

**Twierdzenie 1.** *Algorytm Gale’a–Shapleya zwraca stabilne dopasowanie.*

*Dowód.* Załóżmy nie wprost, że dopasowanie  $\Phi$  zwrócone przez algorytm Gale’a–Shapleya nie jest stabilne. Niech  $\{m, k\}$  będzie parą blokującą  $\Phi$ . Mamy zatem  $m \succ_k \Phi(k)$  oraz  $k \succ_m \Phi(m)$ . Ponieważ  $m$  woli  $k$  od swojej partnerki  $\Phi(m)$ ,  $m$  musiał oświadczyć się  $k$  i zostać przez nią odrzuconym (mężczyzna zawsze oświadcza się ulubionej kobiecie, która go do tej pory nie odrzuciła). Skoro  $k$  odrzuciła  $m$ , to znaczy, że w chwili, gdy rozważała jego oświadczenia, otrzymała propozycję bądź była zaręczona z mężczyzną, którego wolała niż  $m$ . To oznacza, że w pewnym momencie  $k$  była zaręczona z kimś, kogo wolała od  $m$ . Zauważmy, że w trakcie działania algorytmu Gale’a–Shapleya każda zaręczona kobieta zrywa zaręczyny tylko wtedy, gdy może się zaręczyć z kimś, kogo woli od obecnego partnera. Z tego wynika, że na koniec działania algorytmu  $k$  musiała być również zaręczona z kimś, kogo woli od  $m$ . Jest to sprzeczne z  $m \succ_k \Phi(k)$ , zatem  $\{m, k\}$  nie może być parą blokującą, co kończy dowód.  $\square$

Zauważmy, że gdybyśmy wykonali algorytm Gale’a–Shapleya z zamienionymi rolami i gdyby to kobiety oświadczały się mężczyznom, wynik działania algorytmu mógłby być inny, jednak zwrócone dopasowanie również byłoby stabilne. Co ciekawe, można pokazać, że oryginalna wersja algorytmu stawia mężczyzn w uprzywilejowanej sytuacji. Można nawet wykazać, że dopasowanie zwrócone przez algorytm Gale’a–Shapleya jest dla mężczyzn optymalne!

**Twierdzenie 2.** *Nie istnieje stabilne dopasowanie, w którym którykolwiek mężczyzna mógłby uzyskać lepszą partnerkę niż ta, którą przydzielił mu algorytm Gale’a–Shapleya.*

*Dowód.* Niech  $\Phi$  oznacza dopasowanie zwrócone przez algorytm Gale’a–Shapleya. Załóżmy nie wprost, że istnieje stabilne dopasowanie  $\Psi$ , w którym dla pewnego mężczyzny  $m_1$  zachodzi  $\Psi(m_1) \succ_{m_1} \Phi(m_1)$ . Oznaczmy  $k_1 = \Phi(m_1)$  i  $k_2 = \Psi(m_1)$ . W algorytmie Gale’a–Shapleya  $m_1$  oświadczył się  $k_2$  przed  $k_1$ , zatem  $k_2$  musiała odrzucić  $m_1$  na rzecz innego mężczyzny  $m_2$ . Oznacza to, że  $m_1$  oświadczył się  $k_1$  po tym, jak  $m_2$  oświadczył się  $k_2$ . Co więcej,  $m_2 \succ_{k_2} m_1$ . Ponieważ  $\Psi$  jest stabilnym dopasowaniem, musi zachodzić  $\Psi(m_2) \succ_{m_2} k_2$ . Oznaczmy  $k_3 = \Psi(m_2)$ . Wiemy, że  $m_2$  musiał się oświadczyć  $k_3$  przed  $k_2$ , zatem  $k_3$  odrzuciła  $m_2$  na rzecz  $m_3$ . Analogicznie,  $m_2$  oświadczył się  $k_2$  po tym, jak  $m_3$  oświadczył się  $k_3$ . Możemy kontynuować to rozumowanie, znajdując kolejne takie pary  $m_i, k_i$ , że  $k_i$  jest partnerką  $m_{i-1}$  w  $\Psi$  (zakładając  $i > 1$ ). Ponieważ mamy skończoną liczbę mężczyzn, w pewnym momencie musi nastąpić sytuacja, że znajdziemy cykl, czyli taką parę  $m_p$  i  $k_p$ , że  $k_p$  będzie partnerem pewnego wcześniej zdefiniowanego  $m_j$  (dla  $j < p$ ).

Otrzymujemy zatem sekwencje  $m_j, m_{j+1}, \dots, m_p$  oraz  $k_j, k_{j+1}, \dots, k_p$  takie, że  $m_j$  oświadczył się  $k_j$  po tym, jak  $m_{j+1}$  oświadczył się  $k_{j+1}$ ,  $\dots$ ,  $m_p$  oświadczył się  $k_p$  po tym, jak  $m_j$  oświadczył się  $k_j$ . Pokazuje to sprzeczność i kończy dowód.  $\square$

#### Literatura

- [1] D. Gale and L. S. Shapley. „College admissions and the stability of marriage”. *The American Mathematical Monthly*, 120(5):386–391, 1962.
- [2] K. Iwama and S. Miyazaki. „A survey of the stable marriage problem and its variants”. In *International Conference on Informatics Education and Research for Knowledge-Circulating Society*, pages 131–136, 2008.

## Zegar biologiczny tyka

W trakcie naszego życia przynajmniej kilkukrotnie spotykamy się z określeniem *zegar biologiczny*, lecz co ono dokładnie oznacza? Jak nasze ciało zdaje sobie sprawę z upływającego czasu? Czy zostawia on jakieś zmiany w naszych tkankach i organach? Jeśli tak, to czy jesteśmy w stanie je zmierzyć i na ile precyzyjnie możemy określić, ile czasu upłynęło?

Choć te pytania mogą brzmieć nieco frywolnie, są w istocie bardzo ważne w procesie identyfikacji anonimowych ciał. W całym zestawie informacji potrzebnych do zidentyfikowania ciała oszacowanie wieku jest zdecydowanie najbardziej istotne. Zadanie to jest na tyle ważne, że na przestrzeni lat opracowano wiele metod estymacji wieku – np. pomiar zasklepienia czaszki, obserwacja zmian w kościach miednicy czy nawet morfologia materiału pobranego z żeber. Niektóre z tych metod mogą mieć bardzo wysoką dokładność, jednak wymagają kosztownego sprzętu i często mogą być wykorzystywane tylko w przypadku szkieletów, a nie

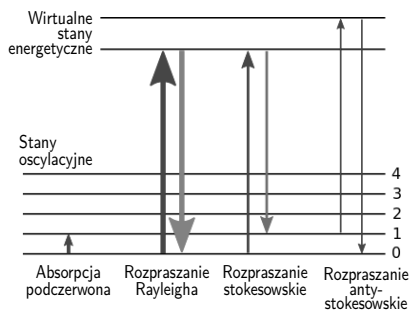
niedawno odnalezionych ciał. Najbardziej zaawansowane i obiektywne metody szacowania wieku we współczesnej nauce bazują na analizie DNA. Na podstawie próbek krwi możliwe jest określenie przybliżonego wieku z wysoką dokładnością.

Szukając innego rozwiązania, japońscy naukowcy z Kioto, prowadzeni przez Hiroshiego Ikegawę, rozważali możliwość wykorzystania spektroskopii Ramana do analizy ludzkiej skóry, dzięki czemu opracowano by nowe, wiarygodne i łatwo dostępne narzędzie do szacowania wieku. Ich pomysł polegał na analizie widm promieniowania lipidów i białek znajdujących się w skórze, które można pobrać podczas autopsji.

Analiza widma promieniowania uzyskana w spektroskopii ramanowskiej jest powszechnie używana w chemii, ponieważ dostarcza „odcisk palca” cząsteczek, na podstawie którego można je później zidentyfikować. Japońscy naukowcy wierzyli, że emisja

Joanna M. OLAS

Doktorantka, Instytut Fizyki PAN



Rys. 1. Efekt Ramana polega na tym, że w widmie światła rozproszonego na danej substancji występują, obok fotonów o takiej samej energii jak fotony padające, fotony o zmienionej energii.

Zdecydowana większość fotonów zachowuje energię, dając pasmo Rayleigha. Zdarza się jednak, że emitowany foton ma mniejszą energię niż padający, a różnica energii zostaje zużyta na wzbudzenie drgań cząsteczki – rejestruje się wtedy światło rozproszone o zmniejszonej częstotliwości, pasmo stokesowskie. Jeżeli cząstka pochłaniająca foton była w stanie wzbudzonym (drgającym), to emitowany foton może mieć również większą energię niż padający, ponieważ cząsteczka przekazuje swój nadmiar energii kreowanemu fotonowi i przechodzi w stan podstawowy – rejestruje się wtedy światło rozproszone o zwiększonej częstotliwości, pasmo antystokesowskie.

Pasma stokesowskie i antystokesowskie o odpowiednio zmniejszonej i zwiększonej częstotliwości są położone symetrycznie po obu stronach pasma Rayleigha. Są one na ogół około 1000 razy słabsze od pasma Rayleigha, a ich liczba i położenie zależą od budowy cząsteczek rozpraszających.

ramanowska obserwowana z powierzchni próbek skóry, czyli biofizyczne połączenie między „odciskiem palca” a specyficznymi zmianami w strukturze skóry, może być podstawą do określenia ludzkiego wieku. Wiadomo było, że struktury białek zwijają się wraz z upływem czasu. Z tego powodu można postrzegać ten proces jako „zegar biologiczny”, który nosimy w skórze.

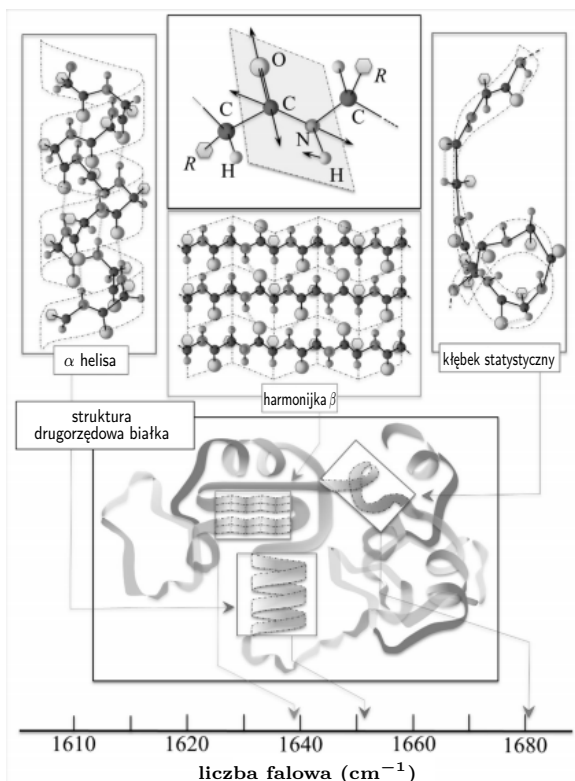
Udowodniono, że białka w naszej skórze zwijają się wraz z upływem czasu, przechodząc w kilka charakterystycznych mezostruktur, nazywanych często strukturami drugiego rzędu. Każda z nich ma inne widmo promieniowania, które można zaobserwować w zakresie liczb falowych od  $1630\text{ cm}^{-1}$  do  $1690\text{ cm}^{-1}$ . Gdy jesteśmy młodzi, nasze białka w skórze ułożone są (głównie, choć nie wszystkie) w strukturę  $\beta$ -kartki (rys. 2). Wraz z upływem czasu białka zmieniają swoje uporządkowanie i nieodwracalnie zwijają się w strukturę nazywaną  $\alpha$ -helisą. Każda z tych konfiguracji oraz ich wzajemny stosunek mogą być zaobserwowane w zmierzonym widmie promieniowania. Zespół Ikegaya postanowił znaleźć relację pomiędzy zmianami stosunku poszczególnych struktur a procesem starzenia.

Aby udowodnić tę teorię, pobrano i przeanalizowano ponad 130 próbek skóry od kobiet i mężczyzn w wieku od kilku miesięcy do 70 lat. Było to podstawą do opracowania modelu, który z dość dobrą dokładnością pozwala na określenie wieku ciała (granica błędów to pojedyncze lata). Choć inne metody określania wieku mogą mieć lepszą dokładność (np. metody bazujące na radiografii stomatologicznej pozwalają na uzyskanie dokładności 0,3–0,8 roku w niektórych grupach badanych, średni błąd w metodach DNA wynosi 3,6 roku i w dużej mierze zależy od miejsca, z którego została pobrana próbka), w większości przypadków wymagają dobrze wyposażonych laboratoriów i specjalistycznej kadry do przeprowadzenia analizy. Natomiast pomiar z użyciem spektroskopii ramanowskiej jest dużo łatwiejszy do przeprowadzenia.

Oczywiście badania zespołu Ikegaya, jak wszystkie inne badania, mają pewne ograniczenia: nie dostarczają innych danych biologicznych, nie zaobserwowano znaczącej różnicy pomiędzy próbkami pochodzącymi od mężczyzn i od kobiet, nie można na tej podstawie ustalić np. przyczyny śmierci. Pewnym utrudnieniem

może być to, że w badaniach Ikegaya oszacowanie wieku wśród ludzi młodych było obarczone większym błędem niż u ludzi starszych. Jest to spowodowane tym, że tempo zwijania się białek jest bardziej zróżnicowane wśród młodych ludzi: decydują o nim geny, ale też poziom stresu, brak snu czy dieta. Zespół Hiroshiego Ikegaya deklaruje, że będzie nadal rozwijać swoją technologię. Choć technologia ta do tej pory wykorzystywała materiał biologiczny pochodzący od osób zmarłych, być może w niedługim czasie będzie mogła być używana również w przypadku żywych.

Aktualnie, w przypadku identyfikacji osób zmarłych, bardzo istotne jest, aby metody identyfikacji mogły być wykorzystywane przez ludzi bez specjalistycznego wykształcenia i w miejscach, gdzie ciała zostały znalezione. Konieczność transportu materiału biologicznego do specjalistycznych laboratoriów powoduje, że ważne informacje o miejscu zbrodni mogą ulec zniszczeniu. Niestety metody pozwalające na spełnienie tych warunków mają stosunkowo małą dokładność. Wszystko zmienić mogą niedawno opracowane spektrometry ramanowskie, które nie wymagają wyposażonych po brzegi laboratoriów oraz specjalistycznie wykształconej kadry. Już dziś każdy oddział policji w Japonii posiada takie urządzenie, aby sprawniej wykrywać narkotyki w miejscach zbrodni. Ręczne spektrometry ramanowskie w kilka minut dostarczają wynik pomiaru, nie potrzebując przy tym drogich odczynników. Biorąc pod uwagę niedawne wyniki badań zespołu Hiroshiego Ikegaya, możemy optymistycznie zakładać, że za jakiś czas określanie wieku w miejscach zbrodni przy pomocy przenośnych spektroskopów ramanowskich będzie standardową procedurą.



Rys. 2. Rysunek pochodzi z pracy zespołu Hiroshiego Ikegaya *A Raman algorithm to estimate human age from protein structural variations in autopsy skin samples: a protein biological clock*. Sci Rep 11, 5949 (2021). <https://rdu.be/czouh>