &= 7+2\sqrt{3}\cos 70^\circ - 2\sqrt{3}\cos 10^\circ = \\ &= 7-4\sqrt{3}\sin 30^\circ\sin 40^\circ = \\ &= 7-2\sqrt{3}\sin 40^\circ = \\ &= 8-(1+2\sqrt{3}\sin 40^\circ)\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}(1+2\sqrt{3}\sin 40^\circ)^2 &= \ldots = 8+(2\sqrt{3}\sin 80^\circ - 1),\\ (2\sqrt{3}\sin 80^\circ - 1)^2 &= \ldots = 8-(1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ),\end{aligned}$$

więc

$$\begin{aligned}1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ &= \sqrt{8-(1+2\sqrt{3}\sin 40^\circ)} = \sqrt{8-\sqrt{8+(2\sqrt{3}\sin 80^\circ-1)}} = \\ &= \sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-(1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ)}}}.\end{aligned}$$

Zatem

$$\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8-\ldots}}}} = 1+2\sqrt{3}\sin 20^\circ, \tag{4}$$

przy czym cyklicznie powtarzają się znaki $-,+,-$.

Jednocześnie z tych samych zależności mamy

$$\sqrt{8-\sqrt{8-\sqrt{8+\sqrt{8-\ldots}}}} = 2\sqrt{3}\sin 80^\circ - 1 = 2\sqrt{3}\cos 10^\circ - 1, \tag{5}$$

z powtarzającymi się cyklicznie znakami $-,-,+$ lub

$$\sqrt{8+\sqrt{8-\sqrt{8-\sqrt{8+\ldots}}}} = 1+2\sqrt{3}\sin 40^\circ, \tag{6}$$

z powtarzającymi się cyklicznie znakami $+,-,-$.

Przykład 4. Korzystając z równości

$$\begin{aligned}1+4\sin 10^\circ &= \sqrt{11-2(1+4\sin 50^\circ)} = \sqrt{11-2\sqrt{11+2(4\sin 70^\circ-1)}} = \\ &= \sqrt{11-2\sqrt{11+2\sqrt{11-2(1+4\sin 10^\circ)}}},\end{aligned}$$

otrzymamy wzór

$$\sqrt{11-2\sqrt{11+2\sqrt{11-2\sqrt{11-\ldots}}}} = 1+4\sin 10^\circ, \tag{7}$$

z powtarzającymi się cyklicznie znakami $-,+,-$.

Przykład 5. Równość

$$\begin{aligned}1+4\sqrt{3}\sin 20^\circ &= \sqrt{23-2(4\sqrt{3}\sin 80^\circ-1)} = \sqrt{23-2\sqrt{23+2(1+4\sqrt{3}\sin 40^\circ)}} = \\ &= \sqrt{23-2\sqrt{23+2\sqrt{23+2(1+4\sqrt{3}\sin 20^\circ)}}}\end{aligned}$$

daje wzór

$$\sqrt{23-2\sqrt{23+2\sqrt{23+2\sqrt{23-\ldots}}}} = 1+4\sqrt{3}\sin 20^\circ, \tag{8}$$

z powtarzającymi się cyklicznie znakami $-,+,+$.

Możliwości jest wiele, każdy może mieć swój wzór i zaproponować „kosmicznie" trudne zadanie: *obliczyć* … i tu wstawić lewą stronę wzoru (i), $i = 2, 3, \ldots$

Rozwiązanie zadania F 1042.
Pole elektryczne Ziemi, w dobrym przybliżeniu, ma symetrię sferyczną – jak pole ładunku punktowego. Przyjmijmy, że ładunek Ziemi wynosi Q. Na wysokości h nad Ziemią pole elektryczne będzie polem ładunku Ziemi i ładunku q zawartego w sferycznej warstwie atmosfery o grubości h. Mamy:

$$E_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2},$$
$$E_1 = \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 (R+h)^2} \approx \frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\Big(1-\frac{2h}{R}\Big).$$

W ostatnim z wyrażeń możemy pominąć składnik $2h/R$ w nawiasie. Otrzymujemy:

$$q = 4\pi\varepsilon_0 R^2 (E_1 - E_0).$$

Objętość warstwy atmosfery o grubości $h << R$ wynosi $V \approx 4\pi R^2 h$. Ostatecznie:

$$d = \frac{\varepsilon_0 (E_1 - E_0)}{h}.$$

Po podstawieniu danych liczbowych: $d \approx 4{,}4 \cdot 10^{-13}$ C/m^3.