

# Małżeństwa, zaręczyny i algorytmy stabilnego dopasowania, czyli nowy wspaniały świat, w którym nikt nikogo nie zdradza

\* Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Piotr SKOWRON\*

W 1962 roku dwóch amerykańskich matematyków, David Gale i Lloyd Shapley, zadało sobie pytanie, czy możliwe jest dobranie mężczyzn i kobiet w pary tak, aby nawet najbardziej zatwardziali przeciwnicy monogamii nie byli w stanie nawiązać romansu [1]? W tym celu, rzecz jasna, odwołali się do teorii algorytmów i zaproponowali następujący model. Niech  $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$  i  $K = \{k_1, k_2, \dots, k_\ell\}$  oznaczają, odpowiednio, zbiory  $n$  mężczyzn i  $\ell$  kobiet. Każdy mężczyzna ma ustalone preferencje względem kobiet; niech  $\succ_m$  oznacza ranking preferencji mężczyzny  $m$ , będący porządkiem liniowym na zbiorze  $K$ . Podobnie, niech  $\succ_k$  oznacza ranking preferencji kobiety  $k$ . W swoim artykule Gale i Shapley przyjęli konserwatywny punkt widzenia i nie wchodzili w kwestie związane z bi- czy też homoseksualizmem.<sup>†</sup>

<sup>†</sup>Warto jednak dodać, że niektóre z kolejnych prac dotyczących problematyki stabilnego dopasowania prezentowały bardziej progresywne spojrzenie na kwestię małżeństwa [2]. Przykładowo, często rozważany jest model, w którym ranking preferencji danego człowieka może być wyrażony jako porządek względem innych ludzi, niezależnie od płci. Model ten jest bardziej ogólny i algorytmy dla tego przypadku znajdują zastosowanie w szerszym zakresie sytuacji, na przykład przy doborze współlokatorów w akademikach (*the stable roommate problem*). Późniejsze modele zakładały również, że rankingi preferencji mogą być reprezentowane jako słabe porządki lub że ludzie mogą kierować się kilkoma niezależnymi kryteriami przy doborze partnerów. W tym artykule nie rozważamy bardziej złożonych modeli, jednak warto wiedzieć, że dziedzina badań zapoczątkowana przez Gale'a i Shapleya jest szeroka i dotyczy wielu wariantów bazowego problemu.

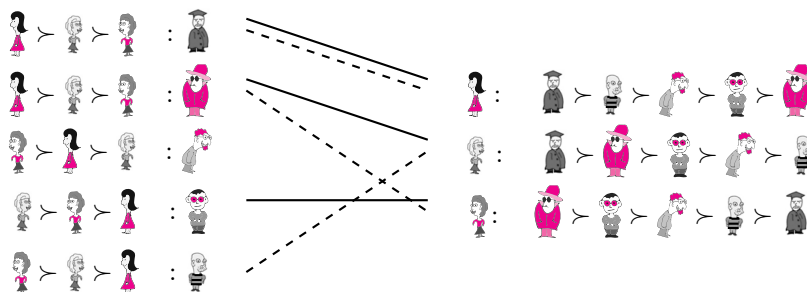
Dopasowaniem nazwiemy zbiór par, z których każda złożona jest z mężczyzny i kobiety, takich, że każdy człowiek jest sparowany z co najwyżej jedną osobą. Formalnie, zbiór  $\Phi \subseteq \{\{m, k\} : m \in M, k \in K\}$  jest dopasowaniem, jeżeli dla dowolnych dwóch par  $p_1, p_2 \in \Phi$  ( $p_1 \neq p_2$ ) zachodzi  $p_1 \cap p_2 = \emptyset$ . Dla każdej osoby  $o$  przez  $\Phi(o)$  oznaczamy partnera  $o$  w dopasowaniu  $\Phi$ . Jeżeli w ramach  $\Phi$  osoba  $o$  nie jest z nikim sparowana, to stosujemy notację  $\Phi(o) = \perp$ . Zakładamy również, że każda osoba woli być sparowana, niż pozostać bez pary (jako ciekawe ćwiczenie Czytelnik może spróbować wykazać, że założenie możemy poczynić bez straty ogólności), czyli dla dowolnych  $m \in M$  i  $k \in K$  mamy  $k \succ_m \perp$  i  $m \succ_k \perp$ . Jesteśmy gotowi do zdefiniowania kluczowego pojęcia rozważanego w tym artykule.

**Definicja 1.** *Dopasowanie  $\Phi$  jest stabilne, jeżeli nie istnieją mężczyzna  $m \in M$  i kobieta  $k \in K$ , którzy spełniają następujący warunek:*

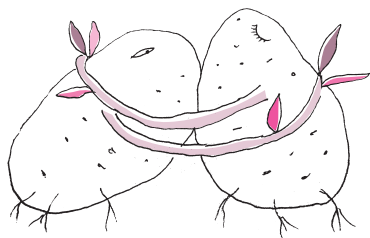
$$k \succ_m \Phi(m) \text{ oraz } m \succ_k \Phi(k).$$

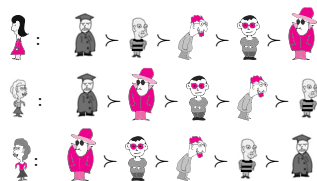
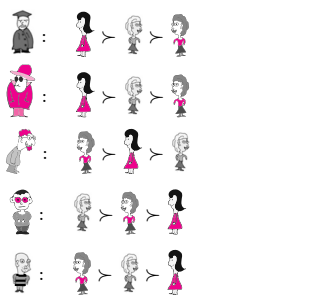
Innymi słowy, dopasowanie jest stabilne, jeżeli nie istnieją tacy mężczyzna i kobieta, którzy woleliby siebie nawzajem niż swoich dotychczasowych partnerów. Zilustrujmy definicję 1 na poniższym przykładzie:

**Przykład 1.** *Rozważmy instancję przedstawioną na poniższym rysunku.*

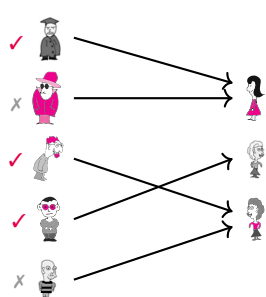


Na rysunku obok każdej osoby umieściliśmy jej listę preferencji. Przykładowo, preferencje mężczyzny  $m_1$  to  $m_1 \succ m_2 \succ m_3$ , dlatego najchętniej zacząłby chodzić z  $w_1$  (jest przecież inteligentna, wrażliwa, czuła i ma świetne poczucie humoru!), w drugiej kolejności z  $w_2$  (no tak, przecież  $m_1$  uwielbia blondynki!), w ostateczności zgadzając się na chodzenie z  $w_3$  (ale tylko dlatego, że  $w_3$  pochodzi z bogatej rodziny, więc zapewne to ona będzie płacić za bilety do kina). Na rysunku zaznaczyliśmy również dwa dopasowania. Dopasowanie  $\Phi_1 = \{\{m_1, w_1\}, \{m_2, w_2\}, \{m_3, w_3\}, \{m_4, w_4\}, \{m_5, w_5\}\}$ , oznaczone przerywaną linią, nie jest stabilne. Spójrzmy na parę  $w_1$  i  $m_2$ :  $w_1$  woli  $m_2$  od  $m_1$  – swojej partnerki w  $\Phi_1$ ; podobnie  $m_2$  woli  $w_1$  od swojego partnera  $w_2$ . Ta para świadczy zatem o tym, że dopasowanie  $\Phi_1$  nie jest stabilne. Taką parę nazwiemy blokującą. Pozostałe pary blokujące dla  $\Phi_1$  to  $w_2$  i  $m_3$  oraz  $w_3$  i  $m_4$ . Dopasowanie  $\Phi_2 = \{\{m_1, w_2\}, \{m_2, w_1\}, \{m_3, w_4\}, \{m_4, w_3\}, \{m_5, w_5\}\}$ , oznaczone ciągłą linią, jest stabilne – nie istnieje para, która blokowałaby  $\Phi_2$ .

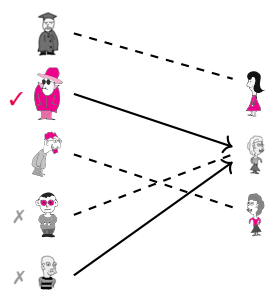




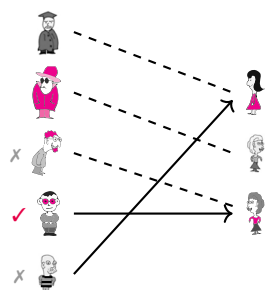
Preferencje



Krok 1



Krok 2



Krok 3

Pojęcie stabilnego dopasowania jest ważne i powszechnie wykorzystywane w praktyce. Algorytmy do znajdowania stabilnego dopasowania są między innymi używane w Stanach Zjednoczonych do przydziału rezydentów lekarskich do szpitali (wtedy rolę mężczyzn przyjmują rezydenci lekarscy, a rolę kobiet wakaty w szpitalach) lub do przydziału uczniów do szkół. Podobne algorytmy są również wykorzystywane przy transplantacji nerek, aby dopasować chorych potrzebujących nerki z potencjalnymi dawcami – zdarza się, że dana osoba  $x$  nie jest w stanie przekazać swojej nerki bliskiej osobie  $y$  ze względu na niezgodność grupy krwi, jednak  $x$  może przekazać nerkę innemu pacjentowi  $z$  w zamian za to, że osoba bliska  $z$  zgodzi się przekazać nerkę dla  $y$ ; w ten sposób możemy tworzyć dopasowania, które zwiększają liczbę możliwych transplantacji. Teoria stabilnych dopasowań jest obecnie ugruntowana, a jeden z jej twórców, wspomniany wcześniej Lloyd Shapley, za stworzenie fundamentów tej teorii otrzymał w 2012 roku Nagrodę Banku Szwecji im. Alfreda Nobla w dziedzinie ekonomii.

Rozumiemy już istotę i wagę pojęcia stabilnego dopasowania. Czas zadać kluczowe pytanie. Czy stabilne dopasowanie zawsze istnieje, niezależnie od preferencji mężczyzn i kobiet? Jeżeli tak, to czy potrafimy je efektywnie obliczyć? Otóż na oba te pytania możemy odpowiedzieć **TAK!** (Tak, autor również jest podekscytowany tym faktem!). Oto i algorytm znajdowania stabilnego dopasowania zaproponowany przez Gale'a i Shapleya. Początkowo zakładamy, że nikt nie jest zaręczony, i w pętli wykonujemy następujące kroki:

1. Każdy niezaręczony mężczyzna oświadcza się swojej ulubionej kobiecie spośród tych, które do tej pory nie odrzuciły jego oświadczeń.
2. Każda kobieta  $k$ , której oświadcza się jeden bądź kilku mężczyzn, wybiera swojego ulubionego spośród oświadczających się – nazwijmy go  $x$  – a oświadczeni pozostali definitywnie odrzuca. Jeżeli  $k$  nie jest zaręczona, to przyjmuje oświadczeni  $x$ , i od tej pory  $k$  i  $x$  są zaręczeni. Jeżeli  $k$  jest już zaręczona z mężczyzną  $y$ , to porównuje ona  $x$  i  $y$ . Jeżeli  $x \succ_k y$ , to  $k$  zrywa swoje zaręczyny z  $y$  (oznacza to również, że  $k$  definitywnie odrzuca jego oświadczeni) oraz zaręcza się z  $x$ . W przeciwnym przypadku, czyli gdy  $y \succ_k x$ , kobieta  $k$  odrzuca oświadczeni  $x$ .

Algorytm się zatrzymuje, gdy każdy mężczyzna jest zaręczony bądź jego oświadczeni zostały odrzucone przez każdą kobietę, a następnie zwraca dopasowanie odpowiadające aktualnym zaręczynom. Zwróćmy uwagę, że algorytm na pewno kiedyś się zatrzyma, gdyż mężczyźni nie mogą dwukrotnie oświadczyć się tej samej kobiecie.

Zilustrujmy działanie algorytmu dla instancji z przykładu 1. Pierwsze trzy kroki algorytmu są również przedstawione na rysunkach obok: strzałka oznacza oświadczeni, przerywana linia to zaręczyny, które istnieją tuż przed danym krokiem algorytmu, zaś symbole  $X$  i  $\checkmark$  oznaczają odpowiednio odrzucenie/zerwanie oraz przyjęcie oświadczeni. Początkowo  $\text{M}_1$  i  $\text{M}_2$  oświadcza się  $\text{K}_1$ , ponieważ jest to ich ulubiona kobieta.  $\text{M}_3$  i  $\text{M}_4$  oświadcza się  $\text{K}_2$ , zaś  $\text{M}_5$  oświadcza się  $\text{K}_3$ . Następnie  $\text{K}_1$  odrzuca oświadczeni  $\text{M}_2$  i zaręcza się z  $\text{M}_1$ . Podobnie  $\text{K}_2$  odrzuca  $\text{M}_4$  i zaręcza się z  $\text{M}_3$ ; ponadto  $\text{K}_2$  zaręcza się z  $\text{M}_5$ . W drugim obrocie pętli algorytmu  $\text{M}_2$  i  $\text{M}_4$  oświadcza się  $\text{K}_1$ .  $\text{K}_1$  odrzuca  $\text{M}_4$  i porównuje  $\text{M}_2$  ze swoim dotychczasowym partnerem, czyli z  $\text{M}_1$ . Okazuje się, że  $\text{K}_1$  woli  $\text{M}_2$  od  $\text{M}_1$ , zatem zrywa zaręczyny z  $\text{M}_1$  i zaręcza się z  $\text{M}_2$ . W trzecim obrocie pętli  $\text{M}_4$  oświadcza się  $\text{K}_2$ , a  $\text{M}_5$  oświadcza się  $\text{K}_1$ .  $\text{K}_2$  odrzuca oświadczeni  $\text{M}_5$  (a co za tym idzie,  $\text{M}_5$  został odrzucony przez każdą kobietę), zaś  $\text{K}_1$  zrywa swoje zaręczyny z  $\text{M}_2$  i zaręcza się z  $\text{M}_4$ . W czwartym obrocie pętli  $\text{M}_2$  oświadcza się  $\text{K}_1$ , która go odrzuca, zaś w piątej i ostatniej iteracji  $\text{M}_2$  oświadcza się  $\text{K}_2$  i przez nią również zostaje odrzucony. W tym momencie  $\text{M}_1$  jest zaręczony z  $\text{K}_1$ ,  $\text{M}_2$  jest zaręczony z  $\text{K}_2$ , zaś  $\text{M}_3$  z  $\text{K}_2$ . Dopasowanie odpowiadające tym zaręczynom (czyli  $\Phi_2$ ) zostaje zwrócone przez algorytm Gale'a-Shapleya.

**Twierdzenie 1.** *Algorytm Gale’a–Shapleya zwraca stabilne dopasowanie.*

*Dowód.* Załóżmy nie wprost, że dopasowanie  $\Phi$  zwrócone przez algorytm Gale’a–Shapleya nie jest stabilne. Niech  $\{m, k\}$  będzie parą blokującą  $\Phi$ . Mamy zatem  $m \succ_k \Phi(k)$  oraz  $k \succ_m \Phi(m)$ . Ponieważ  $m$  woli  $k$  od swojej partnerki  $\Phi(m)$ ,  $m$  musiał oświadczyć się  $k$  i zostać przez nią odrzuconym (mężczyzna zawsze oświadcza się ulubionej kobiecie, która go do tej pory nie odrzuciła). Skoro  $k$  odrzuciła  $m$ , to znaczy, że w chwili, gdy rozważała jego oświadczenia, otrzymała propozycję bądź była zaręczona z mężczyzną, którego wolała niż  $m$ . To oznacza, że w pewnym momencie  $k$  była zaręczona z kimś, kogo wolała od  $m$ . Zauważmy, że w trakcie działania algorytmu Gale’a–Shapleya każda zaręczona kobieta zrywa zaręczyny tylko wtedy, gdy może się zaręczyć z kimś, kogo woli od obecnego partnera. Z tego wynika, że na koniec działania algorytmu  $k$  musiała być również zaręczona z kimś, kogo woli od  $m$ . Jest to sprzeczne z  $m \succ_k \Phi(k)$ , zatem  $\{m, k\}$  nie może być parą blokującą, co kończy dowód.  $\square$

Zauważmy, że gdybyśmy wykonali algorytm Gale’a–Shapleya z zamienionymi rolami i gdyby to kobiety oświadczały się mężczyznom, wynik działania algorytmu mógłby być inny, jednak zwrócone dopasowanie również byłoby stabilne. Co ciekawe, można pokazać, że oryginalna wersja algorytmu stawia mężczyzn w uprzywilejowanej sytuacji. Można nawet wykazać, że dopasowanie zwrócone przez algorytm Gale’a–Shapleya jest dla mężczyzn optymalne!

**Twierdzenie 2.** *Nie istnieje stabilne dopasowanie, w którym którykolwiek mężczyzna mógłby uzyskać lepszą partnerkę niż ta, którą przydzielił mu algorytm Gale’a–Shapleya.*

*Dowód.* Niech  $\Phi$  oznacza dopasowanie zwrócone przez algorytm Gale’a–Shapleya. Załóżmy nie wprost, że istnieje stabilne dopasowanie  $\Psi$ , w którym dla pewnego mężczyzny  $m_1$  zachodzi  $\Psi(m_1) \succ_{m_1} \Phi(m_1)$ . Oznaczmy  $k_1 = \Phi(m_1)$  i  $k_2 = \Psi(m_1)$ . W algorytmie Gale’a–Shapleya  $m_1$  oświadczył się  $k_2$  przed  $k_1$ , zatem  $k_2$  musiała odrzucić  $m_1$  na rzecz innego mężczyzny  $m_2$ . Oznacza to, że  $m_1$  oświadczył się  $k_1$  po tym, jak  $m_2$  oświadczył się  $k_2$ . Co więcej,  $m_2 \succ_{k_2} m_1$ . Ponieważ  $\Psi$  jest stabilnym dopasowaniem, musi zachodzić  $\Psi(m_2) \succ_{m_2} k_2$ . Oznaczmy  $k_3 = \Psi(m_2)$ . Wiemy, że  $m_2$  musiał się oświadczyć  $k_3$  przed  $k_2$ , zatem  $k_3$  odrzuciła  $m_2$  na rzecz  $m_3$ . Analogicznie,  $m_2$  oświadczył się  $k_2$  po tym, jak  $m_3$  oświadczył się  $k_3$ . Możemy kontynuować to rozumowanie, znajdując kolejne takie pary  $m_i, k_i$ , że  $k_i$  jest partnerką  $m_{i-1}$  w  $\Psi$  (zakładając  $i > 1$ ). Ponieważ mamy skończoną liczbę mężczyzn, w pewnym momencie musi nastąpić sytuacja, że znajdziemy cykl, czyli taką parę  $m_p$  i  $k_p$ , że  $k_p$  będzie partnerem pewnego wcześniej zdefiniowanego  $m_j$  (dla  $j < p$ ).

Otrzymujemy zatem sekwencje  $m_j, m_{j+1}, \dots, m_p$  oraz  $k_j, k_{j+1}, \dots, k_p$  takie, że  $m_j$  oświadczył się  $k_j$  po tym, jak  $m_{j+1}$  oświadczył się  $k_{j+1}$ ,  $\dots$ ,  $m_p$  oświadczył się  $k_p$  po tym, jak  $m_j$  oświadczył się  $k_j$ . Pokazuje to sprzeczność i kończy dowód.  $\square$

#### Literatura

- [1] D. Gale and L. S. Shapley. „College admissions and the stability of marriage”. *The American Mathematical Monthly*, 120(5):386–391, 1962.
- [2] K. Iwama and S. Miyazaki. „A survey of the stable marriage problem and its variants”. In *International Conference on Informatics Education and Research for Knowledge-Circulating Society*, pages 131–136, 2008.

## Zegar biologiczny tyka

W trakcie naszego życia przynajmniej kilkukrotnie spotykamy się z określeniem *zegar biologiczny*, lecz co ono dokładnie oznacza? Jak nasze ciało zdaje sobie sprawę z upływającego czasu? Czy zostawia on jakieś zmiany w naszych tkankach i organach? Jeśli tak, to czy jesteśmy w stanie je zmierzyć i na ile precyzyjnie możemy określić, ile czasu upłynęło?

Choć te pytania mogą brzmieć nieco frywolnie, są w istocie bardzo ważne w procesie identyfikacji anonimowych ciał. W całym zestawie informacji potrzebnych do zidentyfikowania ciała oszacowanie wieku jest zdecydowanie najbardziej istotne. Zadanie to jest na tyle ważne, że na przestrzeni lat opracowano wiele metod estymacji wieku – np. pomiar zasklepienia czaszki, obserwacja zmian w kościach miednicy czy nawet morfologia materiału pobranego z żeber. Niektóre z tych metod mogą mieć bardzo wysoką dokładność, jednak wymagają kosztownego sprzętu i często mogą być wykorzystywane tylko w przypadku szkieletów, a nie

niedawno odnalezionych ciał. Najbardziej zaawansowane i obiektywne metody szacowania wieku we współczesnej nauce bazują na analizie DNA. Na podstawie próbek krwi możliwe jest określenie przybliżonego wieku z wysoką dokładnością.

Szukając innego rozwiązania, japońscy naukowcy z Kioto, prowadzeni przez Hiroshiego Ikegawę, rozważali możliwość wykorzystania spektroskopii Ramana do analizy ludzkiej skóry, dzięki czemu opracowano by nowe, wiarygodne i łatwo dostępne narzędzie do szacowania wieku. Ich pomysł polegał na analizie widm promieniowania lipidów i białek znajdujących się w skórze, które można pobrać podczas autopsji.

Analiza widma promieniowania uzyskana w spektroskopii ramanowskiej jest powszechnie używana w chemii, ponieważ dostarcza „odcisk palca” cząsteczek, na podstawie którego można je później zidentyfikować. Japońscy naukowcy wierzyli, że emisja

Joanna M. OLAS

Doktorantka, Instytut Fizyki PAN